Séminaire BOURBAKI Janvier 2016
68ème année, 2015-2016, n$^{\text{o}}$ 1110

LA PARAMÉTRISATION DE LANGLANDS GLOBALE SUR LES CORPS DE FONCTIONS [d'après Vincent Lafforgue]

par **Benoît STROH**

INTRODUCTION

Soit k un corps fini à q élément et X une courbe projective lisse géométriquement connexe sur k. Notons K_X le corps des fractions de X et choisissons $\bar{K}_X$ une clôture séparable de K_X. Notons $|X|$ l'ensemble des points fermés de X, notons $\mathbb{A}_X$ l'anneau des adèles de X et pour tout $v \in |X|$, notons O_v l'anneau local complété de X en v et K_v son corps des fractions. Soit N un diviseur de X dont on note O_N l'anneau de fonctions. Soit G un groupe réductif connexe déployé sur k. Notons $K_N = \mathrm{Ker}(\prod_{v\in|X|} G(O_v) \to G(O_N))$ le sous-groupe compact ouvert de $G(\mathbb{A}_X)$ associé à N. Soit Z le centre de G et $\Xi \subset Z(K_X) \setminus Z(\mathbb{A}_X)$ un réseau, c'est-à-dire un $\mathbb{Z}$-module libre de type fini et de covolume fini. Soit ℓ un nombre premier premier à q. L'objet principal de l'exposé, et plus généralement de la partie automorphe du programme de Langlands sur les corps de fonctions, est l'espace vectoriel de dimension finie

$$\mathfrak{H} \;=\; \mathcal{C}_{\mathrm{cusp}}\left(G(K_X)\setminus G(\mathbb{A}_X)\,/\,\Xi\cdot K_N\;,\;\bar{\mathbb{Q}}_\ell\right)$$

des fonctions automorphes localement constantes cuspidales [H]. Cet espace est muni de l'action de l'algèbre des opérateurs de Hecke sphériques en toute place de $X - N$. Notons $\mathcal{T} \subset \mathrm{End}_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell}(\mathfrak{H})$ l'image de l'algèbre de Hecke. La $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-algèbre $\mathcal{T}$ est commutative semi-simple.

Notons $\hat{G}$ le groupe réductif connexe sur $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ dual de Langlands de G. Par définition, ses racines sont les coracines de G et *vice versa*. Le but principal du programme de Langlands est de mettre en correspondance d'une part les formes automorphes cuspidales propres pour l'action de l'algèbre de Hecke et d'autre part certains morphismes continus de $\mathrm{Gal}(\bar{K}_X/K_X)$ dans $\hat{G}(\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$. Le théorème suivant permet de réaliser le sens « automorphe vers Galois » de cette correspondance.

Théorème 0.1 (V. Lafforgue). — *On sait construire une $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-algèbre commutative canonique $\mathcal{B} \subset \mathrm{End}_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell}(\mathfrak{H})$ contenant $\mathcal{T}$. On peut en particulier décomposer $\mathfrak{H}$ en espaces propres généralisés*

$$\mathfrak{H} \;=\; \bigoplus_{\tilde{\chi}:\mathcal{B}\to\bar{\mathbb{Q}}_\ell} \mathfrak{H}_{\tilde{\chi}}\,.$$

À tout morphisme d'algèbres $\tilde{\chi} : \mathcal{B} \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell$ est canoniquement associé un paramètre de Langlands, c'est à dire une classe de $\hat{G}(\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$-conjugaison de morphismes

$$\chi : \mathrm{Gal}(\bar{K}_X/K_X) \longrightarrow \hat{G}(\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$$

semi-simples (d'image d'adhérence Zariski réductive) continus non ramifiés hors de N. La restriction de $\tilde{\chi}$ à $\mathcal{T} \subset \mathcal{B}$ est compatible à χ par l'isomorphisme de Satake en toutes les places de $X - N$.

Remarque 0.2. — Soit v une place de $X - N$ et χ comme dans l'énoncé. On dispose d'une classe de $\hat{G}(\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$-conjugaison semi-simple $\chi(\mathrm{Frob}_v)$ dans $\hat{G}(\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$, où Frob_v désigne la classe de conjugaison des Frobenius en v dans le quotient $\pi_1(X - N, \mathrm{Spec}(\bar{K}_X))$ de $\mathrm{Gal}(\bar{K}_X/K_X)$. La compatibilité à l'isomorphisme de Satake [G] apparaissant dans l'énoncé décrit explicitement cette classe de conjugaison en terme de la restriction de $\tilde{\chi}$ à la sous-algèbre de $\mathcal{T}$ engendrée par les opérateurs de Hecke sphériques en v.

Remarque 0.3. — Pour certains groupes autres que GL_n, l'inclusion $\mathcal{T} \subset \mathcal{B}$ est stricte donc un caractère de $\mathcal{B}$ n'est pas déterminé par sa restriction à $\mathcal{T}$. On ne peut donc pas associer un paramètre canonique à un caractère de $\mathcal{T}$. On peut par contre lui associer une famille de paramètres indexée par l'ensemble de ses prolongements en un caractère de $\mathcal{B}$. Les différents paramètres de cette famille sont conjugués sur les groupes de décomposition en toute place de $X - N$ mais ne sont pas globalement conjugués. De tels exemples ont été construits du côté automorphe dans [B] et [Lap] et du côté galoisien dans [Lar1] et [Lar2]. Ainsi l'algèbre $\mathcal{B}$ est fondamentale dans l'énoncé même de la correspondance de Langlands. L'article de Vincent Lafforgue est le premier dans lequel cette algèbre apparaît. Sur les corps de nombres, on ne connaît absolument pas d'analogue de $\mathcal{B}$.

Lorsque $G = \mathrm{GL}_n$ on peut montrer [L2, rem.12.13] que $\mathcal{B} = \mathcal{T}$ donc les problèmes évoqués ci-dessus disparaissent. Cela est relié aux théorèmes de multiplicité un.

Remarque 0.4. — Le théorème admet des généralisations : cas d'un groupe non déployé, d'un groupe métaplectique, des coefficients de torsion [L2, ch.12,13,14], de la correspondance locale [GL]. Nous ne les aborderons pas dans cet exposé.

Remarque 0.5. — Lorsque $G = \mathrm{GL}_2$ le théorème est dû à Drinfeld et lorsque $G = \mathrm{GL}_n$, à Laurent Lafforgue. Leur démonstration consiste à calculer la cohomologie ℓ-adique d'un champ de chtoucas en comptant ses points et en comparant avec la formule des traces d'Arthur-Selberg. Nous verrons que dans ce cas la démonstration de Vincent Lafforgue est complètement différente : au lieu de chercher à calculer la cohomologie d'un champ bien précis de chtoucas, il écrit les relations d'ordre combinatoire que vérifient les cohomologies de toute une famille de champs de chtoucas. De ces relations on déduit l'existence de l'algèbre $\mathcal{B}$ agissant sur $\mathfrak{H}$. Dans le cas de GL_n on conclut par la théorie des pseudo-caractères et dans le cas général en étendant cette théorie. La relation de pseudo-caractère est due à Frobenius et caractérise parmi les fonctions sur un groupe celles qui sont les caractères d'une représentation de dimension n. Lorsque $n = 1$, elle se réduit à la relation de caractère.

Afin d'expliquer les idées de Vincent Lafforgue dans leur cadre le plus simple, nous avons choisi de consacrer la majeure partie de l'exposé au cas de la théorie du corps de classe dans lequel $G = \mathbb{G}_m$. Nous verrons que la méthode de Vincent Lafforgue conduit à une démonstration du sens « automorphe vers Galois » proche mais différente de la preuve de Lang et Rosenlicht [S].

Une fois le formalisme adéquat dégagé dans le cadre de la théorie du corps de classe, nous verrons que le cas d'un groupe quelconque n'est pas si différent. Il faut essentiellement introduire dans la machine plusieurs objets géométriques omniprésents dans le programme de Langlands sur les corps de fonctions et sa variante géométrique : champs de chtoucas de Drinfeld et grassmanniennes affines de Beilinson-Drinfeld.

Je remercie chaleureusement Vincent Lafforgue pour ses explications et ses relectures attentives. Je remercie Vincent Pilloni, les participants du groupe de travail organisé à Paris et d'un cours organisé à Mc Gill et Concordia pour de nombreuses discussions.

1. UN CAS ÉLÉMENTAIRE : LA THÉORIE DU CORPS DE CLASSE

1.1. Quelques définitions

Soit k un corps fini à q élément et $X \to \mathrm{Spec}(k)$ une courbe projective lisse géométriquement connexe. Sauf indication contraire, tous les produits fibrés seront pris sur le corps de base $\mathrm{Spec}(k)$. Fixons une clôture algébrique $\bar{k}$ de k. Notons $\mathrm{Pic}(X)$ le groupe abélien des classes d'isomorphismes de fibrés inversibles sur X, qui s'identifie canoniquement avec le quotient du groupe libre des diviseurs de X par le sous-groupe des diviseurs principaux. Le degré des diviseurs fournit un morphisme $\deg : \mathrm{Pic}(X) \to \mathbb{Z}$ dont on note $\mathrm{Pic}^0(X)$ le noyau qui est un groupe fini.

Soit $\Xi \subset \mathrm{Pic}(X)$ un réseau, c'est à dire un sous-groupe discret sans torsion tel que $\mathrm{Pic}^{\Xi}(X) = \mathrm{Pic}(X)/\Xi$ soit fini. La théorie du corps de classe [S] fournit un revêtement fini étale galoisien de X de groupe d'automorphismes $\mathrm{Pic}^{\Xi}(X)$. Nous appellerons un tel revêtement le Ξ-corps de classe de Hilbert de X ; il est unique à isomorphisme près. La théorie du corps de classe montre enfin que tout revêtement fini étale abélien de X est isomorphe à un Ξ-corps de classe de Hilbert pour Ξ bien choisi. On discutera dans le paragraphe 1.4.2 le cas où on autorise de la ramification le long d'un diviseur de X.

L'objet géométrique que nous étudierons dans cette partie sera un schéma $Y \to X \times X$ obtenu par produit fibré de l'isogénie de Lang de la variété de Picard de X et d'un morphisme de type Abel-Jacobi [Lau]. Définissons tous les objets en jeu, qui s'avéreront être des espaces de modules de chtoucas à deux pattes pour le groupe $\mathbb{G}_m$.

Définition 1.1. — *Notons* $\mathrm{Pic}_X : \mathrm{Sch}_k \to \mathrm{Ens}$ *le foncteur qui à tout k-schéma S associe le groupe abélien* $\mathrm{Pic}(X_S)/f^*\mathrm{Pic}(S)$ *où* $f : X_S = X \times_k S \to S$.

On a donc $\mathrm{Pic}(X) = \mathrm{Pic}_X(k)$. Il est bien connu que Pic_X est représentable par un schéma en groupes abéliens localement de type fini sur $\mathrm{Spec}(k)$ qui est extension de $\mathbb{Z}$ vu comme schéma localement de type fini par une variété abélienne Pic^0_X, qui est la composante neutre de l'identité de Pic_X et aussi le noyau du morphisme de degré $\deg : \mathrm{Pic}_X \to \mathbb{Z}$.

Définition 1.2. — *On note* $\alpha : X \times X \to \mathrm{Pic}^0_X$ *le morphisme qui est donné sur les S-points par*

$$((x, y) : S \to X \times X) \;\mapsto\; \mathcal{O}_{X\times S}(x - y)$$

pour tout schéma S sur $\mathrm{Spec}(k)$. *Dans l'écriture précédente $\mathcal{O}_{X\times S}(x-y)$ est le faisceau inversible sur $X \times S$ associé au diviseur de Cartier obtenu en pondérant les images schématiques de x et de y avec les coefficients $+1$ et -1.*

Remarque 1.3. — La restriction de α à la diagonale $\Delta : X \hookrightarrow X \times X$ est le morphisme nul. Si on suppose que $X(k)$ contient un point rationnel x_0, la restriction de α à la bande horizontale $X \times \{x_0\}$ est le morphisme d'Abel-Jacobi usuel associé à ce choix de point rationnel.

Rappelons que pour tout schéma en groupes commutatifs G sur $\mathrm{Spec}(k)$, l'isogénie de Lang $\lambda : G \to G$ envoie $g \in G(S)$ sur $\mathrm{Frob}_G(g) \cdot g^{-1} \in G(S)$ pour tout schéma S sur $\mathrm{Spec}(k)$. Ici $\mathrm{Frob}_G : G \to G$ est le morphisme de Frobenius sur k défini par l'élévation à la puissance q-ième des fonctions de G. On rappelle que l'isogénie λ est étale car la différentielle du Frobenius est nulle. Elle est donc surjective lorsque G est connexe. Son noyau est $G(k)$. Il est intéressant d'expliciter l'isogénie de Lang de Pic_X.

Lemme 1.4. — *Soit* $\lambda : \mathrm{Pic}_X \to \mathrm{Pic}_X$ *l'isogénie de Lang. Pour tout schéma S sur* $\mathrm{Spec}(k)$, *le morphisme λ envoie* $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(X \times S)$ *sur* ${}^\tau\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{-1}$ *modulo l'image inverse de* $\mathrm{Pic}(S)$, *où on a noté* ${}^\tau\mathcal{L} = (\mathrm{id}_X \times \mathrm{Frob}_S)^*\mathcal{L}$ *et où* $\mathrm{Frob}_S : S \to S$ *élève les fonctions à la puissance q-ième.*

Preuve — Soient Y et S des schémas sur $\mathrm{Spec}(k)$. Le morphisme de Frobenius $\mathrm{Frob}_Y : Y \to Y$ qui élève les fonctions à la puissance q-ème envoie $a \in Y(S)$ sur la composée $\mathrm{Frob}_Y \circ a = a \circ \mathrm{Frob}_S \in Y(S)$. Dans le cas où $Y = \mathrm{Pic}_X$ et $a \in \mathrm{Pic}_X(S)$ correspond à $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(X \times S)$ modulo l'image inverse de $\mathrm{Pic}(S)$, on voit que $a \circ \mathrm{Frob}_S \in \mathrm{Pic}_X(S)$ correspond bien à $(\mathrm{id}_X \times \mathrm{Frob}_S)^*\mathcal{L}$.

