CLASSICITÉ EN THÉORIE DE HIDA

par

Benoît Stroh

Résumé. — Dans cet article, nous démontrons un théorème de classicité effectif en théorie de Hida. Nous nous concentrons plus précisément sur le cas du groupe symplectique et des formes modulaires de Siegel. Nous prouvons également un énoncé de relèvement en caractéristique nulle de formes modulaires de Siegel modulo p et menons une analyse détaillée de la divisibilité par p de certains opérateurs de Hecke.

Abstract. — In this article, we prove an effective classicity theorem in Hida's theory. We focus more precisely on the case of the symplectic group and Siegel modular forms. We also prove that certain mod p Siegel modular forms lift to caracteristic zero and study carefully the divisibility by p of certain Hecke operators.

Table des matières

1. Introduction

Le but principal de cet article est de démontrer un théorème de classicité effectif en théorie de Hida. Nous nous concentrons sur le cas du groupe symplectique GSp_{2g}, qui est le groupe associé aux variétés de Shimura PEL les plus générales, les variétés de Siegel. Soit p un nombre premier. La théorie de Hida dont nous venons de faire mention concerne donc les formes modulaires p-adiques de Siegel qui sont ordinaires et cuspidales, et a été développée dans [**Hi02**]. Cette théorie a été généralisée aux formes P-ordinaires dans [**Pi10**] et notre théorème est également valable dans ce cadre. Dans cette généralisation, P désigne un sous-groupe parabolique standard supérieur de GL_g, la théorie de Hida habituelle étant relative au choix du sous-groupe de Borel.

Appelons poids classique toute famille d'entiers relatifs $(k_1, \cdots, k_g)$ vérifiant $k_1 \geq \cdots \geq k_g$. Soit f une forme modulaire p-adique de Siegel qui est ordinaire de poids classique $(k_1, \cdots, k_g)$. En vue d'applications arithmétiques relatives aux congruences entre coefficients de Fourier-Jacobi, il est important de prouver un théorème de classicité lorsque le poids $(k_1, \cdots, k_g)$ est supposé assez grand, c'est-à-dire de démontrer que f provient d'une forme modulaire de Siegel usuelle de poids $(k_1, \cdots, k_g)$. Nous obtenons le théorème suivant, qui sera précisé dans **4.3.6**.

Théorème 1.1. — *Soit f une forme modulaire p-adique de Siegel qui est cuspidale, ordinaire, de niveau principal en un entier $n > 12$ non divisible par p et de poids classique $(k_1, \cdots, k_g)$. Supposons que $p > g(g+1)/2$, que $k_1 > \cdots > k_g$, que $k_g > g+1$ et que $\sum_i (k_i - k_g) < p - g(g+1)/2$. Alors f provient d'une forme modulaire de Siegel usuelle de niveau principal en n.*

Ce théorème répond à une conjecture de Hida ([**Hi02**, conj. 7.2]) dans le cas des poids $(k_1, \cdots, k_g)$ vérifiant l'hypothèse $\sum_i (k_i - k_g) < p - g(g+1)/2$. Il admet divers raffinements exposés dans la remarque **4.3.7**. On peut notamment remplacer l'hypothèse d'ordinarité par celle de P-ordinarité. Dans ce cas, la condition de régularité $k_1 > \cdots > k_g$ est remplacée par une condition plus faible de P-régularité [**Pi10**, part. 2]. On peut voir que l'hypothèse $k_g > g+1$ est déjà optimale dans le cas $g = 1$ des courbes modulaires, où le théorème **1.1** permet de retrouver des résultats de Jochnowitz [**Jo82**].

Remarque 1.2. — Une forme différente du théorème **1.1** a été prouvée par Hida [**Hi02**, th. 7.1.(4)] et étendue dans [**Pi10**, th. 6.6] au cas P-ordinaire. Les méthodes de Hida sont non effectives et ne permettent donc de donner aucune borne précise pour k_g. Toutefois, Hida ne doit pas supposer $p > g(g+1)/2$ et $\sum_i (k_i - k_g) < p - g(g+1)/2$.

La démonstration du théorème **1.1** repose sur deux résultats auxiliaires. Le premier d'entre-eux a trait au relèvement de formes modulaires de Siegel de la caractéristique p vers la caractéristique nulle. Nous obtenons le théorème suivant, qui sera précisé dans **3.2.1**.

Théorème 1.3. — *Supposons que $n > 12$ est un entier non divisible par p, que $p > g(g+1)/2$, que $(k_1, \cdots, k_g) \in \mathbb{Z}^g$ vérifie $k_1 \geq \cdots \geq k_g$, $k_g > g+1$ et $\sum_i (k_i - k_g) < p - g(g+1)/2$. Alors toute forme de Siegel à coefficients dans $\mathbb{F}_p$ qui est cuspidale, de niveau principal en n et de poids $(k_1, \cdots, k_g)$ se relève en une forme modulaire de Siegel à coefficients dans $\mathbb{Z}[1/n]$ qui est cuspidale, de niveau principal en n et de poids $(k_1, \cdots, k_g)$.*

La démonstration de ce théorème consiste à combiner un théorème d'amplitude dû à Shepherd-Barron [**SB06**], la théorie du complexe de Berstein-Gelfand-Gelfand due à Faltings et Chai [**FC90**, ch. VI] et un théorème d'annulation dû à Ogus [**Og94**]. Notre démarche s'inscrit dans le cadre de la problématique esquissée dans [**Hi02**, par. 7.3]. Le théorème de Shepherd-Barron nous force à travailler avec la compactification toroïdale des variétés de Siegel associée à un choix combinatoire particulier, la décomposition du cône parfait (*cf.* partie **2.2**). Cela est à l'origine de quelques difficultés combinatoires exposées dans la remarque **2.5.2**.

