TD6 : Structures de Hodge

On rappelle dans tout ce TD les définitions suivantes :

1. une $\mathbb{Z}$-structure de Hodge pure effective de poids $k \in \mathbb{N}$ notée V est la donnée de $V_{\mathbb{Z}}$ un $\mathbb{Z}$-module libre de rang fini, et d'une décomposition $V_{\mathbb{C}} = V_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = \oplus_{p+q=k,\, p,q\geq 0} V^{pq}$ où $\overline{V^{pq}} = V^{qp}$ pour tous p, q. On note alors $F^p = \sum_{r\geq p} V^{pq}$.

2. une $\mathbb{Q}$-structure de Hodge pure effective de poids $k \in \mathbb{N}$ notée V est la donnée de $V_{\mathbb{Q}}$ un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension finie, et d'une décomposition comme au-dessus de $V_{\mathbb{C}}$.

3. une polarisation sur une $\mathbb{Z}$-structure de Hodge est la donnée de $(\bullet, \bullet) : V_{\mathbb{Z}} \times V_{\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}$ non-dégénérée, symétrique si k est pair et alternée si k est impair, telle que

   (a) $(\alpha, \bar{\beta}) = 0$ pour tous $\alpha \in V^{pq}$, $\beta \in V^{p'q'}$ et $(p, q) \neq (p', q')$.

   (b) $i^k(-1)^p(\alpha, \bar{\alpha}) > 0$ pour tout $\alpha \in V^{pq} \setminus 0$.

   et une polarisation sur une $\mathbb{Q}$-structure de Hodge est la donnée de $(\bullet, \bullet) : V_{\mathbb{Q}} \times V_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}$ vérifiant les mêmes axiomes.

4. soient $V = (V_{\mathbb{Z}}, V_{\mathbb{C}}, (V^{pq}))$ et $W = (W_{\mathbb{Z}}, W_{\mathbb{C}}, (W^{pq}))$ deux structures de Hodge pures de poids respectifs a et b. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Un morphisme de poids (k, k) de structures de Hodge de V dans W est par définition la donnée de $\phi : V_{\mathbb{Z}} \to W_{\mathbb{Z}}$ une application $\mathbb{Z}$-linéaire telle que $\phi_{\mathbb{C}}(V^{pq}) \subset W^{p+k,q+k}$ pour tous p, q. Idem pour les morphismes de $\mathbb{Q}$-structures de Hodge.

Exercice 1. Soit V une $\mathbb{Z}$-structure de Hodge pure de poids a.

1. On pose $F^p = \oplus_{r\geq p} V^{p,k-p}$. Vérifier que $F^p \oplus \overline{F^{a+1-p}} = V_{\mathbb{C}}$ et $V^{pq} = F^p \cap \overline{F^q}$.

2. Définir la notion de sous-structure de Hodge $V' \subset V$. Définir alors le quotient V/V' comme structure de Hodge. Qu'est ce qui est plus simple lorsque V est une $\mathbb{Q}$-structure de Hodge au lieu d'être une $\mathbb{Z}$-structure de Hodge ?

3. Soit W une autre $\mathbb{Z}$-structure de Hodge pure de poids b et $\phi : V \to W$ un morphisme de poids (k, k). Montrer que $\mathrm{Im}(\phi_{\mathbb{C}}) \cap F_W^{p+k} = \phi_{\mathbb{C}}(F_V^p)$ pour tout p.
   On dit que ϕ est strict pour la filtration de Hodge, et cela veut dire que les deux filtrations induites sur $\mathrm{Im}(\phi)$*, soit par restriction de celle de W soit par image de celle de V, sont en fait égales.*

4. En déduire l'existence d'une structure de Hodge $\mathrm{Im}(\phi)$. De même définir une structure de Hodge $\mathrm{Ker}(\phi)$.

5. Si V est une $\mathbb{Q}$-structure de Hodge, définir la $\mathbb{Q}$-structure de Hodge $\mathrm{Coker}(\phi)$. Lorsque ϕ est de poids $(0, 0)$, montrer qu'on a un isomorphisme de structures de Hodge $\Phi : \mathrm{Coker}(\phi) \to \mathrm{Im}(\phi)$ induit par ϕ.