Remarque 1.5. — Ainsi on a $\deg \circ \mathrm{Frob}_{\mathrm{Pic}_X} = \deg$ où $\deg : \mathrm{Pic}_X \to \mathbb{Z}$ est le morphisme associant à un fibré en droites son degré. On a donc $\deg \circ \lambda = 0$. L'image de l'isogénie de Lang est donc égale à Pic^0_X.

Définition 1.6. — *On définit le schéma localement de type fini $Z \to X \times X$ comme le produit fibré*

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Pic}_X \arrow[d, "\lambda"] \\ X \times X \arrow[r, "\alpha"] & \mathrm{Pic}^0_X \end{tikzcd}$$

Lemme 1.7. — *Pout tout schéma S sur* $\mathrm{Spec}(k)$ *on a* $Z(S) = \{(x, y, \mathcal{L})\}$ *où* $x \in X(S)$, $y \in X(S)$ *et* $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}_X(S)$ *sont tels qu'il existe un isomorphisme* $\phi : {}^{\tau}\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{-1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X\times S}(x - y)$ *modulo l'image inverse de* $\mathrm{Pic}(S)$.

On appelle une famille $(x, y, \mathcal{L})$ paramétrée par un élement de $Z(S)$ un chtouca à deux pattes sur S pour le groupe $\mathbb{G}_m$ et la représentation $\mathbb{G}_m^2 \to \mathbb{G}_m$ $(a, b) \mapsto a \cdot b^{-1}$. Les deux pattes sont les points x et y de $X(S)$.

Le schéma Z est muni d'une action libre du groupe $\mathrm{Pic}(X) = \mathrm{Ker}(\lambda)$. Comme ce groupe est infini, Z n'est pas de type fini sur $\mathrm{Spec}(k)$. On remédie à cela en utilisant le réseau $\Xi \subset \mathrm{Pic}(X)$ fixé précédemment.

Définition 1.8. — *Le schéma de type fini $\pi : Y \to X \times X$ est le quotient $Y = Z/\Xi$.*

Le morphisme $\pi : Y \to X \times X$ est fini étale et le groupe d'automorphismes de ce revêtement est $\mathrm{Pic}(X)/\Xi = \mathrm{Pic}^{\Xi}(X)$. La restriction de π à la diagonale $X \hookrightarrow X \times X$ est le revêtement trivial $X \times \mathrm{Pic}^{\Xi}(X) \to X$.

1.2. Ce qu'on sait et qu'on oubliera

Dans ce paragraphe, on utilise la théorie du corps de classe. Les résultats rappelés ne seront pas utilisés dans le reste de l'exposé mais pourront motiver les constructions du paragraphe suivant.

Pour tout point $x \in X(\bar{k})$ la restriction de π à la bande horizontale $X \times \{x\}$ ou à la bande verticale $\{x\} \times X$ est isomorphe à une extension du corps des constantes du Ξ-corps de classe de Hilbert d'après [S, ch.VI.4]. Le comportement géométrique de π est donc remarquable : sa composée avec chacune des projections $X \times X \to X$ fournit une interpolation du Ξ-corps de classe de Hilbert paramétrée par X, et la restriction de π à la diagonale de $X \times X$ est triviale.

La cohomologie de π est élucidée dans le lemme suivant [Lau, 1.5] dû à Drinfeld. On y utilise le morphisme de réciprocité $\pi_1(X)^{\mathrm{ab}} \to \mathrm{Pic}^{\Xi}(X)$ et pour tout caractère $\chi : \mathrm{Pic}^{\Xi}(X) \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell^*$, on note $\mathcal{F}_\chi$ le $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-système local de rang un sur X associé à la composée $\pi_1(X)^{\mathrm{ab}} \to \mathrm{Pic}^{\Xi}(X) \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell^*$.

Lemme 1.9. — *On a un isomorphisme canonique entre systèmes locaux sur $X \times X$*

$$\pi_* \bar{\mathbb{Q}}_\ell = \bigoplus_{\chi : \mathrm{Pic}^{\Xi}(X) \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell^*} \mathcal{F}_\chi \boxtimes \mathcal{F}_{\chi^{-1}}$$

où l'on rappelle que si $p_1, p_2 : X \times X \to X$ sont les deux projections, on note $\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G} = (p_1^* \mathcal{F}) \otimes (p_2^* \mathcal{G})$ pour tous faisceaux $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sur X.

Remarque 1.10. — Le lemme 1.9 n'utilise que la moitié de la théorie du corps de classe, c'est-à-dire le sens « automorphe vers Galois » qui fournit la surjection $\pi_1(X)^{\mathrm{ab}} \to \mathrm{Pic}^{\Xi}(X)$ et pas le sens « Galois vers automorphe » qui montre que cette famille de surjections induit une bijection après la limite projective sur Ξ. Pour faire plus explicitement le lien avec le programme de Langlands, rappelons qu'on dispose d'un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Pic}^{\Xi}(X) = K_X^* \setminus \mathbb{A}_X^* / \Xi \cdot \prod_{v \in |X|} O_v^*$$

qui permet de voir χ comme une forme automorphe pour $\mathbb{G}_m$ sur X de niveau maximal en toutes les places et propre pour les opérateurs de Hecke.

Remarque 1.11. — L'identification du groupe d'automorphismes de π avec $\mathrm{Pic}^{\Xi}(X)$ permet de construire directement le morphisme $\pi_1(X)^{\mathrm{ab}} \to \mathrm{Pic}^{\Xi}(X)$ puis le sens « automorphe vers Galois » en théorie du corps de classe.

1.3. Sens automorphe vers Galois en théorie du corps de classe

Supposons désormais qu'on ne connaisse pas la théorie du corps de classe et donc aucune des informations du paragraphe précédent. Conformément à la remarque 1.11, on va même oublier que l'on connaît le groupe d'automorphismes de π. Notre but est de donner une nouvelle démonstration du sens « automorphe vers Galois » en théorie du corps de classe sans jamais chercher à calculer le groupe d'automorphismes de π.

Remarque 1.12. — Calculer le groupe d'automorphismes de π permet de calculer sa cohomologie comme dans le lemme 1.9. Nous verrons dans la partie 2 que pour un groupe réductif quelconque, on construit encore des analogues de π. Leur cohomologie réalise d'après la conjecture de Kottwitz le sens automorphe vers Galois du programme de Langlands. Mais l'approche de Vincent Lafforgue ne suppose pas la conjecture de Kottwitz connue, et c'est pourquoi nous oublions certaines informations pourtant faciles à obtenir dans le cas de $\mathbb{G}_m$.

Le premier principe utilisé est le suivant : soit $S \to \mathrm{Spec}(k)$ un schéma de type fini muni d'un point géométrique $\bar{s} \to S$ et d'un faisceau ℓ-adique lisse $\mathcal{F}$. On dispose donc d'une action de $\pi_1(S, \bar{s})$ sur la fibre $\mathcal{F}_{\bar{s}}$. Si on se donne un schéma S', un faisceau ℓ-adique $\mathcal{F}'$ lisse sur S', une immersion fermée $i : S \hookrightarrow S'$ et un isomorphisme $i^*\mathcal{F}' = \mathcal{F}$ alors l'action de $\pi_1(S, \bar{s})$ sur $\mathcal{F}_{\bar{s}}$ est munie d'un prolongement à $\pi_1(S', \bar{s})$ via le morphisme $i_* : \pi_1(S, \bar{s}) \to \pi_1(S', \bar{s})$.

On applique ce principe à $S = X$ plongé diagonalement par Δ dans $S' = X \times X$, à $\mathcal{F}' = \pi_*(\mathbb{Q}_\ell)$, à $\mathcal{F}$ la restriction de $\mathcal{F}'$ à la diagonale et à $\bar{s} = \Delta(\bar{\eta})$ où $\bar{\eta} \to X$ est un point géométrique générique. Puisque π est le revêtement trivial de X de groupe de transformation $\mathrm{Pic}^{\Xi}(X)$ on a $\mathcal{F}_{\Delta(\bar{\eta})} = \mathbb{Q}_\ell[\mathrm{Pic}^{\Xi}(X)]$ qui est l'espace vectoriel de base les éléments de $\mathrm{Pic}^{\Xi}(X)$ et qui est muni de l'action triviale de $\pi_1(X, \bar{\eta}) = \pi_1(\Delta(X), \Delta(\bar{\eta}))$.

On obtient donc une action de $\pi_1(X \times X, \Delta(\bar{\eta}))$ sur $\bar{\mathbb{Q}}_\ell[\mathrm{Pic}^{\Xi}(X)]$ telle que sa composée avec le morphisme induit par la diagonale

$$\Delta_* : \pi_1(X, \bar{\eta}) \to \pi_1(X \times X, \Delta(\bar{\eta}))$$

soit triviale. On aimerait maintenant étendre cette action de $\pi_1(X \times X, \Delta(\bar{\eta}))$ en une action du groupe produit $\pi_1(X, \bar{\eta})^2$.

1.3.1. Lemme de Drinfeld. — Ce lemme va permettre d'obtenir une action de $\pi_1(X, \bar{\eta})^2$ sur la fibre en $\Delta(\bar{\eta})$ de certains systèmes locaux sur $X \times X$. La situation est générale et n'est pas spécifique au revêtement $\pi : Y \to X \times X$ ou à la théorie du corps de classe.

Remarque 1.13. — Soient X_1 et X_2 deux schémas de type fini propres connexes sur un corps séparablement clos K munis de deux points rationnels $x_1 \in X_1(K)$ et $x_2 \in X_2(K)$. Les projections $p_i : X_1 \times X_2 \to X_i$ induisent un morphisme canonique $\pi_1(X_1 \times_K X_2, x_1 \times_K x_2) \to \pi_1(X_1, x_1) \times \pi_1(X_2, x_2)$. D'après le théorème de Künneth pour le groupe fondamental [SGA, Exp.X Cor.1.7] ce morphisme est un isomorphisme.

La situation est très différente lorsque X_1 et X_2 sont propres géométriquement connexes sur K qui n'est pas séparablement clos. On choisit $\bar{K}$ une clôture séparable de K et on note $\pi_1^{\mathrm{geo}}(X_i, x_i) = \pi_1(X_i \times_K \bar{K}, x_i)$ avec $x_i \in X_i(\bar{K})$ pour $i = 1, 2$. On dispose alors de suites exactes courtes de fibration puisque la fibre géométrique de $X_i \to \mathrm{Spec}(K)$ en $\mathrm{Spec}(\bar{K})$ est $X_i \times_K \bar{K}$:

$$0 \to \pi_1^{\mathrm{geo}}(X_1, x_1) \to \pi_1(X_1, x_1) \to \mathrm{Gal}(\bar{K}/K) \to 0 \tag{1}$$

$$0 \to \pi_1^{\mathrm{geo}}(X_2, x_2) \to \pi_1(X_2, x_2) \to \mathrm{Gal}(\bar{K}/K) \to 0$$

$$0 \to \pi_1^{\mathrm{geo}}(X_1 \times_K X_2, x_1 \times_{\bar{K}} x_2) \to \pi_1(X_1 \times_K X_2, x_1 \times_{\bar{K}} x_2) \to \mathrm{Gal}(\bar{K}/K) \to 0$$

qui induisent un diagramme commutatif dont les lignes horizontales sont des suites exactes courtes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \pi_1^{\mathrm{geo}}(X_1 \times_K X_2, x_1 \times_{\bar{K}} x_2) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \pi_1(X_1 \times_K X_2, x_1 \times_{\bar{K}} x_2) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Gal}(\bar{K}/K) \arrow[r] \arrow[d, "\Delta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \pi_1^{\mathrm{geo}}(X_1, x_1) \times \pi_1^{\mathrm{geo}}(X_2, x_2) \arrow[r] & \pi_1(X_1, x_1) \times \pi_1(X_2, x_2) \arrow[r] & \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)^2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

et dans lequel la flèche verticale à gauche est un isomorphisme par la discussion précédente sur un corps algébriquement clos et celle de droite est le plongement diagonal. En conclusion on n'a jamais $\pi_1(X_1 \times_K X_2, x_1 \times_{\bar{K}} x_2) = \pi_1(X_1, x_1) \times \pi_1(X_2, x_2)$ lorsque K n'est pas séparablement clos, la différence entre ces deux groupes étant celle entre $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ et $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)^2$.

Lorsque K est fini, comme $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ est engendré par le Frobenius on peut dire qu'il manque moralement un Frobenius à $\pi_1(X_1 \times_K X_2, x_1 \times_{\bar{K}} x_2)$ pour le rendre égal à $\pi_1(X_1, x_1) \times \pi_1(X_2, x_2)$. Donc étant donné un $\bar{\mathbb{Z}}_\ell$-système local irréductible $\mathcal{F}$ sur $X_1 \times_K X_2$, il faut d'une certaine manière rajouter un Frobenius à $\mathcal{F}$ pour qu'il s'écrive $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2$ avec $\mathcal{F}_i$ un $\bar{\mathbb{Z}}_\ell$-système local sur X_i pour $I = 1, 2$. Cela éclaire le lemme de Drinfeld que nous allons énoncer après quelques définitions.

Remarque 1.14. — L'hypothèse de propreté de X_1 ou X_2 est indispensable en caractéristique p dans la discussion précédente. Les revêtements d'Artin-Schreier montrent en effet que $\pi_1^{\mathrm{geo}}(\mathbb{A}^2) \neq \pi_1^{\mathrm{geo}}(\mathbb{A}^1)^2$. Néanmoins le lemme de Drinfeld est valable sans hypothèse de propreté et cela sera important dès que le niveau N est non vide.

On dispose d'une factorisation du morphisme de Frobenius de $X \times X$ en $\mathrm{Frob}_{X\times X} = F_1 \circ F_2$ avec $F_1 = \mathrm{Frob}_X \times \mathrm{Id}_X$ et $F_2 = \mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_X$ qui sont deux endomorphismes de $X \times X$ commutants entre eux et appelés « Frobenius partiels » en les deux variables de $X \times X$. On rappelle que pour tout $\bar{\mathbb{Z}}_\ell$-système local $\mathcal{G}$ sur un schéma Y sur $\mathrm{Spec}(k)$ on dispose d'un isomorphisme canonique $F_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Frob}_Y^* \mathcal{G}$.