Remarque 1.4. — Lorsque cet article était en cours de rédaction, Lan et Suh ont envoyé à l'auteur leur prépublication [**LS10**] dans laquelle ils prouvent un meilleur théorème de relèvement que le nôtre. Certains aspects de leur démonstration, comme l'utilisation de résultats d'Ogus et du complexe de Bernstein-Gelfand-Gelfand, sont tout à fait similaires à la nôtre. Toutefois, leur preuve n'utilise pas le théorème de Shepherd-Barron, ce qui leur permet de traiter le cas des variétés de Shimura PEL générales, et pas seulement celui des variétés de Siegel. Lan et Suh ont appliqué leur théorème de relèvement à un tout autre problème que la classicité de formes modulaires p-adiques ordinaires, à savoir l'étude de la torsion de la cohomologie étale des variétés de Shimura PEL. Le lecteur qui le souhaiterait pourrait combiner leur théorème avec des généralisations faciles de nos résultats pour prouver des énoncés de classicité de formes p-adiques ordinaires relatifs à n'importe quelle variété de Shimua PEL.

Remarque 1.5. — Hida a également démontré dans [**Hi02**] une variante non effective du théorème **1.3**, dans laquelle il ne donne pas de borne pour k_g. Néanmoins, il ne doit pas supposer $p > g(g+1)/2$ et $\sum_i (k_i - k_g) < p - g(g+1)/2$. Notre démonstration du théorème **1.3** diffère radicalement de celle, très astucieuse, du théorème [**Hi02**, 3.1].

Le second ingrédient utile pour la démonstration du théorème **1.1** réside dans une analyse détaillée de la divisibilité par p de l'opérateur T_p agissant sur l'espace des formes modulaires de Siegel. Nous montrons notamment la proposition suivante.

Proposition 1.6. — *Supposons que $n \geq 3$ est un entier non divisible par p et que $(k_1, \cdots, k_g) \in \mathbb{Z}^g$ vérifie $k_1 \geq \cdots \geq k_g$ et $k_g > g + p$. Pour toute forme modulaire de Siegel f à coefficients dans $\mathbb{Z}_p$, de niveau principal en n et de poids $(k_1, \cdots, k_g)$, la forme modulaire $T_p \cdot f$ modulo p est nulle sur le lieu non ordinaire.*

La manière dont nous démontrons le théorème **1.1** à partir du théorème **1.3** et de la proposition **1.6** n'est pas originale mais directement inspirée de [**Pi10**, app.A].

Nous remercions K.W. Lan, F. Mokrane, S. Rozensztajn, J. Tilouine et A. Thuillier pour d'intéressantes suggestions. Nous remercions tout spécialement V. Pilloni pour de longues explications sur la théorie de Hida. La partie 4 de cet article lui doit beaucoup. Nos travaux ont été en partie financés par l'Agence Nationale de la Recherche dans le cadre du projet ANR-10-BLAN 0114 « Arithmétique des variétés de Shimura et des formes automorphes et applications ».

2. Les variétés de Siegel

Dans tout le reste de l'article, fixons deux entiers $g \geq 1$ et $n \geq 3$. Rappelons qu'une structure de niveau principale en n sur un schéma abélien G principalement polarisé de genre g sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/n])$ est la donnée d'une similitude symplectique entre le groupe des points de n-torsion $G[n]$ et le $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-module symplectique standard $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$. Notons $\mathcal{A}_g$ le schéma sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/n])$ qui paramètre les classes d'isomorphismes de schémas abéliens principalement polarisés de genre g munis d'une structure de niveau principale en n, et notons G le schéma abélien universel sur $\mathcal{A}_g$. Le schéma $\mathcal{A}_g$ est lisse sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/n])$ mais n'est pas propre.

Faltings et Chai [**FC90**] ont construit des compactifications toroïdales de $\mathcal{A}_g$, qui dépendent d'un choix combinatoire. Commençons par quelques rappels sur cette combinatoire.

2.1. La combinatoire. — Notons C_g le cône des formes quadratiques sur $\mathbb{R}^g$ qui sont semi-définies positives à radical rationnel. Autrement dit, C_g est l'ensemble des formes bilinéaires symétriques $q \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathrm{Sym}^2(\mathbb{R}^g), \mathbb{R})$ semi-définis positifs tels que l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^g \mid q(x,y) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^g\}$ provienne par extension des scalaires de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$ d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{Q}^g$. Le cône C_g est muni d'une action du groupe discret $\mathrm{GL}_g(\mathbb{Z})$ *via* son action naturelle sur $\mathbb{R}^g$.

Soit Σ un décomposition polyédrale rationnelle $\mathrm{GL}_g(\mathbb{Z})$-admissible de C_g [**FC90**, IV.2.2]. C'est donc une décomposition de C_g en cônes polyédraux définis sur $\mathbb{Q}$, équivariante sous l'action du groupe $\mathrm{GL}_g(\mathbb{Z})$ et ayant un nombre fini d'orbites. Rappelons [**FC90**, IV.2.3] que Σ est *lisse* si tout cône $\sigma \in \Sigma$ est engendré par une partie d'une $\mathbb{Z}$-base de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Sym}^2(\mathbb{Z}^g), \mathbb{Z})$. Rappelons également qu'il existe une notion de *polarisation* de Σ [**FC90**, IV.2.4].