6. En déduire que la catégorie des $\mathbb{Q}$-structures de Hodge munie des morphismes de poids $(0,0)$ est abélienne.

Exercice 2 Soit V une $\mathbb{Q}$-structure de Hodge pure de poids 1, avec donc $V^{1,0} \subset V$. Soit $W_{\mathbb{Q}} \subset V_{\mathbb{Q}}$ un sous $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

1. Vérifier que la seule contrainte pour que $W_{\mathbb{Q}}$ soit associée à une sous-structure de Hodge de V est que $\dim_{\mathbb{C}}(W_{\mathbb{C}} \cap V^{1,0}) = \frac{\dim_{\mathbb{Q}}(W_{\mathbb{Q}})}{2}$.

2. Soit $U \subset V$ une sous-structure de Hodge telle que $V = U \oplus W$. Vérifier qu'il y a un nombre dénombrable de choix pour $U_{\mathbb{Q}}$, et qu'étant donné $U_{\mathbb{Q}}$ la seule contrainte pour que $U \subset V$ soit une sous-structure de Hodge est que $\dim_{\mathbb{C}}(U_{\mathbb{C}} \cap V^{1,0}) = \frac{\dim_{\mathbb{Q}}(U_{\mathbb{Q}})}{2}$.

3. En déduire que si $W \subset V$ est choisie en position générale comme sous-structure de Hodge, il n'existe pas de sous-structure de Hodge $U \subset V$ telle que $V = U \oplus W$. En conséquence la catégorie des $\mathbb{Q}$-structures de Hodges pures n'est pas abélienne.
On pourra utiliser que la grassmanienne $\mathrm{Gr}(a,b)$ *paramétrant les sous-espaces vectoriels de dimension a dans un espace de dimension b est une variété algébrique de dimension $a(b-a)$.*

4. Supposons maintenant V polarisée et soit $W \subset V$ une sous-structure de Hodge. Vérifier que W est polarisée.

5. Montrer alors qu'il existe une sous-structure de Hodge $U \subset V$ telle que $V = U \oplus W$. En conséquence la catégorie des $\mathbb{Q}$-structures de Hodge polarisées est abélienne.

6. Déduire de ce qui précéde qu'il existe un tore complexe de dimension deux qui est extension de deux courbes elliptiques, mais qui n'est pas une variété abélienne.

Exercice 3.

1. Définir le produit tensoriel $V \otimes W$ entre structures de Hodge pures de poids a et b et vérifier qu'il forme une structure de Hodge pure de poids $a+b$.

2. Définir rapidement la notion de structure de Hodge pure non effective de poids $k \in \mathbb{Z}$, en autorisant les espaces vectoriels V^{pq} à être non nuls lorsque $p, q \in \mathbb{Z}$.

3. Vérifier que $V \otimes W$ garde un sens lorsque V et W sont non effectifs.

4. Soient V, W deux structures de Hodge non nécessairement effectives de poids a et b. Définir une structure de Hodge $\underline{\mathrm{Hom}}(V,W)$ non effective de poids $b-a$.

Exercice 4 Soit $E = \mathbb{C}/\Lambda$ une courbe elliptique. On admet que l'application $H^1_{dR}(E/\mathbb{C}) \times H^1_{dR}(E/\mathbb{C}) \to \mathbb{C}, (\alpha, \beta) \mapsto \int_E \alpha \wedge \beta$ est à valeurs entières lorsque

$$\alpha, \beta \in H^1(E, \mathbb{Z}) \subset H^1(E, \mathbb{C}) = H^1_{dR}(E/\mathbb{C})$$

cet énoncé résultant de généralités sur le cup-produit en cohomologie singulière.

1. Montrer que $i \int_E \alpha \wedge \bar{\alpha} > 0$ pour tout $\alpha \in H^0(E, \Omega^1_E)$.

2. En déduire que $H^1(E)$ est une structure de Hodge polarisée de poids 1.

3. Cela est-il cohérent avec ce que vous connaissez des courbes elliptiques ?