Définition 1.15. — *Soit $\mathcal{F}$ un $\bar{\mathbb{Z}}_\ell$-système local sur $X \times X$. Des morphismes de Frobenius partiels sur $\mathcal{F}$ sont deux isomorphismes de faisceaux $F_{1,\mathcal{F}} : \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} F_1^*\mathcal{F}$ et $F_{2,\mathcal{F}} : \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} F_2^*\mathcal{F}$ tels que $F_{1,\mathcal{F}} \circ F_{2,\mathcal{F}} = F_{\mathcal{F}}$.*

Remarque 1.16. — Il suffit de se donner $F_{1,\mathcal{F}}$ car $F_{2,\mathcal{F}} = F_{\mathcal{F}} \circ F_{1,\mathcal{F}}^{-1}$.

Exemple 1.17. — Soit $\mathcal{F}_i$ un $\bar{\mathbb{Z}}_\ell$-système local sur X pour $I = 1,2$. Le système local $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2$ est muni des Frobenius partiels $F_{1,\mathcal{F}} = F_{\mathcal{F}_1} \boxtimes \mathrm{Id}_{\mathcal{F}_2}$ et $F_{2,\mathcal{F}} = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}_1} \boxtimes F_{\mathcal{F}_2}$ sur $X \times X$.

Pour tout $v \in |X|$ rappelons que le degré d de v est le degré de l'extension $k(v)/k$. Choisissons un plongement $k(v) \hookrightarrow \bar{k}$ et notons $\bar{v} \to v$ le point géométrique correspondant. Choisissons une clôture séparable $\bar{K}_v$ et une flèche de spécialisation $\bar{\eta} \rightsquigarrow \bar{v}$ déterminée par un plongement $\bar{K}_X \subset \bar{K}_v$. On obtient alors des morphismes $\pi_1(v, \bar{v}) \to \pi_1(X, \bar{v}) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, \bar{\eta})$ et on note $\mathrm{Frob}_v \in \pi_1(X, \bar{\eta})$ l'image du Frobenius arithmétique de $\pi_1(v, \bar{v}) = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k(v))$. Pour tout système local $\mathcal{F}$ sur $X \times X$ on obtient également un isomorphisme $\mathcal{F}|_{\Delta(\bar{v})} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}|_{\Delta(\bar{\eta})}$. Si $\mathcal{F}$ est muni de Frobenius partiels cet isomorphisme permet de transporter l'action de $F_{1,\mathcal{F}}^d|_{\Delta(\bar{v})}$ sur $\mathcal{F}|_{\Delta(\bar{v})}$ en un endomorphisme noté $F_{1,\mathcal{F},v}^d$ de $\mathcal{F}|_{\Delta(\bar{\eta})}$.

Lemme 1.18 (Drinfeld). — *(voir* [L2, lem.8.2, 8.6] *et les références citées) Le foncteur qui à un système local $\mathcal{F}$ sur $X \times X$ associe la fibre $\mathcal{F}|_{\Delta(\bar{\eta})}$ induit une équivalence de catégories entre la catégorie des $\bar{\mathbb{Z}}_\ell$-systèmes locaux constructibles sur $X \times X$ munis de Frobenius partiels et la catégorie des représentations continues de $\pi_1(X, \bar{\eta})^2$ sur des $\bar{\mathbb{Z}}_\ell$-modules de type fini. Cette équivalence est caractérisée par le fait qu'elle envoie tout système local de la forme $\mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2$ muni de ses Frobenius partiels canoniques sur la représentation $\mathcal{F}_1|_{\bar{\eta}} \boxtimes \mathcal{F}_2|_{\bar{\eta}}$ de $\pi_1(X, \bar{\eta})^2$.*

Via cette équivalence, pour tout $v \in |X|$ de degré d l'action de $(\mathrm{Frob}_v, 1) \in \pi_1(X, \bar{\eta})^2$ sur $\mathcal{F}|_{\Delta(\bar{\eta})}$ est donnée par l'action de $F_{1,\mathcal{F},v}^d$ et celle de $(1, \mathrm{Frob}_v)$ par $F_{2,\mathcal{F},v}^d$.

Remarque 1.19. — On peut remplacer X par n'importe quel ouvert $U \subset X$. On aussi un énoncé plus fort dans lequel on suppose que $\mathcal{F}$ est un $\bar{\mathbb{Z}}_\ell$-faisceau lisse sur un ouvert V de $X \times X$ qui n'est pas supposé contenir un ouvert de la forme $U \times U$ avec $U \subset X$ non vide. On note η^2 le point générique de $X \times X$ et on montre alors (voir par exemple [L2, lem.8.3]) que lorsque $\mathcal{F}$ est muni d'un isomorphisme $F_{1,\mathcal{F}} : \mathcal{F}|_{\eta^2} \xrightarrow{\sim} F_1^*\mathcal{F}|_{\eta^2}$ il est lisse sur un ouvert du type $U \times U$ donc redevable du lemme de Drinfeld. C'est alors sa fibre en $\Delta(\bar{\eta})$ (et non en un point géométrique localisé en η^2) qui est dans ce cas munie d'une action canonique de $\pi_1(\eta, \bar{\eta})^2$.

Remarque 1.20. — La démonstration du lemme de Drinfeld procède par réduction au cas des revêtements finis étales. Elle s'applique donc aux $\bar{\mathbb{Z}}_\ell$-faisceaux constructibles. Cela posera des problèmes techniques dans le paragraphe 2.2.2 où l'hypothèse de constructibilité ne sera pas directement satisfaite.

Remarque 1.21. — Il existe une version du lemme de Drinfeld sur X^n pour tout $n \geq 1$. Il faut alors demander l'existence de morphismes de Frobenius partiels $F_{i,\mathcal{F}}$ relatifs à la i-ème variable pour tout $1 \leq i \leq n$ tels que les $F_{i,\mathcal{F}}$ commutent entre eux et que $F_{1,\mathcal{F}} \circ \cdots \circ F_{n,\mathcal{F}}$ soit l'isomorphisme canonique $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Frob}_{X^n}^*\mathcal{F}$.

1.3.2. Application du lemme de Drinfeld. — Il reste à appliquer le lemme de Drinfeld au système local $\pi_*\bar{\mathbb{Z}}_\ell$ sur $X \times X$. Pour cela, il faut vérifier qu'il est muni de Frobenius partiels. Cela résulte du lemme suivant par le théorème de changement de base propre.

Lemme 1.22. — *On possède un isomorphisme canonique entre Y et le produit fibré*

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "\pi"] \\ X \times X \arrow[r, "F_1"] & X \times X \end{tikzcd}$$

Cet isomorphisme respecte de plus la projection vers $X \times X$. Il induit donc un morphisme $F_{1,Y} : Y \to Y$ au-dessus de F_1.

Preuve — On se contente de construire le morphisme $F_{1,Y} : Y \to Y$. Il induira un morphisme de Y dans le produit fibré et il serait facile de vérifier que c'est un isomorphisme.

Il suffit de construire $F_{1,Y}$ en remplaçant Y par le schéma localement de type fini Z dont Y est le quotient par Ξ. On a vu que pour tout schéma S sur $\mathrm{Spec}(k)$, $Z(S)$ est l'ensemble des familles $(x, y, \mathcal{L})$ où $x, y \in X(S)$ et $\mathcal{L}$ est une classe d'isomorphisme de fibré inversible sur $X \times S$ (modulo les fibrés inversibles sur S) tel qu'il existe ϕ : ${}^\tau\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{-1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X\times S}(x - y)$. Posons $\mathcal{M} = \mathcal{L}(x)$. On a un isomorphisme canonique ${}^\tau\mathcal{M} = ({}^\tau\mathcal{L})(\mathrm{Frob}_X(x))$ et on obtient un isomorphisme $\psi : {}^\tau\mathcal{M} \otimes \mathcal{M}^{-1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X\times S}(\mathrm{Frob}_X(x) - y)$. On pose $F_{1,Z}(x, y, \mathcal{L}) = (\mathrm{Frob}_X(x), y, \mathcal{M})$ qui reste un point de Z et on vérifie que ce morphisme convient.

Le lemme de Drinfeld fournit alors une action canonique de $\pi_1(X, \bar{\eta})^2$ sur $\pi_*\bar{\mathbb{Z}}_\ell|_{\Delta(\bar{\eta})}$ donc sur $\pi_*\bar{\mathbb{Q}}_\ell|_{\Delta(\bar{\eta})} = \bar{\mathbb{Q}}_\ell[\mathrm{Pic}^\Xi(X)]$ qui est triviale sur $\pi_1(X, \bar{\eta})$ plongé diagonalement dans $\pi_1(X, \bar{\eta})^2$.

Remarque 1.23. — *A posteriori* si on connaît la description de $\pi_*\bar{\mathbb{Z}}_\ell$ fournie par le lemme 1.9, il est clair que la fibre de ce faisceau en $\Delta(\bar{\eta})$ est munie d'une action de $\pi_1(X,\bar{\eta})^2$ triviale sur $\pi_1(X,\bar{\eta})$ plongé diagonalement dans $\pi_1(X,\bar{\eta})^2$.

1.3.3. Opérateurs d'excursion. — On va se servir de l'action précédente de $\pi_1(X,\bar{\eta})^2$ sur $\pi_*\bar{\mathbb{Q}}_\ell|_{\Delta(\bar{\eta})} = \bar{\mathbb{Q}}_\ell[\mathrm{Pic}^\Xi(X)]$ pour construire de nouveaux opérateurs, dits d'excursion, qui agissent sur l'espace des formes automorphes

$$\mathcal{C}(K_X^* \setminus \mathbb{A}_X^* / \Xi \cdot \prod_{v\in|X|} O_v^*\,,\ \bar{\mathbb{Q}}_\ell) \ = \ \bar{\mathbb{Q}}_\ell[\mathrm{Pic}^\Xi(X)]$$

Bien sûr dans le cas où $G = \mathbb{G}_m$ les conditions de cuspidalité ou de support compact sont vides.

Définition 1.24. — *Soient $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in \pi_1(X,\bar{\eta})^2$. On note S_γ l'endomorphisme de $\bar{\mathbb{Q}}_\ell[\mathrm{Pic}^\Xi(X)]$ obtenu par composition des isomorphismes canoniques suivants et de l'action canonique de $\pi_1(X,\bar{\eta})^2$*

$$\bar{\mathbb{Q}}_\ell[\mathrm{Pic}^\Xi(X)] \xrightarrow{\sim} \pi_*\bar{\mathbb{Q}}_\ell|_{\Delta(\bar{\eta})} \xrightarrow{\gamma} \pi_*\bar{\mathbb{Q}}_\ell|_{\Delta(\bar{\eta})} \xrightarrow{\sim} \bar{\mathbb{Q}}_\ell[\mathrm{Pic}^\Xi(X)]$$

Remarque 1.25. — *A posteriori* si on connaît la description de $\pi_*\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ fournie par le lemme 1.9, on voit que S_γ agit par multiplication par $\chi(\gamma_1 \cdot \gamma_2^{-1})$ sur le facteur direct $\mathcal{F}_\chi|_{\bar{\eta}} \boxtimes \mathcal{F}_{\chi^{-1}}|_{\bar{\eta}}$ de $\pi_*\bar{\mathbb{Q}}_\ell|_{\Delta(\bar{\eta})} \xrightarrow{\sim} \bar{\mathbb{Q}}_\ell[\mathrm{Pic}^\Xi(X)]$.

Notons $\mathcal{B} \subset \mathrm{End}_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell}(\bar{\mathbb{Q}}_\ell[\mathrm{Pic}^\Xi(X)])$ la sous-$\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-algèbre engendrée par les opérateurs S_γ pour $\gamma \in \pi_1(X,\bar{\eta})^2$. On la munit de la topologie ℓ-adique.

Lemme 1.26. — *Les égalités suivantes sont vérifiées*

1. *$S_\gamma \circ S_{\gamma'} = S_{\gamma\cdot\gamma'}$ pour tous γ et $\gamma' \in \pi_1(X,\bar{\eta})^2$.*
2. *Le morphisme $\pi_1(X,\bar{\eta})^2 \to \mathcal{B}$ qui envoie γ sur S_γ est continu.*
3. *L'algèbre $\mathcal{B}$ est commutative.*

Preuve — C'est une conséquence du lemme 1.45 et de la remarque 1.46 qui utiliseront les chtoucas à quatre pattes.

Remarque 1.27. — On pourrait vouloir relier la commutativité de $\mathcal{B}$ au fait que l'action de $\pi_1(X,\bar{\eta})^2$ sur $\pi_*\bar{\mathbb{Q}}_\ell|_\Delta(\bar{\eta})$ se factorise par l'abélianisé de ce groupe. Mais premièrement cela n'est pas connu si on ne s'autorise pas à calculer directement le groupe d'automorphismes de π et à vérifier qu'il est abélien, et deuxièmement $\mathcal{B}$ sera abélienne pour tout groupe G, même lorsque l'action de puissances de $\pi_1(X,\bar{\eta})$ ne se factorisera pas par son abélianisé. La commutativité de $\mathcal{B}$ résulte en fait des propriétés des opérateurs d'excursion à quatre pattes qui seront introduits dans la définition 1.41 (voir le lemme 1.45 et la remarque 1.46).

On peut alors décomposer $\bar{\mathbb{Q}}_\ell[\mathrm{Pic}^{\Xi}(X)]$ en sous-espaces propres généralisés sous l'action de $\mathcal{B}$ et l'on obtient

$$\bar{\mathbb{Q}}_\ell[\mathrm{Pic}^{\Xi}(X)] \;=\; \bigoplus_{\tilde{\chi}:\mathcal{B}\to\bar{\mathbb{Q}}_\ell} \bar{\mathbb{Q}}_\ell[\mathrm{Pic}^{\Xi}(X)]_{\tilde{\chi}}$$

où $\tilde{\chi} : \mathcal{B} \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell$ parcourt les morphismes de $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-algèbres.