Tout entier $g' \leq g$ et toute surjection $\mathbb{R}^g \twoheadrightarrow \mathbb{R}^{g'}$ déterminent une inclusion $C_{g'} \subset C_g$ qui identifie $C_{g'}$ à une composante de bord de C_g. La restriction à $C_{g'}$ de toute décomposition polyédrale rationnelle $\mathrm{GL}_g(\mathbb{Z})$-admissible Σ de C_g est une décomposition polyédrale rationnelle $\mathrm{GL}_{g'}(\mathbb{Z})$-admissible de $C_{g'}$. Si Σ est lisse, $\Sigma|_{C_{g'}}$ l'est également.

Lorsque $g = 1$, il existe une unique décomposition admissible donnée par $\Sigma = \{\{0\}, \mathbb{R}_+^*\}$, qui est bien sûr lisse. Lorsque $g \geq 2$, il existe une infinité de décompositions admissibles, et même de décompositions lisses. De plus, toute décomposition se raffine en une décomposition lisse. Il n'est par contre pas évident d'exhiber une décomposition admissible, même non lisse, lorsque $g \geq 2$.

2.2. Décomposition du cône parfait. — Voronoï a construit une décomposition polyédrale rationnelle $\mathrm{GL}_g(\mathbb{Z})$-admissible particulière de C_g, appelée décomposition du *cône parfait* ou première décomposition de Voronoï [**Ja90**]. Rappelons brièvement sa construction. Une forme quadratique définie positive $q \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathrm{Sym}^2(\mathbb{R}^g), \mathbb{R})$ est appelée parfaite si elle est déterminée à un scalaire près par l'ensemble de ses vecteurs minimaux. Par définition, les vecteurs minimaux de q sont les élements v de $\mathbb{Z}^g - \{0\}$ pour lesquels $q(v,v)$ est minimal. Voronoï a montré que *modulo* l'action de $\mathrm{GL}_g(\mathbb{Z})$, il n'y a qu'un nombre fini de formes parfaites [**Ja90**, p. 165]. Soit q une forme quadratique parfaite et $(v_i)_{i \in I}$ l'ensemble fini de ses vecteurs minimaux. Considérons pour tout $i \in I$ la forme quadratique de rang un $v_i v_i^t$ et la demi-droite $\mathbb{R}^+ v_i v_i^t$ qu'elle engendre dans C_g. Cette demi-droite est une composante de bord de C_g. Notons σ_q le cône polyédral rationnel obtenu comme enveloppe convexe des demi-droites $\mathbb{R}^+ v_i v_i^t$. Voronoï a montré que l'ensemble formé des cônes σ_q, où q parcourt les formes parfaites, est une décomposition polyédrale rationnelle $\mathrm{GL}_g(\mathbb{Z})$-admissible particulière de C_g. Par exemple, elle est bien finie *modulo* l'action de $\mathrm{GL}_g(\mathbb{Z})$ puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de classes d'équivalences de formes parfaites.

Exemple 2.2.1. — La situation est très simple lorsque $g = 2$. En effet, on peut facilement montrer qu'il existe une unique classe d'équivalence de formes parfaites, qui est donnée par la forme quadratique à deux variables $x^2 + xy + y^2$. Les formes quadratiques de rang un associées à cette forme parfaite sont x^2, y^2 et $(x-y)^2$. Ainsi, la décomposition du cône parfait de C_2 est constituée de la $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$-orbite de la pyramide à base triangulaire obtenue comme enveloppe convexe des demi-droites $\mathbb{R}^+ \cdot x^2$, $\mathbb{R}^+ \cdot y^2$ et $\mathbb{R}^+ \cdot (x-y)^2$.

Remarque 2.2.2. — D'après [**Hu00**, p.255 et 256], la décomposition du cône parfait est lisse si $g \leq 3$. Nous allons voir qu'elle n'est plus lisse pour $g \geq 4$. Soit $C_{g'} \subset C_g$ une composante de bord. D'après [**SB06**, 1.1.(2)], la restriction à $C_{g'}$ de la décomposition du cône parfait de C_g n'est autre que la décomposition du cône parfait de $C_{g'}$. Comme la décomposition du cône parfait n'est pas lisse lorsque $g = 4$ [**HS04**, p. 661], elle n'est jamais lisse pour $g \geq 4$.

2.3. Les compactifications. — Faltings et Chai ont prouvé le théorème suivant [**FC90**, IV.6.7, V.5.8], qui permet d'associer une compactification toroïdale à toute décomposition polyédrale.

Théorème 2.3.1 **(Faltings et Chai)**. — *Soit* Σ *une décomposition polyédrale rationnelle* $\mathrm{GL}_g(\mathbb{Z})$*-admissible de* C_g. *On peut lui attacher canoniquement un espace algébrique*

$$\bar{\mathcal{A}}_g^{\Sigma}$$

propre sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/n])$ *qui contient* $\mathcal{A}_g$ *comme ouvert dense. Localement pour la topologie étale, l'inclusion de* $\mathcal{A}_g$ *dans* $\bar{\mathcal{A}}_g^{\Sigma}$ *est isomorphe au plongement d'un tore dans un plongement torique affine construit à l'aide de* Σ. *Le schéma abélien universel sur* $\bar{\mathcal{A}}_g^{\Sigma}$ *s'étend canoniquement en un schéma semi-abélien* G *sur* $\bar{\mathcal{A}}_g^{\Sigma}$. *L'espace algébrique* $\bar{\mathcal{A}}_g^{\Sigma}$ *est lisse sur* $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/n])$ *si et seulement si* Σ *est lisse. L'espace algébrique* $\bar{\mathcal{A}}_g^{\Sigma}$ *est un schéma lorsque* Σ *est polarisée.*

Supposons que la compactification toroïdale de $\mathcal{A}_g$ associée à Σ soit un schéma et munissons le bord

$$D = \bar{\mathcal{A}}_g^{\Sigma} - \mathcal{A}_g$$

de sa structure schématique réduite. À D est associée une log-structure canonique sur $\bar{\mathcal{A}}_g^{\Sigma}$, qui est formée du faisceau en monoïdes des fonctions inversibles hors de D. Le log-schéma obtenu est log-lisse sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/n])$ muni de sa log-structure triviale.