Lemme 1.28. — *Soit $\tilde{\chi} : \mathcal{B} \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell$ un morphisme de $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-algèbres. On définit une fonction $\chi : \pi_1(X,\bar{\eta}) \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell$ par la formule*

$$\chi(\gamma) \;=\; \tilde{\chi}\left(S_{(\gamma,1)}\right)$$

Alors χ est un morphisme de groupe continu à valeurs dans $\bar{\mathbb{Q}}_\ell^*$.

Finalement à tout élément $f \in \mathcal{C}(K_X^*\backslash\mathbb{A}_X^*/\Xi\cdot\prod_{v\in|X|} O_v^*, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ vecteur propre généralisé sous l'action de $\mathcal{B}$ on associe le caractère d'algèbre $\tilde{\chi} : \mathcal{B} \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell$ correspondant puis le caractère de groupe $\chi : \pi_1(X,\bar{\eta}) \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell^*$ construit dans le lemme précédent. On obtient bien le sens « automorphe vers Galois » de la théorie du corps de classe. On vérifiera dans le paragraphe suivant la compatibilité locale-globale aux places non ramifiées.

1.3.4. Opérateurs de Hecke. — Par ailleurs des opérateurs de Hecke agissent sur la fibre $\pi_*\bar{\mathbb{Q}}_\ell|_{\Delta(\bar{\eta})}$. Dans le cas présent, ils proviennent de morphismes de Z dans lui-même respectant la projection vers $X \times X$. Soit $v \in |X|$ un point fermé vu comme diviseur de X. On définit le morphisme $T_v : Z \to Z$ au-dessus de $X \times X$ en envoyant $(x, y, \mathcal{L})$ sur $(x, y, \mathcal{L}(v))$. Cela est justifié car comme v est un diviseur de X, on a un isomorphisme canonique ${}^{\tau}(\mathcal{O}_{X\times S}(v)) = \mathcal{O}_{X\times S}(v)$ pour tout schéma $S \to \mathrm{Spec}(k)$. On obtient par quotient par Ξ un morphisme $T_v : Y \to Y$ qui est au-dessus de π.

On en déduit un morphisme $T_v : \pi_*\bar{\mathbb{Q}}_\ell \to \pi_*\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ de faisceaux étales sur $X \times X$ puis un morphisme $T_v : \pi_*\bar{\mathbb{Q}}_\ell|_{\Delta(\bar{\eta})} \to \pi_*\bar{\mathbb{Q}}_\ell|_{\Delta(\bar{\eta})}$ qui commute à l'action de $\pi_1(X,\bar{\eta})^2$ obtenue par le lemme de Drinfeld 1.18. On obtient finalement un endomorphisme $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-linéaire T_v de $\bar{\mathbb{Q}}_\ell[\mathrm{Pic}^{\Xi}(X)]$.

Lemme 1.29. — *Pour tout $v \in |X|$ l'endomorphisme T_v de $\bar{\mathbb{Q}}_\ell[\mathrm{Pic}^{\Xi}(X)]$ commute à tout élément de $\mathcal{B}$.*

Remarque 1.30. — Vu la formule décrivant $T_v : Y \to Y$ restreinte à la diagonale $\Delta : X \hookrightarrow X \times X$ on voit que $T_v \in \mathrm{End}_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell}(\bar{\mathbb{Q}}_\ell[\mathrm{Pic}^{\Xi}(X)])$ est induit par $\mathrm{Pic}^{\Xi}(X) \to \mathrm{Pic}^{\Xi}(X)$, $\mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}(v)$.

On va voir que tout opérateur de Hecke sphérique en une place de $X - N$ est un opérateur d'excursion, ce qui induit une inclusion $\mathcal{T} \subset \mathcal{B}$. Rappelons qu'on a défini $\mathrm{Frob}_v \in \pi_1(X,\bar{\eta})$ avant le lemme 1.18. Le lemme suivant résume la compatibilité locale-globale dans le cas de la théorie du corps de classe.

Lemme 1.31. — *Pour tout $v \in |X|$ on a $T_v = S_{(\mathrm{Frob}_v,1)} \in \mathrm{End}(\bar{\mathbb{Q}}_\ell[\mathrm{Pic}^{\Xi}(X)])$.*

Preuve — On suppose que v est de degré un pour simplifier. L'endomorphisme $S_{(\mathrm{Frob}_v,1)}$ de $\bar{\mathbb{Q}}_\ell[\mathrm{Pic}^\Xi(X)] = \pi_*\bar{\mathbb{Q}}_\ell|_{\Delta(\bar\eta)}$ est défini par l'action de $(\mathrm{Frob}_v, 1) \in \pi_1(X,\bar\eta)^2$. D'après le lemme 1.18 cette action est donné par $F_{1,\pi_*\bar{\mathbb{Q}}_\ell,v}$. L'action de $F_{1,\pi_*\bar{\mathbb{Q}}_\ell,v}$ est induite par la fibre en $\Delta(v)$ du morphisme $F_{1,Y} : Y \to Y$ construit dans la démonstration du lemme 1.22. Par construction pour tout schéma S sur $\mathrm{Spec}(k)$ le morphisme $F_{1,Y}$ envoie $(x, y, \mathcal{L}) \in Y(S)$ sur $(\mathrm{Frob}_X(x), y, \mathcal{L}(x)) \in Y(S)$. Sa fibre en $\Delta(v)$ envoie donc $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{L}(v)$, ce qui est la définition de T_v.

Remarque 1.32. — Il résulte du théorème de densité de Chebotarev qu'ici $\mathcal{T} = \mathcal{B}$. Voir [L2, rem.12.13] pour le cas de $G = \mathrm{GL}_n$ où il en est de même.

Même lorsque $\mathcal{T} = \mathcal{B}$, l'interprétation de T_v comme $S_{(\mathrm{Frob}_v,1)}$, qui par définition ne dépend que de $\mathrm{Frob}_v \in \pi_1(X,\bar\eta)$ et pas de v, est intéressante car elle fournit des lois de réciprocité en théorie du corps de classe, à savoir que toute relation entre des Frob_{v_i} dans $\pi_1(X,\bar\eta)^{\mathrm{ab}}$ implique la même relation entre les T_{v_i} agissant sur $\bar{\mathbb{Q}}_\ell[\mathrm{Pic}^\Xi(X)]$. Comme T_{v_i} agit sur $\bar{\mathbb{Q}}_\ell[\mathrm{Pic}^\Xi(X)]$ *via* la translation $\mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}(v_i)$ sur $\mathrm{Pic}^\Xi(X)$ on en déduit une relation correspondante entre les éléments $\mathcal{O}_X(v_i)$ de $\mathrm{Pic}^\Xi(X)$.

On a finalement prouvé que $\mathcal{T} = \mathcal{B} = \bar{\mathbb{Q}}_\ell[\mathrm{Pic}^\Xi(X)]$ où la dernière algèbre est l'algèbre du groupe $\mathrm{Pic}^\Xi(X)$. On note $[g] \in \bar{\mathbb{Q}}_\ell[\mathrm{Pic}^\Xi(X)]$ le générateur associé à $g \in \mathrm{Pic}^\Xi(X)$. *Via* ces identifications $T_v = S_{(\mathrm{Frob}_v,1)} = [\mathcal{O}_X(v)]$ pour tout $v \in |X - N|$. Soit $\tilde\chi : \mathcal{B} \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell$ un morphisme d'algèbre et $\chi : \pi_1(X,\bar\eta) \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell^*$ le caractère associé dans le lemme 1.28. On a $\chi(\mathrm{Frob}_v) = \tilde\chi(S_{(\mathrm{Frob}_v,1)}) = \tilde\chi(T_v) = \hat\chi(\mathcal{O}_X(v))$ où $\hat\chi : \mathrm{Pic}^\Xi(X) \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell^*$ est le caractère induit par $\tilde\chi$. Cela montre la compatibilité locale-globale entre χ et $\hat\chi$.

1.4. Variantes

On décrit ici des variantes triviales des constructions précédentes qui seront utiles dans le cas d'un groupe quelconque.

1.4.1. À plusieurs pattes. — On appelle patte d'un point fonctoriel de Y son image par $\pi : Y \to X \times X$. On dispose de variantes du morphisme $\pi : Y \to X \times X$ où on remplace $X \times X$ par une puissance quelconque de X et où on s'autorise des pondérations pour le morphisme α. Décrivons ces variantes qui ont un nombre quelconque de pattes.

Remarque 1.33. — Dans le cas de la théorie du corps de classe deux pattes suffisent pour définir les opérateurs d'excursion mais quatre pattes sont nécessaires pour montrer la relation de (pseudo-)caractère contenue dans le lemme 1.26. Pour le groupe GL_n deux pattes suffisent encore à définir les opérateurs d'excursion et il faut $2(n+1)$ pattes pour montrer la relation de pseudo-caractère. Pour un groupe quelconque il faudra plus de deux pattes même pour définir les opérateurs d'excursion.

Soit I un ensemble fini et W une représentation algébrique définie sur $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ de $\mathbb{G}_m^I$ qui est triviale sur $\mathbb{G}_m$ plongé diagonalement dans $\mathbb{G}_m^I$. Lorsque W est irréductible on identifie sa classe d'isomorphisme à un élément

$$(w_i)_{i\in I} \in X^*(\mathbb{G}_m^I/\mathbb{G}_m^{\mathrm{diag}}) = \mathrm{Ker}(\mathbb{Z}^I \xrightarrow{\Sigma} \mathbb{Z}) .$$

Définition 1.34. — *Pour toute représentation W de dimension un de $\mathbb{G}_m^I$ sur $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ identifiée à $(w_i)_{i\in I} \in \mathbb{Z}^I$ on définit un schéma de type fini $Y_{I,W} \to \mathrm{Spec}(k)$ muni d'un morphisme $\pi_{I,W} : Y_{I,W} \to X^I$ comme le quotient par Ξ du produit fibré*

$$\begin{tikzcd} Z_{I,W} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Pic}_X \arrow[d, "\lambda"] \\ X^I \arrow[r, "\alpha_{I,W}"] & \mathrm{Pic}_X^0 \end{tikzcd}$$

où $\alpha_{I,W} : X^I \to \mathrm{Pic}_X$ envoie un point fonctoriel $(x_i)_{i\in I} \in X^I(S)$ sur le fibré inversible de degré nul $\mathcal{O}_X(\sum_{i\in I} w_i \cdot x_i) \in \mathrm{Pic}_X^0(S)$.

Ainsi $\pi_{I,W}$ est un morphisme fini étale de groupe de transformation $\mathrm{Pic}^\Xi(X)$. Pour simplifier les notations on omettra parfois la condition que W est triviale sur $\mathbb{G}_m^{\mathrm{diag}}$ et on posera $Y_{I,W} = \emptyset$ si ce n'est pas le cas.

Exemple 1.35. — Lorsque $I = \emptyset$ et W est la représentation triviale de $\mathbb{G}_m^I = \{1\}$ on a $Y_{I,W} = \mathrm{Pic}^\Xi(X)$ vu comme schéma discret de type fini sur $\mathrm{Spec}(k)$.

Lorsque I est quelconque et que W est la représentation triviale de $\mathbb{G}_m^I$ on a $Y_{I,W} = X^I \times \mathrm{Pic}^\Xi(X)$ et $\pi_{I,W}$ est le revêtement trivial de X^I de groupe de transformation $\mathrm{Pic}^\Xi(X)$.

Lorsque I et W sont quelconques, la restriction de $\pi_{I,W}$ à la diagonale de X^I est le revêtement trivial $X^I \times \mathrm{Pic}^\Xi(X) \to X^I$ lorsque W est triviale sur $\mathbb{G}_m^{\mathrm{diag}}$ ou est vide sinon.

Lorsque $I = \{1, 2\}$, $w_1 = 1$ et $w_2 = -1$ on a $Y_{I,W} = Y$ et $\pi_{I,W} = \pi$ où Y et π ont été introduits dans le paragraphe 1.1.

Ces propriétés sont en fait généralisables et peuvent être résumées par la notion de factorisation contenue dans le lemme 1.36, notion introduite par Beilinson et Drinfeld dans le cadre du programme de Langlands géométrique [BD]. Soient I et J deux ensembles finis et $\zeta : I \to J$ une application. Elle induit $\zeta^* : X^J \to X^I$, $(x_j)_{j\in J} \mapsto (x_{\zeta(i)})_{i\in I}$. On a aussi une application $\zeta^* : \pi_1(X, \bar{\eta})^J \to \pi_1(X, \bar{\eta})^I$ qui fournit par composition un foncteur

$$\zeta_* : \mathrm{Rep}(\pi_1(X, \bar{\eta})^I) \longrightarrow \mathrm{Rep}(\pi_1(X, \bar{\eta})^J)$$

entre catégories de représentations continues sur des $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-espaces vectoriels de dimension finie. On a de même une application $\zeta^* : \mathbb{G}_m^J \to \mathbb{G}_m^I$ et donc une application $\zeta_* : X^*(\mathbb{G}_m^I) \to X^*(\mathbb{G}_m^J)$ qui est associée à un foncteur $\zeta_* : \mathrm{Rep}(\mathbb{G}_m^I) \to \mathrm{Rep}(\mathbb{G}_m^J)$ entre catégories de représentations algébriques de dimension finie définies sur $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$. La propriété de factorisation suivante est évidente.

Lemme 1.36. — *Pour tout $\zeta : I \to J$ et tout $W \in X^*(\mathbb{G}_m^I)$ le diagramme suivant est cartésien*

$$\begin{tikzcd} Y_{J,\,\zeta_* W} \arrow[r] \arrow[d, "\pi_{J,\,\zeta_* W}"'] & Y_{I,W} \arrow[d, "\pi_{I,W}"] \\ X^J \arrow[r, "\zeta^*"] & X^I \end{tikzcd}$$

Remarque 1.37. — On dispose en particulier des cas suivants.

1. Lorsque I est quelconque et J est un singleton, $\zeta^* : X \to X^I$ est la diagonale totale et on trouve que $Y_{J,\,\zeta_* W}$ est le revêtement trivial de fibre $\mathrm{Pic}^{\Xi}(X)$ ou est vide.
2. Lorsque I et J sont quelconques et ζ est surjective, $\zeta^* : X^J \to X^I$ est une diagonale partielle et on a généralisé la propriété précédente.
3. Lorsque I et J sont quelconques et ζ est injective, $\zeta^* : X^J \to X^I$ est une projection sur certains facteurs de X^J et on trouve une nouvelle compatibilité de la formation des $Y_{I,W}$, celle à l'oubli de coordonnées.
4. Enfin lorsque $\zeta : I \xrightarrow{\sim} I$ est une bijection, on voit que la formation de $Y_{I,W}$ est invariante par permutation des coordonnées de X^I, à condition de permuter de la même manière les éléments de la source de W.

Considérons maintenant le système local $\mathcal{H}_{I,W} = (\pi_{I,W})_* \bar{\mathbb{Q}}_\ell$ sur X^I pour tout $W \in X^*(\mathbb{G}_m^I)$. L'association $W \mapsto \mathcal{H}_{I,W}$ se prolonge par semi-simplicité en un foncteur $\mathrm{Rep}(\mathbb{G}_m^I) \to \mathrm{SysLoc}(X^I)$, $W \mapsto \mathcal{H}_{I,W}$ vers la catégorie des $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-systèmes locaux constructibles sur X^I.

Remarque 1.38. — Lorsque $I = \{1, 2\}$, St est la représentation standard de dimension un de $\mathbb{G}_m$ sur $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ et St^* sa duale, si on pose $W = \mathrm{St} \boxtimes \mathrm{St}^*$ qui est une représentation de $\mathbb{G}_m^2/\mathbb{G}_m^{\mathrm{diag}}$ on a un isomorphisme canonique de $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-systèmes locaux entre $\mathcal{H}_{I,W}$ et $\pi_*(\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ défini dans la section précédente. Cela fait suite à l'exemple 1.35.

Soit I et J deux ensembles finis, $\zeta : I \to J$ une application et $W \in \mathrm{Rep}(\mathbb{G}_m^I)$. Rappelons qu'on a une application $\zeta^* : X^J \to X^I$ et un foncteur $\zeta_* : \mathrm{Rep}(\mathbb{G}_m^I) \to \mathrm{Rep}(\mathbb{G}_m^J)$. Pour rendre les notations cohérentes, on posera $\zeta_* = (\zeta^*)^* : \mathrm{SysLoc}(X^I) \to \mathrm{SysLoc}(X^J)$ le foncteur d'image inverse par ζ^* des systèmes locaux.

Lemme 1.39. — *On dispose d'un isomorphisme canonique $\zeta_* \mathcal{H}_{I,W} = \mathcal{H}_{J,\zeta_* W}$ entre systèmes locaux sur X^J. Lorsque W varie cet isomorphisme induit un isomorphisme de foncteur $\zeta_* \mathcal{H}_{I,\bullet} = \mathcal{H}_{J,\,\zeta_* \bullet}$ entre foncteurs $\mathrm{Rep}(\mathbb{G}_m^I) \to \mathrm{SysLoc}(X^J)$.*

Preuve — C'est le théorème de changement de base propre pour les morphismes $\pi_{I,W}$ et $\pi_{J,\,\zeta_* W}$ tenant compte du lemme 1.36.

Notons $\Delta : X \to X^I$ la diagonale totale et $H_{I,W} = \mathcal{H}_{I,W}|_{\Delta(\bar{\eta})}$ qui est une représentation de $\pi_1(X^I, \Delta(\bar{\eta}))$. Le lemme de Drinfeld 1.18 permet comme dans le paragraphe 1.3.2 d'étendre canoniquement cette action en une action de $\pi_1(X, \bar{\eta})^I$ via le morphisme $\pi_1(X^I, \Delta(\bar\eta)) \to \pi_1(X, \bar\eta)^I$, puisque $\mathcal{H}_{I,W}$ a une $\bar{\mathbb{Z}}_\ell$-structure canonique donnée par la cohomologie à valeur dans $\bar{\mathbb{Z}}_\ell$. On dispose donc d'un foncteur canonique

$$H_{I,\bullet} : \mathrm{Rep}(\mathbb{G}_m^I) \longrightarrow \mathrm{Rep}(\pi_1(X, \bar\eta)^I)\,.$$

Pour toute application $\zeta : I \to J$ entre ensembles finis on dispose d'un isomorphisme canonique « de factorisation » $\zeta_* H_{I,\bullet} = H_{J,\zeta_*\bullet}$ entre foncteurs $\mathrm{Rep}(\mathbb{G}_m^I) \to \mathrm{Rep}(\pi_1(X, \bar\eta)^J)$. On a enfin un isomorphisme canonique $H_{\emptyset,\mathbf{1}} = \bar{\mathbb{Q}}_\ell[\mathrm{Pic}^\Xi(X)]$.

Remarque 1.40. — Cette remarque suppose connue la théorie du corps de classe. Elle ne servira pas dans le reste de l'article mais elle éclaire d'une autre manière les propriétés précédentes. Supposons que $W \in \mathrm{Rep}(\mathbb{G}_m^I/\mathbb{G}_m^{\mathrm{diag}})$ est irréductible correspondant à $(w_i)_{i\in I} \in X^*(\mathbb{G}_m^I/\mathbb{G}_m^{\mathrm{diag}})$. On a alors des isomorphismes de systèmes locaux sur X^I et de représentations de $\pi_1(X, \bar\eta)^I$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{I,W} &= \bigoplus_{\chi:\mathrm{Pic}^\Xi(X)\to\bar{\mathbb{Q}}_\ell^*} \boxtimes_{i\in I}\, \mathcal{F}_\chi^{\otimes\, w_i} \\ H_{I,W} &= \bigoplus_{\chi:\mathrm{Pic}^\Xi(X)\to\bar{\mathbb{Q}}_\ell^*} \boxtimes_{i\in I}\, (\mathcal{F}_\chi|_{\bar\eta})^{\otimes\, w_i} \end{aligned}$$

où l'on a repris les notations du lemme 1.9.

On peut alors construire des opérateurs d'excursion à plusieurs pattes. Soit I un ensemble fini, $W \in \mathrm{Rep}(\mathbb{G}_m^I)$, $x : \mathbf{1} \to W$ et $\varphi : W \to \mathbf{1}$ des morphismes de $\mathbb{G}_m$-représentations où $\mathbb{G}_m$ est plongé diagonalement dans $\mathbb{G}_m^I$ et $\gamma = (\gamma_i)_{i\in I} \in \pi_1(X, \bar\eta)^I$. On peut voir x comme un vecteur de W invariant par action diagonale de $\mathbb{G}_m$ et $\varphi \in W^*$ comme une forme linéaire invariante par action diagonale de $\mathbb{G}_m$.

Définition 1.41. — *L'endomorphisme $S_{I,x,\varphi,\gamma}$ de $\bar{\mathbb{Q}}_\ell[\mathrm{Pic}^\Xi(X)]$ est défini par la suite de composées suivante dans laquelle on note $\{1\}$ un singleton et W^{diag} la représentation de $\mathbb{G}_m$ sur W obtenu par le plongement diagonal $\mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m^I$*

$$\begin{tikzcd} \bar{\mathbb{Q}}_\ell[\mathrm{Pic}^\Xi(X)] = H_{\emptyset,\mathbf{1}} = H_{\{1\},\mathbf{1}} \arrow[r, "H(x)"] \arrow[d, "S_{I,x,\varphi,\gamma}"] & H_{\{1\},W^{\mathrm{diag}}} = H_{I,W} \arrow[d, "\gamma"] \\ \bar{\mathbb{Q}}_\ell[\mathrm{Pic}^\Xi(X)] = H_{\emptyset,\mathbf{1}} = H_{\{1\},\mathbf{1}} & H_{\{1\},W^{\mathrm{diag}}} = H_{I,W} \arrow[l, "H(\varphi)"] \end{tikzcd}$$

Remarque 1.42. — On a utilisé seulement deux ingrédients pour définir les opérateurs d'excursion : les propriétés de factorisations qui relient les cohomologies $H_{\emptyset,\mathbf{1}}$, $H_{\{1\},\mathbf{1}}$ et $H_{I,W}$ de schémas *a priori* différents définis sur des puissances différentes de X (on a utilisé les applications canoniques $\emptyset \to \{1\} \leftarrow I$) et le lemme de Drinfeld 1.18 qui permet d'étendre canoniquement l'action de $\pi_1(X^I, \Delta(\bar\eta))$ sur $H_{I,W}$ en une action de $\pi_1(X, \bar\eta)^I$.

Lemme 1.43. — [L2, lem.10.5] *L'endomorphisme $S_{I,x,\varphi,\gamma}$ ne dépend que de la fonction $f \in \mathcal{O}(\mathbb{G}_m^I/\mathbb{G}_m^{\mathrm{diag}})$ qui envoie $g \in \mathbb{G}_m^I$ sur $\varphi(g \cdot x)$.*

Inversement il est facile de vérifier que toute fonction $f \in \mathcal{O}(\mathbb{G}_m^I/\mathbb{G}_m^{\mathrm{diag}})$ est de la forme $g \mapsto \varphi(g \cdot x)$ pour W une représentation de $\mathbb{G}_m^I/\mathbb{G}_m^{\mathrm{diag}}$ et $x : \mathbf{1} \to W$ et $\varphi : W \to \mathbf{1}$ des morphismes de $\mathbb{G}_m$-représentations. On note donc pour simplifier $S_{I,f,\gamma} = S_{I,x,\varphi,\gamma}$.

Remarque 1.44. — Lorsque $I = \{1,2\}$, que $W = \mathrm{St} \boxtimes \mathrm{St}^*$ comme dans la remarque 1.38, que

$$x : \mathbf{1} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Res}_{\mathbb{G}_m^2}^{\mathbb{G}_m}(W)$$

est l'isomorphisme canonique de $\mathbb{G}_m$-représentations, φ son inverse et que $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in \pi_1(X, \bar{\eta})^2$, l'opérateur $S_{I,x,\varphi,\gamma}$ coïncide avec S_γ défini dans le paragraphe 1.3.3. Dans ce cas la fonction $f \in \mathcal{O}(\mathbb{G}_m^2/\mathbb{G}_m^{\mathrm{diag}})$ envoie (a,b) sur $a \cdot b^{-1}$.

On rappelle que toute application $\zeta : I \to J$ entre ensembles finis induit des morphismes $\zeta^* : \pi_1(X,\bar{\eta})^J \to \pi_1(X,\bar{\eta})^I$ et $\zeta^* : \mathbb{G}_m^J/\mathbb{G}_m^{\mathrm{diag}} \to \mathbb{G}_m^I/\mathbb{G}_m^{\mathrm{diag}}$. Le lemme suivant résulte formellement des définitions. Le lecteur consultera [L2, prop.10.7] pour la démonstration dans le cas général qui n'apporte pas de complication.

LEMME 1.45. — *Les points suivants sont vérifiés.*

1. *Pour tout* $\gamma \in \pi_1(X,\bar{\eta})^I$*, l'application* $\mathcal{O}(\mathbb{G}_m^I/\mathbb{G}_m^{\mathrm{diag}}) \to \mathrm{End}_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell}(\bar{\mathbb{Q}}_\ell[\mathrm{Pic}^\Xi(X)])$ *qui envoie* f *sur* $S_{I,f,\gamma}$ *est un morphisme d'algèbres.*
2. *Pour tous* $\zeta : I \to J$, $f \in \mathcal{O}(\mathbb{G}_m^I/\mathbb{G}_m^{\mathrm{diag}})$ *et* $\gamma \in \pi_1(X,\bar{\eta})^J$ *on a* $S_{J,\, f\circ\zeta^*,\gamma} = S_{I,f,\,\zeta^*(\gamma)}$.
3. *Pour tous* I, I', $f \in \mathcal{O}(\mathbb{G}_m^I/\mathbb{G}_m^{\mathrm{diag}})$, $f' \in \mathcal{O}(\mathbb{G}_m^{I'}/\mathbb{G}_m^{\mathrm{diag}})$, $\gamma \in \pi_1(X,\bar{\eta})^I$ *et* $\gamma' \in \pi_1(X,\bar{\eta})^{I'}$ *on a* $S_{I,f,\gamma} \circ S_{I',f',\gamma'} = S_{I\sqcup I',\, f\times f',\, \gamma\times\gamma'}$.
4. *Pour tous* $f \in \mathcal{O}(\mathbb{G}_m^I/\mathbb{G}_m^{\mathrm{diag}})$ *et* $\gamma, \gamma' \in \pi_1(X,\bar{\eta})^I$ *on a* $S_{I\sqcup I,\tilde{f},\gamma\times\gamma'} = S_{I,f,\gamma\cdot\gamma'}$ *où on a noté* $\tilde{f}(g,g') = f(g \cdot g')$.
5. *Pour tout* $f \in \mathcal{O}(\mathbb{G}_m^I/\mathbb{G}_m^{\mathrm{diag}})$*, l'application* $\pi_1(X,\bar{\eta})^I \to \mathrm{End}_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell}(\bar{\mathbb{Q}}_\ell[\mathrm{Pic}^\Xi(X)])$, $\gamma \mapsto S_{I,f,\gamma}$ *est continue.*

Remarque 1.46. — Détaillons comment utiliser les propriétés précédentes. On voit que $\mathcal{B}$ est commutative grâce au point 3 puis au point 2 appliqué à la bijection évidente $\zeta : I \sqcup I' \xrightarrow{\sim} I' \sqcup I$. On voit que $S_{I,f,\tau\cdot\gamma\cdot\tau^{-1}} = S_{I,f,\gamma}$ pour tous I, f, γ, τ en appliquant deux fois le point 4 puis en appliquant le point 2 à l'application $\zeta : I \sqcup I \sqcup I \to I$ qui sélectionne les éléments du deuxième facteur I.