Nous noterons toujours $e : \bar{\mathcal{A}}_g^{\Sigma} \to G$ la section neutre du schéma semi-abélien canonique,

$$\Omega = e^* \, \Omega^1_{G/\bar{\mathcal{A}}_g^{\Sigma}}$$

qui est un faisceau localement libre de rang g sur $\bar{\mathcal{A}}_g^{\Sigma}$, et $\omega = \det(\Omega)$ qui est un faisceau inversible.

2.4. Les variétés de Kuga-Sato. — Soit $s \geq 0$ un entier et $\mathfrak{S}$ une décomposition polyédrale rationnelle $\mathrm{GL}_g(\mathbb{Z})$-admissible lisse de C_g. Faltings et Chai ont construit des compactifications de la puissance s-ième G^s de la variété abélienne universelle G sur $\mathcal{A}_g$, également appelée variété de Kuga-Sato de paramètre s. Ces compactifications sont également de nature torique et dépendent donc d'un choix combinatoire lisse $\mathfrak{S}'$ que nous ne rappelerons pas. Disons simplement que $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$ et s sont assujettis à des contraintes mutuelles, et nous dirons que $\mathfrak{S}'$ est approprié pour $\mathfrak{S}$ et s lorsque ces contraintes sont satisfaites. Un choix combinatoire approprié existe toujours quitte à raffiner $\mathfrak{S}$. Le résultat est le suivant [**FC90**, VI.1.1, 1.4 et 1.6.(c)].

Théorème 2.4.1 **(Faltings et Chai)**. — *Soit* $\mathfrak{S}'$ *un choix combinatoire approprié pour* $\mathfrak{S}$ *et* s. *On peut lui associer une compactification*

$$f : \overline{G}^{s,\mathfrak{S}'} \longrightarrow \bar{\mathcal{A}}_g^{\mathfrak{S}}$$

de la puissance s-ième $G^s \to \mathcal{A}_g$ du schéma abélien universel $G \to \mathcal{A}_g$ telle que $\overline{G}^{s,\mathfrak{S}'}$ et $\bar{\mathcal{A}}_g^{\mathfrak{S}}$ soient lisses sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/n])$ *et f soit à fibres équidimensionnelles.*

Remarque 2.4.2. — Faltings et Chai construisent en fait des compactifications des variétés de Kuga-Sato sous des hypothèses plus faibles que celles présentées ici. En effet, les décompositions $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}'$ n'ont pas pas besoin d'être lisses et le morphisme f obtenu n'est pas nécessairement à fibres équidimensionnelles.

De plus, Faltings et Chai ont calculé la cohomologie de Hodge relative de f [**FC90**, IV.1.1]. Munissons la compactification de G^s de sa log-structure canonique formée du faisceau en monoïdes des fonctions inversibles sur le complémentaire du bord. Le morphisme f est alors log-lisse et l'on introduit pour tout $i \geq 0$ le faisceau localement libre des formes différentielles relatives à pôles logarithmiques

$$\bar{\Omega}^i_{\overline{G}^{s,\mathfrak{S}'}/\bar{\mathcal{A}}_g^{\mathfrak{S}}}$$

ainsi que le complexe de de Rham logarithmique relatif

$$\bar{\Omega}^\bullet_{\overline{G}^{s,\mathfrak{S}'}/\bar{\mathcal{A}}_g^{\mathfrak{S}}}.$$

***Théorème 2.4.3* (Faltings et Chai).** — *Soit $\mathfrak{S}'$ un choix combinatoire approprié pour $\mathfrak{S}$ et s. Désignons par f la compactification de $G^s \to \mathcal{A}_g$ obtenue par le théorème **2.4.1**. Pour tous entiers positifs i et j, il existe un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{R}^j f_* \left(\bar{\Omega}^i_{\overline{G}^{s,\mathfrak{S}'}/\bar{\mathcal{A}}_g^{\mathfrak{S}}} \right) \xrightarrow{\sim} \Lambda^i \left(\Omega^s\right) \otimes \Lambda^j \left((\Omega^\vee)^s \right)$$

Le faisceau Ω intervenant dans l'énoncé a été défini dans la sous-partie **2.3** et $\Omega^\vee$ désigne son dual. L'isomorphisme obtenu d'après le théorème est évident lorsque l'on se restreint à l'ouvert $\mathcal{A}_g$ de la base.

Remarque 2.4.4. — Faltings et Chai énoncent le théorème [**FC90**, IV.1.1] sans l'hypothèse d'équidimensionnalité des compactifications des variétés de Kuga-Sato. Toutefois, Lan a remarqué que leur démonstration utilise pourtant cette hypothèse *via* le théorème de semi-continuité des images directes pour un morphisme propre et plat, que Faltings et Chai semblent utiliser au début de la page 210 de [**FC90**]. Le lecteur pourra consulter [**La10**, 3.18, 4.37, 4.29] pour plus de détails.

Corollaire 2.4.5. — *La suite spectrale de Hodge vers de Rham*

$$E_1^{i,j} = \mathrm{R}^j f_* \left(\bar{\Omega}^i_{\overline{G}^{s,\mathfrak{S}'}/\bar{\mathcal{A}}_g^{\mathfrak{S}}} \right) \Rightarrow \mathrm{R}^{i+j} f_* \left(\bar{\Omega}^\bullet_{\overline{G}^{s,\mathfrak{S}'}/\bar{\mathcal{A}}_g^{\mathfrak{S}}} \right)$$

dégénère en E_1 et ses termes initiaux comme son aboutissement sont localement libres sur $\bar{\mathcal{A}}_g^{\mathfrak{S}}$.