Lorsque $I = \{1,2\}$, $f(g_1, g_2) = g_1 \cdot g_2^{-1}$ et γ et $\gamma' \in \pi_1(X,\bar{\eta})^2$ on voit que $S_{I,f,\gamma\cdot\gamma'} = S_{I,f,\gamma} \circ S_{I,f,\gamma'}$ qui est la relation de (pseudo-)caractère pour le groupe $\mathbb{G}_m$. On applique en effet le point 4, on remarque que dans ce cas $\tilde{f}(g,g') = f(g) \cdot f(g')$ pour g et $g' \in \mathbb{G}_m^I$ et on obtient d'après le point 1 que $S_{I\sqcup I,\tilde{f},\gamma\times\gamma'} = S_{I\sqcup I,f_1,\gamma\times\gamma'} \circ S_{I\sqcup I,f_2,\gamma\times\gamma'}$ où on a noté $f_1(g,g') = f(g)$ et $f_2(g,g') = f(g')$ pour g et $g' \in \mathbb{G}_m^I$. On applique ensuite le point 2 aux projections sur les deux facteurs $\zeta : I \sqcup I \to I$. La même preuve marche pour tout I lorsque f est proportionnelle à un caractère de $\mathbb{G}_m^I$.

1.4.2. Ramification. — Soit $N \hookrightarrow X$ un diviseur de X. On peut introduire des jacobiennes avec niveau $\mathrm{Pic}_{X,N} \to \mathrm{Spec}(k)$ qui classifient des fibrés inversibles trivialisés en N comme dans [S]. On dispose toujours d'une isogénie de Lang et d'un morphisme d'Abel-Jacobi $\alpha : (X - N) \times (X - N) \to \mathrm{Pic}_{X,N}$. On peut donc refaire toute la théorie précédente dans ce cadre et définir des schémas $Z_N \to (X - N) \times (X - N)$ et $\pi_N : Y_N \to (X - N) \times (X - N)$, un faisceau $(\pi_N)_* \bar{\mathbb{Q}}_\ell$ et des opérateurs d'excursion agissant sur $\bar{\mathbb{Q}}_\ell[\mathrm{Pic}_{X,N}(k)/\Xi]$. De même pour tous I, W.

Remarque 1.47. — La théorie du corps de classe en niveau N est plus subtile à énoncer que la théorie partout non ramifiée ou modérément ramifiée. En effet, il faut incorporer dans l'énoncé le changement de numérotation inférieure-supérieure des groupes de ramification. On pourrait s'attendre à ce que cela rende une démonstration géométrique beaucoup plus compliquée avec niveau, car il faudrait déjà interpréter géométriquement ce changement de numérotation.

Cela est vrai dans le sens « Galois vers automorphe » qui ne nous concerne pas, mais pas dans le sens « automorphe vers Galois » que nous traitons ici. En effet il existe bien une surjection $\pi_1(X - N, \bar{\eta})^{\mathrm{ab}} \to \mathrm{Pic}^{\Xi}_{X,N}(k)$ pour tout diviseur effectif N de X, où $\pi_1(X - N, \bar{\eta})^{\mathrm{ab}}$ ne dépend que du support de N alors que $\mathrm{Pic}^{\Xi}_{X,N}(k)$ dépend des multiplicités des points fermés dans N. Cette surjection permet d'associer un caractère galoisien à tout caractère de $\mathrm{Pic}^{\Xi}_{X,N}(k)$. La réciproque n'est pas possible sans changer les multiplicités apparaissant dans N *via* la règle fournie par la fonction de Herbrand.

1.4.3. Version champêtre. — On aurait pu remplacer le schéma $\mathrm{Pic}_X \to \mathrm{Spec}(k)$ par le champ d'Artin $\mathrm{PIC}_X \to \mathrm{Spec}(k)$ qui classifie les fibrés inversibles et dont Pic_X est l'espace de modules grossier. On dispose toujours dans ce contexte d'un morphisme d'Abel-Jacobi $\alpha : X \times X \to \mathrm{PIC}_X$ et d'une isogénie de Lang $\lambda : \mathrm{PIC}_X \to \mathrm{PIC}_X$ qui est composée d'un morphisme représentable et de la gerbe neutre $B(k^*)$. On aurait alors pu définir un champ Z^{chp} par produit 2-cartésien

$$\begin{tikzcd} Z^{\mathrm{chp}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{PIC}_X \arrow[d, "\lambda"] \\ X \times X \arrow[r, "\alpha"] & \mathrm{PIC}_X \end{tikzcd}$$

et poser ensuite $Y^{\mathrm{chp}} = Z^{\mathrm{chp}}/\Xi$ où le quotient est sans subtilité car Ξ agit librement. La différence entre Y^{chp} et Y est qu'on paramètre un isomorphisme

$$\phi : {}^{\tau}\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{-1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X \times S}(x - y)$$

au lieu de demander qu'il existe. On obtient alors $\pi^{\mathrm{chp}} : Y^{\mathrm{chp}} \to X \times X$ qui n'est pas représentable car ses fibres contiennent la gerbe $B(k^*)$. Par contre le champ Y^{chp} est bien de Deligne-Mumford de type fini sur $\mathrm{Spec}(k)$ et d'espace de modules grossier Y. Il est alors tautologique que $\pi^{\mathrm{chp}}_* \bar{\mathbb{Q}}_\ell = \pi_* \bar{\mathbb{Q}}_\ell$. On peut donc refaire la théorie précédente en se servant de champs de Deligne-Mumford sans rien y changer. De même pour tous I et W.

Remarque 1.48. — On peut aussi considérer des variantes à la fois champêtres et avec niveau en un diviseur $N \hookrightarrow X$. Il résulte toutefois des définitions que Y_N^{chp} est un schéma dès que N est non trivial. On a donc $Y_N^{\text{chp}} = Y_N$ dans ce cas. De même pour tous I et W.

2. CAS GÉNÉRAL

Il est temps de traiter le cas d'un groupe réductif connexe G quelconque. Nous supposerons pour simplifier que $G \to \operatorname{Spec}(k)$ est déployé. Voir [L2, ch.12] pour le cas général où $G \to \operatorname{Spec}(K_X)$ est réductif connexe.

2.1. Chtoucas

La première chose est de trouver un objet géométrique étendant $\pi : Y \to X \times X$ ou plus généralement $\pi_{I,W} : Y_{I,W} \to X^I$ dans le cas où $G = \mathbb{G}_m$. Cet objet sera un champ classifiant des G-chtoucas. Les G-chtoucas ont été définis par Drinfeld lorsque $G = \mathrm{GL}_n$ ([D1] et [D2]) et Varshavsky dans le cas général [V].

Rappelons que lorsque $G = \mathbb{G}_m$ le champ Y^{chp} a comme valeurs sur un schéma $S \to \operatorname{Spec}(k)$ le groupoïde des familles $(x, y, \mathcal{L}, \phi)$ où $x, y \in X(S)$, où $\mathcal{L}$ est un fibré inversible sur $X \times S$ identifié au $\mathbb{G}_m$-torseur $\underline{Isom}(\mathcal{O}_{X\times S}, \mathcal{L})$ et où $\phi : {}^\tau\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{-1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X\times S}(x-y)$ est un isomorphisme de fibrés inversibles. L'opération $\mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}^{-1}$ n'ayant pas de sens pour les fibrés vectoriels de rang supérieur ou pour les torseurs sous un groupe non abélien, on voit désormais ϕ comme un isomorphisme ${}^\tau\mathcal{L} \to \mathcal{L}(x-y)$. On tombe alors tout de suite sur la définition d'un G-chtouca.

Soit $G \to \operatorname{Spec}(k)$ un groupe réductif connexe déployé muni d'un tore maximal déployé T contenu dans un sous-groupe de Borel fixé. Notons $\hat{G}$ le groupe réductif déployé sur $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ dual de Langlands de G. Il est muni d'un tore maximal $\hat{T}$ dual de T et d'un épinglage. Notons $Z(\hat{G})$ le centre de $\hat{G}$. Soit I un ensemble fini. On plonge alors $Z(\hat{G})$ diagonalement dans $\hat{G}^I$. Soit $W = \boxtimes_{i\in I} W_i$ une représentation algébrique irréductible de $\hat{G}^I/Z(\hat{G})$ de plus haut poids $w = (w_i)_{i\in I} \in X^*(\hat{T}^I/Z(\hat{G}))$. On voit aussi w_i comme un copoids dominant de G pour tout $i \in I$.

Définition 2.1. — *Soit $S \to \operatorname{Spec}(k)$ un schéma. Un G-chtouca sur S relatif à (I, W) est la donnée d'un G-torseur E sur $X \times S$, de points $(x_i)_{i\in I} \in X(S)^I$ appelés pattes et d'un isomorphisme de G-torseurs $\phi : {}^\tau E|_{X\times S\setminus\cup_i\Gamma_{x_i}} \xrightarrow{\sim} E|_{X\times S\setminus\cup_i\Gamma_{x_i}}$ dont l'ordre des zéros et des pôles en chacun des x_i est borné par w_i.*

Soit $N \hookrightarrow X$ un diviseur. Supposons que $x_i \in X - N$ pour tout $i \in I$. Une structure de niveau N sur un G-chtouca de type (I, W) est une trivialisation du G-torseur $E|_{N\times S}$ compatible avec ϕ [L2, déf.2.1].

Quelques précisions s'imposent sur cette définition. On a noté ${}^\tau E = (\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_S)^* E$. On a noté $\Gamma_{x_i} \hookrightarrow X \times S$ le graphe de $x_i : S \to X$.

Pour définir la condition sur l'ordre des zéros et de pôles de ϕ on commence par le cas où $G = \mathrm{GL}_n$, où N est quelconque et où $(x_i)_{i\in I}$ est dans l'ouvert U de $(X-N)^I$ sur lequel les coordonnées sont deux à deux distinctes. Dans ce cas E est associé à un fibré vectoriel $\mathcal{E} \to X \times S$ de rang n et ϕ peut être vu comme un isomorphisme de fibrés vectoriels $\tilde{\phi} : {}^{\tau}\mathcal{E}|_{X\times S\setminus\cup_i\Gamma_{x_i}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}|_{X\times S\setminus\cup_i\Gamma_{x_i}}$. Pour tout $i \in I$, le théorème des diviseurs élémentaires permet alors de classifier les modifications de fibrés vectoriels sur $X \times S$ qui sont des isomorphismes hors de Γ_{x_i} par un poids dominant $\mu_i \in X^*(\hat{T}) = X_*(T)$. On a ici utilisé le tore standard T de $G = \mathrm{GL}_n$ et on a identifié $\hat{G}$ à GL_n. La condition sur ϕ est alors que μ_i soit inférieur à w_i pour l'ordre de Bruhat pour tout $i \in I$. On obtient un champ de Deligne-Mumford $\mathrm{CHT}_{I,W}|_U \to U$ classifiant les GL_n-chtoucas de type (I, W) avec niveau N et pattes dans U (pour simplifier on omet G et N des notations). On impose à $\mathrm{CHT}_{I,W}|_U$ d'être réduit.

Dans le cas où $G = \mathrm{GL}_n$ et les x_i sont quelconques, on définit la condition sur l'ordre des zéros et des pôles par adhérence schématique : on introduit l'ind-champ de Deligne-Mumford réduit $\mathrm{CHT}_I \to (X-N)^I$ qui classifie les G-chtoucas avec niveau N sans condition sur l'ordre des zéros et des pôles. On note ensuite $\mathrm{CHT}_{I,W} \to (X-N)^I$ l'adhérence schématique de $\mathrm{CHT}_{I,W}|_U$ dans CHT_I. Les G-chtoucas de type (I, W) sur S sont alors par définition les objets de $\mathrm{CHT}_{I,W}(S)$.

Dans le cas où G est quelconque et $(x_i)_{i\in I} \in U$, on utilise les représentations irréductibles et le cas de GL_n pour définir la condition sur l'ordre des zéros et des pôles de ϕ [L2, déf.1.2.(iii)]. Pour étendre de U à $(X-N)^I$ on procède comme avant par adhérence de Zariski. On obtient un champ de Deligne-Mumford réduit $\mathrm{CHT}_{I,W} \to (X-N)^I$ et un ind-champ de Deligne-Mumford réduit $\mathrm{CHT}_I \to (X-N)^I$.

Réintroduisons un instant le niveau N dans les notations des champs de modules. Le morphisme d'oubli du niveau $\mathrm{CHT}_{I,W,N} \to \mathrm{CHT}_{I,W,\emptyset}|_{(X-N)^I}$ est fini étale galoisien sous le groupe $G(\mathcal{O}_N)$.

Remarque 2.2. — Rappelons que tout morphisme entre G-torseurs commute à G qui agit simplement transitivement, donc est un isomorphisme. Quand on parle de zéros et de pôles en x d'un morphisme entre G-torseurs sur $X - \{x\}$, il s'agit d'une terminologie morale qui évoque les zéros et pôles en x d'un isomorphisme sur $X - \{x\}$ entre fibrés vectoriels associés à un isomorphisme entre torseurs sur $X - \{x\}$ lorsque $G = \mathrm{GL}_n$.

Remarque 2.3. — La condition que W soit trivial sur $Z(\hat{G})$ est nécessaire pour qu'il existe des G-chtoucas de type (I, W). Nous avons déjà rencontré cette condition lorsque $G = \mathbb{G}_m$.

Notons Z le centre de G. On peut tordre un G-torseur par un Z-torseur, ce qui définit une action de $Z(K_X)\backslash Z(\mathbb{A}_X)$ sur $\mathrm{CHT}_{I,W}$. Fixons un réseau $\Xi \subset Z(K_X)\backslash Z(\mathbb{A}_X)$ assez petit pour que cette action soit libre. Nous noterons

$$\pi_{I,W} \ : \ \mathrm{Cht}_{I,W} \to (X-N)^I$$

le quotient de $\mathrm{CHT}_{I,W}$ par Ξ. On note Cht_I l'ind-champ quotient de CHT_I par Ξ. Lorsque $W \in \mathrm{Rep}(\hat{G}^I)$ est quelconque, on définit $\mathrm{Cht}_{I,W}$ comme l'union dans Cht_I des $\mathrm{Cht}_{I,W'}$ où $W' \subset W$ parcourt les facteurs irréductibles.

Le champ $\mathrm{Cht}_{I,W}$ est un champ de Deligne-Mumford localement de type fini sur $\mathrm{Spec}(k)$ mais contrairement au cas où $G = \mathbb{G}_m$, il n'est pas de type fini. Cela sera à l'origine de difficultés techniques qui conduiront à introduire la partie Hecke-finie de la cohomologie.

Remarque 2.4. — Soit μ un copoids dominant du groupe adjoint G^{ad} de G. On peut définir un ouvert

$$\mathrm{Cht}_{I,W}^{\leq\mu} \hookrightarrow \mathrm{Cht}_{I,W}$$

en bornant par μ le polygone de Harder-Narasimhan du G^{ad}-torseur associé à E. Le champ de Deligne-Mumford $\mathrm{Cht}_{I,W}^{\leq\mu}$ est alors de type fini sur $\mathrm{Spec}(k)$. On peut de plus montrer que c'est un schéma lorsque le degré de N est assez grand devant μ. Notons

$$\pi_{I,W}^{\leq\mu} \;:\; \mathrm{Cht}_{I,W}^{\leq\mu} \;\to\; (X-N)^I$$

la projection qui est de type fini. Pour tout complexe $\mathcal{F}$ de faisceaux ℓ-adiques sur $\mathrm{Cht}_{I,W}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on définira la cohomologie relative à support compact $\mathrm{R}^n\pi_!(\mathcal{F})$ comme la limite inductive des cohomologies à support compact des troncations par le polygone de Harder-Narasimhan

$$\mathrm{R}^n(\pi_{I,W})_!(\mathcal{F}) \;=\; \varinjlim_{\mu} \mathrm{R}^n\left(\pi_{I,W}^{\leq\mu}\right)_!\left(\mathcal{F}|_{\mathrm{Cht}_{I,W}^{\leq\mu}}\right)$$

C'est donc une limite inductive de faisceaux constructibles ℓ-adiques sur $(X-N)^I$.

Remarque 2.5. — Lorsque $N = \emptyset$, $I = \emptyset$ et $W = \mathbf{1}$ un G-chtouca de type (I,W) est un G-torseur E sur $X \times S$ muni d'un isomorphisme $\phi : {}^{\tau}E \xrightarrow{\sim} E$. Cela implique que E est image inverse d'un G-torseur sur X lorsque S est connexe. Ainsi dans ce cas le champ des chtoucas est discret associé au groupoïde des k-points du champ des G-torseurs sur X. D'après une célèbre formule de Weil et les travaux de Kottwitz et Thang (voir [L2, rem.8.11]), cet ensemble est égal au groupoïde quotient

$$[G(K_X) \setminus G(\mathbb{A}_X) \,/\, \Xi \cdot \prod_{v\in|X|} G(O_v)]\,.$$

La $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-cohomologie à support compact de ce champ est concentrée en degré nul et est égale à l'ensemble des fonctions localement constantes à support compact

$$\mathcal{C}_c \;=\; \mathcal{C}_c(G(K_X) \setminus G(\mathbb{A}_X) \,/\, \Xi \cdot \prod_{v\in|X|} G(O_v)\;,\;\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$$

qui n'est pas de dimension finie. Néanmoins d'après [H] les formes cuspidales forment un sous-espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{C}_{\mathrm{cusp}} \subset \mathcal{C}_c$.

Dans le cas où $N \neq \emptyset$ mais on a toujours $I = \emptyset$ et $W = \mathbf{1}$, la discussion précédente reste valable en remplaçant $\prod_{v\in|X|} G(O_v)$ par le sous-groupe K_N défini dans l'introduction.

Une autre grosse différence avec le cas $G = \mathbb{G}_m$ est que le morphisme $\pi_{I,W}$ n'est pas lisse en général alors qu'il était fini étale dans le cas où $G = \mathbb{G}_m$. Il est donc légitime d'introduire son $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-complexe d'intersection $\mathcal{I}_{I,W}$ normalisé de telle manière que $R^0(\pi_{I,W})_!(\mathcal{I}_{I,W})$ soit la cohomologie à support compact « en dimension moitié » du complexe d'intersection des fibres.

Remarque 2.6. — Ce qui motive l'introduction des faisceaux pervers $\mathcal{I}_{I,W}$ n'est pas la pureté : en effet la méthode de Vincent Lafforgue s'applique aussi au cas des $\bar{\mathbb{F}}_\ell$-coefficients et de toute manière le morphisme $\pi_{I,W}$ n'est pas propre. La raison est que les faisceaux pervers interviennent naturellement dans l'équivalence de Satake géométrique.

2.2. Grassmanniennes affines

Définissons les grassmanniennes affines de Beilinson-Drinfeld, qui vont fournir des modèles locaux des champs de chtoucas. On prend toujours I un ensemble fini et $W = \boxtimes_{i\in I} W_i$ une représentation algébrique irréductible de $\hat{G}^I$ de plus haut poids $w = (w_i)_{i\in I} \in X^*(\hat{T}^I)$. Le niveau N ne joue aucun rôle dans cette définition.

Définition 2.7. — *Le schéma de type fini* $\mathrm{Gr}_{I,W} \to X^I$ *a pour valeurs sur tout schéma* S *sur* $\mathrm{Spec}(k)$ *l'ensemble des familles* $((x_i)_{i\in I}, E, \phi)$ *où* $(x_i)_{i\in I} \in X(S)^I$, *où* E *est un* G*-torseur sur* $X \times S$ *et où*

$$\phi : G_{X\times S\setminus\cup_{i\in I}\Gamma_{x_i}} \xrightarrow{\sim} E|_{X\times S\setminus\cup_{i\in I}\Gamma_{x_i}}$$

est une trivialisation de E *hors du graphe des* x_i *dont les zéros et pôles en* x_i *sont bornés par* w_i *pour l'ordre de Bruhat pour tout* $i \in I$. *On impose de plus que* $\mathrm{Gr}_{I,W}$ *soit réduit.*

Notons $V \subset X^I$ l'ouvert sur lequel les coordonnées sont deux à deux distinctes. Dans la définition précédente on commence en fait par définir $\mathrm{Gr}_{I,W}|_V \to V$ où la condition sur l'ordre des zéros et des pôles est celle explicite donnée dans la définition. On note ensuite $\mathrm{Gr}_I \to X^I$ l'ind-schéma réduit paramétrant les familles $((x_i)_{i\in I}, E, \phi)$ comme dans la définition mais sans condition sur l'ordre des zéros et des pôles. On note enfin $\mathrm{Gr}_{I,W} \to X^I$ l'adhérence schématique de $\mathrm{Gr}_{I,W}|_V$ dans Gr_I. Lorsque $W \in \mathrm{Rep}(\hat{G}^I)$ est quelconque, on définit $\mathrm{Gr}_{I,W}$ comme l'union dans Gr_I des $\mathrm{Gr}_{I,W'}$ où $W' \subset W$ parcourt les facteurs irréductibles.

Lemme 2.8. — *Soient* I *et* J *deux ensembles finis et* $\zeta : I \to J$ *une application. Soient* $\zeta_* : \mathrm{Rep}(\hat{G}^I) \to \mathrm{Rep}(\hat{G}^J)$ *le foncteur associé entre catégories de représentations algébriques de dimension finie et* $\zeta^* : X^J \to X^I$ *le morphisme induit. Pour tout* $W \in \mathrm{Rep}(\hat{G}^I)$ *on a un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{Gr}_{I,W} \times_{X^I} X^J = \mathrm{Gr}_{J,\zeta_* W}$$

On en déduit un isomorphisme $\mathrm{Gr}_J = \mathrm{Gr}_I \times_{X^I} X^J$ entre ind-schémas réduits donc un morphisme $\zeta^* : \mathrm{Gr}_J \to \mathrm{Gr}_I$ et un foncteur d'image inverse $\zeta_* = (\zeta^*)^* : D_c^b(\mathrm{Gr}_I) \to D_c^b(\mathrm{Gr}_J)$ où on a désigné par D_c^b la catégorie dérivée bornée des faisceaux $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-adiques constructibles. On notera $\mathrm{Perv}(\mathrm{Gr}_I)$ la catégorie des $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux pervers supportés sur une sous-variété de type fini de Gr_I et normalisés relativement à X^I.

Le théorème suivant résulte de l'équivalence de Satake géométrique due à Lusztig, Drinfeld, Ginzburg et Mirkovic-Vilonen [MV] et de sa définition par fusion. Il permet d'associer fonctoriellement des faisceaux pervers à des représentations et fournit une propriété de factorisation pour ces faisceaux.

Théorème 2.9 (Mirkovic-Vilonen). — *Soit I un ensemble fini. Il existe un foncteur canonique $\mathrm{Rep}(\hat{G}^I) \to \mathrm{Perv}(\mathrm{Gr}_I)$ noté $W \mapsto \mathcal{J}_{I,W}$. Pour tout $\zeta : I \to J$ on dispose d'un isomorphisme canonique $\mathcal{J}_{J,\zeta_*\bullet} = \zeta_*\mathcal{J}_{I,\bullet}$ entre foncteurs $\mathrm{Rep}(\hat{G}^I) \to \mathrm{Perv}(\mathrm{Gr}_J)$. Lorsque $W \in \mathrm{Rep}(\hat{G}^I)$ est irréductible, $\mathcal{J}_{I,W}$ est isomorphe au complexe d'intersection de $\mathrm{Gr}_{I,W}$ normalisé relativement à X^I.*

Remarque 2.10. — Lorsque $J = \{1\}$ l'application $\zeta^* = \Delta : X \to X^I$ est la diagonale. Si $W = \boxtimes_{i\in I} W_i$ avec $W_i \in \mathrm{Rep}(\hat{G})$ pour tout $i \in I$ on obtient $\Delta^*\mathcal{J}_{I,\boxtimes_i W_i} = \mathcal{J}_{\{1\},\otimes_i W_i}$.

2.2.1. Théorie du modèle local. — Cette théorie est analogue à celle de De Jong, Rapoport et Zink pour les variétés de Shimura de niveau parahorique [L2, prop.2.8]. La différence est que les singularités des champs de chtoucas au dessus de $(X-N)^I$ ne proviennent pas du niveau, qui est en N, mais de la possibilité que $\mathrm{Card}(I) > 1$ et que W ne soit pas minuscule. On montre que $\mathrm{Cht}_{I,W}$ et $\mathrm{Gr}_{I,W}$ sont localement isomorphes pour la topologie étale. On aura en fait besoin de l'énoncé plus canonique suivant.

Proposition 2.11. — *On possède pour tous I et $W \in \mathrm{Rep}(\hat{G}^I/Z(\hat{G}))$ irréductible un champ d'Artin $\mathrm{M}^{\mathrm{loc}}_{I,W} \to (X-N)^I$ et un diagramme de champs sur $(X-N)^I$*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Cht}_{I,W} \arrow[dr] & & \mathrm{Gr}_{I,W} \times_{X^I} (X-N)^I \arrow[dl] \\ & \mathrm{M}^{\mathrm{loc}}_{I,W} & \end{tikzcd}$$

où les morphismes sont lisses de même dimension relative. De plus on possède un faisceau pervers $\mathcal{K}_{I,W}$ sur $\mathrm{M}^{\mathrm{loc}}_{I,W}$ normalisé relativement à $(X-N)^I$ et fonctoriel en W qui descend $\mathcal{J}_{I,W}$.

Cette proposition permet de définir par image inverse un foncteur $\mathrm{Rep}(\hat{G}^I) \to \mathrm{Perv}(\mathrm{Cht}_I)$, $W \mapsto \mathcal{I}_{I,W}$. Lorsque W est irréductible, $\mathcal{I}_{I,W}$ est isomorphe au complexe d'intersection défini précédemment. Cette proposition permet aussi de transposer aux champs de chtoucas les propriétés de factorisation des grassmanniennes affines de Beilinson-Drinfeld. On ne va pas réécrire les propriétés obtenues au niveau faisceautique mais leur traduction cohomologique obtenue après application des foncteurs $\mathrm{R}^0(\pi_{I,W})_!$ en tenant compte du théorème de changement de base propre.

Soit I un ensemble fini. On note $\mathrm{IndCons}(X^I)$ la catégorie des $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux sur X^I qui sont limites inductives de faisceaux constructibles. Soit $\zeta : I \to J$ une application entre ensembles finis. On a le morphisme $\zeta^* : X^J \to X^I$ et on note $\zeta_* : \mathrm{IndCons}(X^I) \to \mathrm{IndCons}(X^J)$ le foncteur d'image inverse correspondant.

Théorème 2.12. — *On possède un foncteur canonique* $\mathrm{Rep}(\hat{G}^I) \to \mathrm{IndCons}(X^I)$ *qui associe à tout objet W l'objet $\mathcal{H}_{I,W} = \mathrm{R}^0(\pi_{I,W})_!\,(\mathcal{I}_{I,W})$. Pour toute application $\zeta : I \to J$ entre ensembles finis on dispose d'un isomorphisme canonique $\mathcal{H}_{J,\,\zeta_*\bullet} = \zeta_*\mathcal{H}_{I,\bullet}$ entre foncteurs* $\mathrm{Rep}(\hat{G}^I) \to \mathrm{IndCons}(X^J)$. *On a un isomorphisme canonique $\mathcal{H}_{\emptyset,\mathbf{1}} = \mathcal{C}_c(G(K_X) \setminus G(\mathbb{A}_X) \,/\, \Xi \cdot K_N \,,\, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$.*

2.2.2. Application du lemme de Drinfeld. —

Proposition 2.13. — *Le faisceau $\mathcal{H}_{I,W}$ est canoniquement muni de morphismes de Frobenius partiels pour tout I et $W \in \mathrm{Rep}(\hat{G}^I)$.*

Preuve (esquisse) — On suppose W irréductible. Contrairement au cas où $G = \mathbb{G}_m$, le champ $\mathrm{Cht}_{I,W}$ n'est pas muni de morphismes de Frobenius partiels. C'est un raffinement

$$\tau : \mathrm{ChtIt}_{I,W} \to \mathrm{Cht}_{I,W}$$

qui est muni de ces morphismes (donnés par des formules tout à fait analogues à celles obtenues dans le cas $G = \mathbb{G}_m$). Ici $\mathrm{ChtIt}_{I,W}$ est un champ de chtoucas itérés où on paramètre une factorisation de la modification

$$\phi : {}^\tau E|_{X - \cup_i\{x_i\}} \xrightarrow{\sim} E|_{X - \cup_i\{x_i\}}$$

en une suite de $\mathrm{Card}(I)$ modifications centrées respectivement en x_1, x_2, ... Les morphismes de Frobenius partiels permutent alors cette suite de modifications de manière circulaire. Comme le morphisme τ est petit [L2, coro.2.18] la cohomologie d'intersection de $\mathrm{ChtIt}_{I,W}$ est canoniquement isomorphe à celle de $\mathrm{Cht}_{I,W}$ donc à $\mathcal{H}_{I,W}$, ce qui permet de conclure.