Démonstration. — On démontre la dégénérescence de la suite spectrale en prouvant l'égalité des dimensions

$$\sum_{i+j=n} \dim_{k(x)} \left(E_1^{i,j} \otimes k(x) \right) = \dim_{k(x)} \left((\mathrm{R}^n f_* \bar{\Omega}^\bullet) \otimes k(x) \right) \quad (\mathbf{2.4}.\mathrm{A})$$

pour tout entier n et tout point $x \in \bar{\mathcal{A}}_g^{\mathfrak{S}}$. Il est évident que le membre de gauche de (**2.4**.A) est toujours supérieur au membre de droite. L'égalité (**2.4**.A) est vérifiée sur $\mathcal{A}_g$ puisque $G^s \to \mathcal{A}_g$ est un schéma abélien et la suite spectrale dégénère. Le membre de gauche de (**2.4**.A) est une fonction localement constante d'après le théorème **2.4.3**. Le membre de droite de (**2.4**.A) ne peut que croître par spécialisation par cohérence du terme d'aboutissement. On conclut bien à l'égalité de (**2.4**.A) pour tout $x \in \bar{\mathcal{A}}_g^{\mathfrak{S}}$. On déduit la liberté locale du terme d'aboutissement de la dégénérescence de la suite spectrale et de la liberté locale des termes initaux. $\square$

On dispose sur $\bar{\mathcal{A}}_g^{\mathfrak{S}}$ du faisceau cohérent localement libre indépendant du choix de $\mathfrak{S}'$

$$H_{\mathfrak{S},s} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{R}^n f_* \left(\bar{\Omega}^{\bullet}_{\overline{G}^{s,\mathfrak{S}'}/\bar{\mathcal{A}}_g^{\mathfrak{S}}} \right) .$$

Il est muni de la filtration de Hodge et de la connexion de Gauss-Manin, qui est intégrable à pôles logarithmiques le long du bord. Cette connexion et cette filtration vérifient la transversalité de Griffiths. D'après le théorème **2.4.3** et le corollaire **2.4.5**, les gradués de la filtration de Hodge sont canoniquement isomorphes à $\bigoplus_n \Lambda^i(\Omega^s) \otimes \Lambda^{n-i}((\Omega^\vee)^s)$.

Soit Σ une décomposition polyédrale rationnelle $\mathrm{GL}_g(\mathbb{Z})$-admissible quelconque de C_g. Supposons que $\mathfrak{S}$ raffine Σ. Notons $\bar{\mathcal{A}}_g^{\Sigma}$ la compactification toroïdale associée à Σ. *A priori*, Σ ne rentre pas dans le cadre du théorème **2.4.1** et il n'existe donc pas nécessairement de compactification des variétés de Kuga-Sato sur

$$\bar{\mathcal{A}}_g^{\Sigma}$$

et encore moins de compactifications à fibres équidimensionnelles. Nous allons toutefois construire un module à connexion logarithmique $H_{\Sigma,s}$ par descente par le morphisme canonique log-étale

$$\pi \;:\; \bar{\mathcal{A}}_g^{\mathfrak{S}} \longrightarrow \bar{\mathcal{A}}_g^{\Sigma} .$$

Lemme 2.4.6. — *Le faisceau cohérent $H_{\Sigma,s} = \pi_* H_{\mathfrak{S},s}$ est localement libre. Il est muni d'une filtration dont les gradués sont isomorphes à $\bigoplus_n \Lambda^i(\Omega^s) \otimes \Lambda^{n-i}((\Omega^\vee)^s)$ et d'une connexion intégrable à pôles logarithmiques le long du bord. La connexion et la filtration vérifient la transversalité de Griffiths.*

Démonstration. — Le morphisme π étant induit par un raffinement de décompositions polyédrales, il vérifie $\pi_*\mathcal{O} = \mathcal{O}$ et $\mathrm{R}^i\pi_*\mathcal{O} = 0$ pour tout $i > 0$ [**FC90**, V.1.2]. Pour ne pas tout confondre, notons $\Omega_{\mathfrak{S}}$ le faisceau localement libre défini sur $\bar{\mathcal{A}}_g^{\mathfrak{S}}$ et Ω_Σ celui défini sur $\bar{\mathcal{A}}_g^{\Sigma}$. On a $\Omega_{\mathfrak{S}} = \pi^*\Omega_\Sigma$. Les gradués de la filtration de Hodge de $H_{\mathfrak{S},s}$ sont isomorphes à $\bigoplus_n \Lambda^i(\Omega_{\mathfrak{S}}^s) \otimes \Lambda^{n-i}((\Omega_{\mathfrak{S}}^\vee)^s)$ donc aussi à $\pi^*\left(\bigoplus_n \Lambda^i(\Omega_\Sigma^s) \otimes \Lambda^{n-i}((\Omega_\Sigma^\vee)^s)\right)$. Lorsqu'on pousse la filtration de $H_{\mathfrak{S},s}$ par π_*, on obtient bien une filtration sur $H_{\Sigma,s}$ car $\mathrm{R}^1\pi_*\mathcal{O} = 0$. Comme $\pi_*\mathcal{O} = \mathcal{O}$, les gradués de cette filtration sont bien isomorphes à $\bigoplus_n \Lambda^i(\Omega_\Sigma^s) \otimes \Lambda^{n-i}((\Omega_\Sigma^\vee)^s)$, donc sont localement libres. En particulier, $H_{\Sigma,s}$ est localement libre. De plus, le morphisme π est log-étale donc

$$\pi^*\bar{\Omega}^1_{\bar{\mathcal{A}}_g^{\Sigma}/\mathbb{Z}[1/n]} = \bar{\Omega}^1_{\bar{\mathcal{A}}_g^{\mathfrak{S}}/\mathbb{Z}[1/n]}$$

où $\bar{\Omega}^1$ désigne les formes différentielles relatives à pôles logarithmiques. On obtient alors une connexion sur $H_{\Sigma,s}$ en poussant celle sur $H_{\mathfrak{S},s}$ par π_*. La transversalité de Griffiths est satisfaite sur $H_{\Sigma,s}$ car elle l'est sur $H_{\mathfrak{S},s}$. $\square$