Remarque 2.14. — Contrairement au cas où $G = \mathbb{G}_m$ on ne sait pas que $\mathcal{H}_{I,W}$ est limite inductive de faisceaux lisses sur $(X - N)^I$. En effet $\pi_{I,W}$ n'est pas propre après troncation par les polygones de Harder-Narashiman et il faudrait le compactifier pour espérer conclure. Or construire des compactifications adéquates des champs de chtoucas est un problème extrêmement difficile (voir [L1] et [N] pour le cas où $G = \mathrm{GL}_n$).

Les problèmes techniques les plus importants apparaissent maintenant. Comme $\mathcal{H}_{I,W}$ n'est qu'un système inductif de faisceaux constructibles, il n'est pas immédiat de lui appliquer le lemme de Drinfeld. En effet, les troncatures de Harder-Narashiman exhibent $\mathcal{H}_{I,W}$ comme limite inductive de faisceaux constructibles mais les termes de cette limite ne sont pas stables par les morphismes de Frobenius partiels. Ils ne sont d'ailleurs pas stables non plus par les opérateurs de Hecke.

On remédie au problème en introduisant la partie Hecke-finie [L2, déf.8.9]

$$\mathcal{H}_{I,W}|^{\mathrm{Hf}}_{\Delta(\bar{\eta})} \;\subset\; \mathcal{H}_{I,W}|_{\Delta(\bar{\eta})}$$

C'est par définition l'union de tous les sous-$\bar{\mathbb{Z}}_\ell$-modules de type fini stables par l'action des opérateurs de Hecke hors N à coefficients dans $\bar{\mathbb{Z}}_\ell$. Il faut alors montrer que la cohomologie Hecke-finie est limite inductive de morceaux de type fini stables par les Frobenius partiels, ce qui résulte des congruences d'Eichler-Shimura [L2, ch.7]. Le lemme de Drinfeld montre alors que $H_{I,W} = \mathcal{H}_{I,W}|^{\mathrm{Hf}}_{\Delta(\bar\eta)}$ est canoniquement muni d'une action continue de $\pi_1(\eta,\bar\eta)^I$ pour tous I et W. On a en plus la proposition suivante [L2, prop.8.13], qui utilise la théorie des séries d'Eisenstein.

Proposition 2.15. — *Lorsque $I = \emptyset$ et $W = \mathbf{1}$, via l'identification*

$$\mathcal{H}_{\emptyset,\mathbf{1}} = \mathcal{C}_c(G(K_X) \setminus G(\mathbb{A}_X) \,/\, \Xi \cdot K_N\ ,\ \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$$

comme ind-faisceaux sur $\mathrm{Spec}(k)$ *on a* $H_{\emptyset,\mathbf{1}} = \mathcal{C}_{\mathrm{cusp}}(G(K_X) \setminus G(\mathbb{A}_X) \,/\, \Xi \cdot K_N\ ,\ \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ *qui est le sous-espace de dimension finie des fonctions cuspidales.*

2.3. Opérateurs d'excursion et conclusion

On peut maintenant procéder exactement comme dans la définition 1.41 et définir des opérateurs d'excursion $S_{I,f,\gamma}$ agissant sur $H_{\emptyset,\mathbf{1}} = \mathcal{C}_{\mathrm{cusp}}(G(K_X)\backslash G(\mathbb{A}_X)/\Xi\cdot K_N, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ pour tout ensemble fini I, tout $\gamma \in \pi_1(\eta,\bar\eta)^I$ et toute fonction régulière $f \in \mathcal{O}(\hat G \setminus \hat G^I / \hat G)$ où $\hat G^I$ est muni de la bi-action de $\hat G$ par translations diagonales à droite et à gauche. On commence par choisir $W \in \mathrm{Rep}(\hat G^I)$, $x : \mathbf{1} \to W^{\mathrm{diag}}$ et $\varphi : W^{\mathrm{diag}} \to \mathbf{1}$ des morphismes de $\hat G$-représentation où $\hat G \to \hat G^I$ est le plongement diagonal agissant sur $W^{\mathrm{diag}} = W$ (et on peut voir x comme un vecteur de W invariant par action diagonale de $\hat G$ et φ comme une forme linéaire sur W invariante par action diagonale de $\hat G$) tels que $f(g) = \varphi(g\cdot x)$ pour tout $g \in \hat G^I$. On note alors $S_{I,f,\gamma}$ la composée

$$H_{\emptyset,\mathbf{1}} \overset{\sim}{\to} H_{\{1\},\mathbf{1}} \xrightarrow{H(x)} H_{\{1\},W^{\mathrm{diag}}} \overset{\sim}{\to} H_{I,W} \xrightarrow{\gamma} H_{I,W} \overset{\sim}{\to} H_{\{1\},W^{\mathrm{diag}}} \xrightarrow{H(\varphi)} H_{\{1\},\mathbf{1}} \overset{\sim}{\to} H_{\emptyset,\mathbf{1}}$$

dont on vérifie qu'elle ne dépend que de f. Ces opérateurs vérifient l'axiomatique donnée dans le lemme 1.45. En particulier ils commutent entre eux.

Remarque 2.16. — On a visiblement utilisé la fonctorialité de $W \mapsto H_{I,W}$ pour construire les opérateurs d'excursion. Cette fonctorialité repose ultimement sur l'équivalence de Satake géométrique. On a également utilisé les propriétés de factorisation qui garantissent que $H_{\emptyset,\mathbf{1}} = H_{\{1\},\mathbf{1}}$ et que $H_{I,W} = H_{\{1\},W^{\mathrm{diag}}}$ et qui reposent sur la définition du produit de convolution par fusion dans l'équivalence de Satake géométrique. On a enfin utilisé le lemme de Drinfeld et les Frobenius partiels pour faire agir γ sur $H_{I,W}$.

Notons $\mathcal{B}$ la sous-$\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-algèbre d'endomorphismes engendrée par les $S_{I,f,\gamma}$. Elle est commutative. On peut donc décomposer $\mathcal{C}_{\mathrm{cusp}}(G(K_X)\setminus G(\mathbb{A}_X) \,/\, \Xi\cdot K_N, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ en sous-espaces propres généralisés selon les caractères d'algèbres $\tilde\chi : \mathcal{B} \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell$. Il reste deux étapes avant la conclusion : relier les opérateurs de Hecke aux opérateurs d'excursion, puis relier les caractères $\tilde\chi : \mathcal{B} \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell$ aux paramètres de Langlands $\chi : \pi_1(X - N, \bar\eta) \to \hat G(\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$. C'est l'objet des deux théorèmes suivants.

Théorème 2.17. — [L2, prop.6.2] *Tout opérateur de Hecke hors de N est un opérateur d'excursion canonique.*

La démonstration est le passage le plus technique de l'article. Elle consiste en un calcul de composées de correspondances cohomologiques exprimant d'un côté les opérateurs de Hecke et de l'autre les opérateurs d'excursion considérés. C'est ce théorème qui montre la compatibilité locale-globale aux places non ramifiées dans le programme de Langlands pour G.

THÉORÈME 2.18. — [L2, prop.11.7] *Tout caractère d'algèbre* $\tilde{\chi} : \mathcal{B} \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell$ *donne naissance à un paramètre de Langlands* $\chi : \pi_1(X - N, \bar{\eta}) \to \hat{G}(\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ *unique à* $\hat{G}(\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$*-conjugaison près qui est continu, semi-simple tel que* $\tilde{\chi}(S_{I,f,\gamma}) = f(\chi(\gamma))$ *pour tout ensemble fini* I*, tout* $f \in \mathcal{O}(\hat{G} \setminus \hat{G}^I / \hat{G})$ *et tout* $\gamma \in \pi_1(X - N, \bar{\eta})^I$*, en notant* $\chi(\gamma) = (\chi(\gamma_i))_{i \in I} \in \hat{G}(\bar{\mathbb{Q}}_\ell)^I$*.*

PREUVE (esquisse) — Soit $n \geq 1$, $\gamma \in \pi_1(X - N, \bar{\eta})^{n+1}$ et faisons varier $f \in \mathcal{O}(\hat{G} \setminus \hat{G}^{n+1}/\hat{G})$. Les relations $\tilde{\chi}(S_{I,f,\gamma}) = f(\chi(\gamma))$ déterminent $\chi(\gamma) \in (\hat{G} \setminus \hat{G}^{n+1}/\hat{G})(\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$. Mais $\hat{G}^n \to \hat{G}^{n+1}$, $(g_1, \cdots, g_n) \mapsto (1, g_1, \cdots, g_n)$ induit un isomorphisme entre $\hat{G} \setminus \hat{G}^{n+1}/\hat{G}$ et le quotient par conjugaison $\hat{G}^n//\hat{G}$. On connaît donc $\chi(\tau) \in (\hat{G}^n//\hat{G})(\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ pour tout $\tau \in \pi_1(X - N, \bar{\eta})^n$. D'après un théorème de Richardson [L2, lem.11.9] les $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-points de $\hat{G}^n//\hat{G}$ correspondent aux classes de conjugaison de n-uplets semi-simples dans $\hat{G}(\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$. On connaît donc la semi-simplification du n-uplet $\chi(\tau)$ à conjugaison près. On conclut en faisant varier n (voir la démonstration de [L2, prop.11.7]).

Remarque 2.19. — Lorsque $G = \mathrm{GL}_n$, le théorème précédent était connu par la théorie des pseudo-caractères [T]. Il suffit en effet de considérer $I = \{1, 2\}$ et $f(g_1, g_2) = \mathrm{Tr}_{\mathrm{GL}_n}(g_1 \cdot g_2^{-1})$ auquel cas $\tilde{\chi}(S_{I,f,(\gamma_1,1)})$ est la trace de la matrice $\chi(\gamma_1)$ cherchée. La relation de pseudo-caractère s'obtient en utilisant l'égalité $\Lambda^{n+1}\mathrm{St} = 0$ avec St la représentation standard de dimension n de $\hat{G} = \mathrm{GL}_n$ et l'on doit alors travailler avec des chtoucas à $2(n+1)$ pattes. Le théorème de Taylor permet alors de reconstruire χ à partir de $\tilde{\chi}$.

RÉFÉRENCES

[BD] A. BEILINSON et V. DRINFELD – *Quantization of Hitchin integrable system and Hecke eigensheaves*, prépublication (1999).

[B] D. BLASIUS – *On multiplicities for* SL(n), Israel J. Math. **88**, 237-251 (1994).

[D1] V. G. DRINFELD – *Moduli varieties of F-sheaves*, Func. Anal. and Appl. **21**, 107-122 (1987).

[D2] V. G. DRINFELD – *Langlands' conjecture for* GL(2) *over functional fields*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Helsinki, 1978), 565-574, Acad. Sci. Fennica, Helsinki (1980).

[D3] V. DRINFELD – *Proof of the Petersson conjecture for* GL(2) *over a global field of characteristic* p, Funct. Anal. Appl. **22** (1), 28-43 (1988).

[GL] A. GENESTIER et V. LAFFORGUE – *Chtoucas restreints pour les groupes réductifs et paramétrisation de Langlands locale*, en préparation (2015).

[G] B. GROSS – *On the Satake isomorphism*, dans « Galois Representations in Arithmetic Algebraic Geometry », Cambridge University Press, 223-237 (1998).

[H] G. HARDER – *Minkowskische Reduktionstheorie ber Funktionenkörpern*, Invent. Math. **7** (1) (1969).

[L1] L. LAFFORGUE – *Chtoucas de Drinfeld et correspondance de Langlands*, Invent. Math. **147** (1), 1-241 (2002).

[L2] V. LAFFORGUE – *Chtoucas pour les groupes réductifs et paramétrisation de Langlands globale*, prépublication Arxiv, version du 17/9/15.

[L3] V. LAFFORGUE – *Introduction aux chtoucas pour les groupes réductifs et à la paramétrisation de Langlands globale*, prépublication Arxiv.

[Lar1] M. LARSEN – *On the conjugacy of element-conjugate homomorphisms*, Israel J. Math. **88**, 253-277 (1994).

[Lar2] M. LARSEN – *On the conjugacy of element-conjugate homomorphisms*, II. Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **47** (185), 73 ?85 (1996).

[Lap] E. LAPID – *Some results on multiplicities for* $\mathrm{SL}(n)$, Israel J. Math. **112**, 157-186 (1999).

[Lau] G. LAUMON – *Chtoucas de Drinfeld et correspondance de Langlands (d'après Laurent Lafforgue)*, Gaz. Math. **88**, 11-33 (2001)

[MV] I. MIRKOVIC et K. VILONEN – *Geometric Langlands duality and representations of algebraic groups over commutative rings*, Annals of Math. **166**, 95-143 (2007).

[N] N.D. TUAN – *Compactification des champs de chtoucas et théorie géométrique des invariants*, Astérisque **313** (2007).

[S] J.P. SERRE – *Groupes algébriques et corps de classe*, Hermann (1975).

[SGA] A. GROTHENDIECK – *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie, Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1)*, Lecture notes in Mathematics **224**, Springer-Verlag (1971).

[T] R. TAYLOR – *Galois representations associated to Siegel modular forms of low weight*, Duke Math. J. **63**, 281-322 (1991).

[V] Y. VARSHAVSKY – *Moduli spaces of principal* F*-bundles*, Selecta Math. (N.S.) **10** (1), 131-166 (2004).

Benoît STROH

Université Paris XIII
UMR 7539 du CNRS
Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications
Institut Galilée
99 avenue J.-B. Clément
F–93430 Villetaneuse
E-mail : benoit.stroh@gmail.com