La morale de ce lemme est que même s'il n'existe pas de compactifications des variétés de Kuga-Sato sur $\bar{\mathcal{A}}_g^{\Sigma}$, leur cohomologie de de Rham relative $H_{\Sigma,s}$ a un sens ! Remarquons d'ailleurs que $H_{\Sigma,s}$ est indépendant du choix de $\mathfrak{S}$ et de $\mathfrak{S}'$.

2.5. Théorème d'amplitude. — D'après le théorème **2.3.1**, on dispose pour tout $g \geq 0$ de la compactification toroïdale

$$\bar{\mathcal{A}}_g^{\mathrm{parf}}$$

associée à la décomposition du cône parfait de C_g. D'après la remarque **2.2.2**, elle est lisse si et seulement si $g \leq 3$ et à singularités toriques si $g \geq 4$. Nous allons voir que la compactification associée à la décomposition du cône parfait possède des propriétés d'amplitude remarquables. Rappelons que nous avons défini dans la sous-partie **2.3** un faisceau inversible ω sur toute compactification toroïdale de $\mathcal{A}_g$, donc en particulier sur celle associée à la décomposition du cône parfait. Notons D le bord de

$$\bar{\mathcal{A}}_g^{\mathrm{parf}}$$

muni de sa structure schématique réduite. Shephered-Barron a montré le théorème suivant dans [**SB06**].

***Théorème 2.5.1* (Shephered-Barron).** — *Le faisceau inversible $\omega^k(-D)$ est ample sur $\bar{\mathcal{A}}_g^{\mathrm{parf}}$ si et seulement si $k > 12/n$.*

En particulier, $\bar{\mathcal{A}}_g^{\mathrm{parf}}$ est un schéma et pas seulement un espace algébrique. L'auteur ne sait pas pour autant si la décomposition du cône parfait peut être munie d'une polarisation.

Remarque 2.5.2. — Il n'est pas clair qu'il existe une compactification des variétés de Kuga-Sato sur la compactification toroïdale associée à la décomposition du cône parfait car le problème combinatoire [**FC90**, VI.1.5] peut ne pas avoir de solution. Remarquons toutefois que sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{C})$, il existe toujours des compactifications des variétés de Kuga-Sato car on peut se passer de la technique d'algébrisation de Faltings et Chai qui est à l'origine de la contrainte [**FC90**, VI.1.5]. Par contre, même sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{C})$, il n'est pas clair qu'il existe une compactification des variétés de Kuga-Sato à fibres équidimensionnelles sur la compactification toroïdale associée à la décomposition du cône parfait. Cette question classique est par exemple mentionnée dans l'introduction de [**SB06**]. C'est pour remédier à ces inconvénients combinatoires que nous avons démontré le lemme **2.4.6**.

3. Le théorème de relèvement

Nous allons rappeler la définition des formes modulaires de Siegel, énoncer le théorème de relèvement, définir des modules à connexions sur les variétés de Siegel, rappeler la théorie du complexe BGG qui relie la cohomologie de ces modules à connexions aux groupes de formes modulaires, puis démontrer le théorème de relèvement.

3.1. Les faisceaux de formes modulaires. — Soit Σ une décomposition polyérale rationnelle $\mathrm{GL}_g(\mathbb{Z})$-admissible de C_g et $\bar{\mathcal{A}}_g^{\Sigma}$ la compactification toroïdale de $\mathcal{A}_g$ associée. Rappelons que nous avons défini dans la partie **2.3** un faisceau localement libre Ω de rang g sur la compactification de $\mathcal{A}_g$ associée à Σ. Ainsi,

$$\underline{\mathrm{Isom}}\left(\mathcal{O}^g_{\bar{\mathcal{A}}_g^{\Sigma}}\,,\,\Omega\right)$$

est naturellement un GL_g-torseur sur $\bar{\mathcal{A}}_g^{\Sigma}$. Soit $\mu = (k_1, k_2, \cdots, k_g)$ un élément de $\mathbb{Z}^g$ vérifiant $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_g$. Il définit donc un poids dominant du schéma en groupes GL_g sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ relativement au choix du tore standard T et du sous-groupe de Borel standard supérieur B.

On voit μ comme un caractère de B trivial sur le radical unipotent, et on peut donc lui associer la représentation algébrique de GL_g sur $\mathbb{Z}$

$$W_\mu \;=\; \mathrm{Ind}_B^{\mathrm{GL}_g}(\mu)\,.$$

La fibre générique $W_\mu \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est la représentation irréductible de GL_g sur $\mathbb{Q}$ de plus haut poids μ. On forme le produit contracté

$$\mathcal{W}_\mu \;=\; \underline{\mathrm{Isom}}\left(\mathcal{O}^g_{\bar{\mathcal{A}}_g^\Sigma}\,,\,\Omega\right)\;\times^{\mathrm{GL_g}}\; W_\mu$$

et l'on obtient un faisceau cohérent localement libre sur $\bar{\mathcal{A}}_g^\Sigma$. On l'appelle faisceau des formes modulaires de Siegel de poids μ. Soit D le bord de

$$\bar{\mathcal{A}}_g^\Sigma$$

muni de sa structure schématique réduite. On appelle alors $\mathcal{W}_\mu(-D)$ le faisceau des formes modulaires cuspidales de poids μ.

Exemple 3.1.1. — Lorsque $\mu = (0,\cdots,0)$, la représentation W_μ est la représentation triviale et $\mathcal{W}_\mu = \mathcal{O}$. Lorsque $\mu = (k,\cdots,k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$, la représentation W_μ est la puissance k-ième du déterminant et $\mathcal{W}_\mu = \omega^k$. Lorsque $\mu = (1,0,\cdots 0)$, la représentation W_μ est la représentation standard de GL_g et $\mathcal{W}_\mu = \Omega$.

Notons $W_{\mathrm{GL_g}}$ le groupe de Weyl de GL_g relativement au choix de T et notons $\omega_1 \in W_{\mathrm{GL_g}}$ le plus long élément pour l'ordre de Bruhat. Le groupe $W_{\mathrm{GL_g}}$ agit naturellement sur $X^*(T) = \mathbb{Z}^g$. Il est isomorphe au groupe de permutation $\mathfrak{S}_g$, et l'action sur $X^*(T)$ est isomorphe à l'action par permutation des coordonnées sur $\mathbb{Z}^g$. On a via cet isomorphisme

$$w_1(k_1,\cdots,k_g) \;=\; (k_g,\cdots,k_1)\,.$$

L'élément ω_1 permet de décrire la dualité car

$$\mathcal{W}_\mu^\vee \;:=\; \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_{\bar{\mathcal{A}}_g^\Sigma}}\left(\mathcal{W}_\mu\,,\,\mathcal{O}_{\bar{\mathcal{A}}_g^\Sigma}\right) \;=\; \mathcal{W}_{-w_1\,\mu}\,.$$

Les sections globales des faisceaux $\mathcal{W}_\mu$ servent à définir les formes modulaires de Siegel.

Définition 3.1.2. — Soit M un $\mathbb{Z}[1/n]$-module. Les formes modulaires de Siegel de genre g, de niveau principal en n, de poids μ et à coefficients dans M sont les éléments de

$$\mathrm{H}^0(\bar{\mathcal{A}}_g^\Sigma\,,\,\mathcal{W}_\mu \otimes M)\,.$$

Les formes modulaires cuspidales de Siegel de même genre, niveau, poids et coefficients sont les éléments de

$$\mathrm{H}^0(\bar{\mathcal{A}}_g^\Sigma\,,\,\mathcal{W}_\mu(-D) \otimes M)\,.$$

D'après [**FC90**, V.1.2], ces deux groupes de sections globales ne dépendent pas du choix combinatoire Σ. De plus, si $g \geq 2$, le principe de Koecher [**FC90**, V.1.5] affirme que

$$\mathrm{H}^0(\bar{\mathcal{A}}_g^\Sigma\,,\,\mathcal{W}_\mu \otimes M) \;=\; \mathrm{H}^0(\mathcal{A}_g\,,\,\mathcal{W}_\mu \otimes M)\,.$$

Précisons que les deux références précédentes traitent *a priori* seulement du cas des formes à valeurs scalaires, c'est-à-dire du cas $\mu = (k,\cdots,k)$, mais que les preuves s'étendent immédiatement au cas général.

3.2. L'énoncé. — Voilà le théorème principal de cette partie.

Théorème 3.2.1. — *Soient $n > 12$ un entier, $p > g(g+1)/2$ un nombre premier qui ne divise pas n et $\mu = (k_1 \geq \cdots \geq k_g)$ un poids dominant pour GL_g tel que $k_g > g+1$ et $\sum_i (k_i - k_g) < p - g(g+1)/2$. L'application de réduction modulo p réalise un isomorphisme*

$$\mathrm{H}^0\left(\bar{\mathcal{A}}_g^{\Sigma}\,,\,\mathcal{W}_\mu(-D)\right)\otimes_{\mathbb{Z}[1/n]}\mathbb{F}_p \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{H}^0\left(\bar{\mathcal{A}}_g^{\Sigma}\,,\,\mathcal{W}_\mu(-D)\otimes\mathbb{F}_p\right)\ .$$

Nous démontrerons ce théorème dans la partie **3.5**. Remarquons juste qu'on a clairement

$$\mathrm{H}^0\left(\bar{\mathcal{A}}_g^{\Sigma}\,,\,\mathcal{W}_\mu(-D)\otimes\mathbb{F}_p\right) = \mathrm{H}^0\left(\bar{\mathcal{A}}_g^{\Sigma}\times\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)\,,\,\mathcal{W}_\mu(-D)\right)\ .$$

Ainsi, le théorème **3.2.1** permet de relever des formes modulaires cuspidales de la caractéristique p à la caractéristique nulle.

Remarque 3.2.2. — On s'affranchit aisément de l'hypothèse $n > 12$ en considérant les invariants par un groupe fini adéquat et en excluant quelques valeurs pour le nombre premier p. En effet, pour tout $n \geq 3$ choisissons un entier m premier à n tel que $nm > 12$ et un nombre premier p qui ne divise ni nm ni le cardinal de $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$. On peut alors appliquer le théorème **3.2.1** à l'entier $nm > 12$ puis prendre les invariants par le groupe fini $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$, qui est une opération compatible à la réduction modulo p. On en déduit que les formes modulaires de Siegel cuspidales de niveau principal en n se relèvent de $\mathbb{F}_p$ à $\mathbb{Z}[1/nm]$. Pour trouver des combinaisons de couples (m,p) adéquats, on raisonne au cas par cas sur n en utilisant la formule

$$\mathrm{Card}\left(\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})\right) \;=\; (q-1)q^{g^2}\prod_{i=1}^{g}(q^{2i}-1)$$

valable pour tout nombre premier impair q. De même, on prouve facilement des énoncés de relèvement de formes modulaires de niveau non nécessairement principal.

Remarque 3.2.3. — Il devrait être possible de s'affranchir de l'hypothèse $\sum_i (k_i - k_g) < p - g(g+1)/2$ dans le théorème **3.2.1**, quitte à supposer éventuellement le nombre premier p assez grand. Toutefois, nos méthodes ne permettent pas de démontrer un tel énoncé (*cf.* remarque **3.5.6**).

3.3. Les modules à connexions. — On peut construire des faisceaux localement libres munis d'une connexion intégrable à pôles logarithmiques le long du bord des compactifications toroïdales de $\mathcal{A}_g$.

Soit p un nombre premier qui ne divise pas n. Soit $\lambda = (a_1, \cdots, a_g; c)$ un élément de $\mathbb{Z}^{g+1}$ vérifiant $c \equiv \sum_i a_i \mod 2$. Définissons le schéma en groupes GSp_{2g} sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ comme l'ensemble des similitudes symplectiques relativement à la forme alternée de matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & J \\ -J & 0 \end{pmatrix}\ ,$$

où J désigne la matrice anti-diagonale dont les coefficients non nuls sont égaux à 1. L'élément λ de $\mathbb{Z}^{g+1}$ détermine naturellement un poids dominant du schéma en groupes GSp_{2g} sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ relativement au choix du tore diagonal standard T' et du sous-groupe de Borel standard supérieur B' de GSp_{2g}.

Définition 3.3.1. — Un poids dominant $\lambda = (a_1, \cdots, a_g; c)$ pour GSp_{2g} est petit devant p lorsque $g(g+1)/2 + \sum_i a_i < p$.

Un poids dominant petit devant p est p-petit dans le sens de [**MT02**, p. 6] donc en particulier dans l'adhérence de la p-alcôve fondamentale [**PT02**, 1.9]. Par contre, tout poids p-petit n'est pas petit devant p : il y a une différence de 1 entre notre définition et celle de Mokrane et Tilouine. Le lecteur prendra d'ailleurs garde à la différence de sens de l'expression « p-petit » entre [**MT02**] et [**PT02**].

Soit $\bar{\mathcal{A}}_g^\Sigma$ une compactification toroïdale quelconque de $\bar{\mathcal{A}}_g$ et $\lambda = (a_1, \cdots, a_g; c)$ un poids dominant petit devant p pour GSp_{2g}. Mokrane et Tilouine [**MT02**, App. II.4] lui ont canoniquement associé un faisceau localement libre $\mathcal{V}_\lambda$ sur

$$\bar{\mathcal{A}}_g^\Sigma \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$$

muni d'une connexion intégrable à pôles logarithmiques le long du bord de $\bar{\mathcal{A}}_g^\Sigma$. Si l'on pose $s = \sum_i a_i$ et l'on désigne par $H_{\Sigma,s}$ le faisceau localement libre gradué à connexion logarithmique défini dans le lemme **2.4.6** (*via* le choix d'un raffinement $\mathfrak{S}$ convenable de Σ), le module à connexion logarithmique $\mathcal{V}_\lambda$ est un facteur direct de $H_{\Sigma,s}$ découpé par correspondances algébriques.

Exemple 3.3.2. — Lorsque $\lambda = (0, \cdots, 0; 0)$ avec $w \in \mathbb{Z}$, le module à connexion logarithmique $\mathcal{V}_\lambda$ est trivial. Lorsque $\lambda = (1, 0, \cdots, 0; -1)$, on a $\mathcal{V}_\lambda = H^1_{\Sigma,1}$ où $H^1_{\Sigma,1}$ désigne la composante de degré 1 du module gradué $H_{\Sigma,1}$ et la connexion est celle de Gauss-Manin.

Notons $W_{\mathrm{GSp_{2g}}}$ le groupe de Weyl de GSp_{2g} relativement au choix de T' et notons $\omega_0 \in W_{\mathrm{GSp_{2g}}}$ le plus long élément pour l'ordre de Bruhat. Le groupe $W_{\mathrm{GSp_{2g}}}$ agit naturellement sur

$$X^*(T') \;=\; \{\, (a_1, \cdots, a_g; c) \in \mathbb{Z}^{g+1} \mid \sum_i a_i \equiv c \bmod 2 \,\}.$$

Ce groupe est isomorphe au produit semi-direct $\mathfrak{S}_g \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^g$, où $\mathfrak{S}_g$ agit sur $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^g$ par permutation des coordonnées. L'action de $W_{\mathrm{GSp_{2g}}}$ sur $X^*(T')$ se fait de la manière suivante : $\sigma \in \mathfrak{S}_g$ agit en permutant les a_i et $\tau \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^g$ agit en changeant le signe de certains a_i. On définit un élement $w_0 \in W_{\mathrm{GSp_{2g}}}$ par la formule

$$w_0(a_1, \cdots, a_g; c) \;=\; (-a_1, \cdots, -a_g; c)\,.$$

Comme précédemment, l'élément ω_0 permet de décrire la dualité car

$$\mathcal{V}_\lambda^\vee \;:=\; \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_{\bar{\mathcal{A}}_g^\Sigma \times \mathbb{Z}_p}}\Big(\mathcal{V}_\lambda\,,\, \mathcal{O}_{\bar{\mathcal{A}}_g^\Sigma \times \mathbb{Z}_p}\Big) \;=\; \mathcal{V}_{-w_0\,\lambda}\,.$$

Le module à connexion logarithmique $\mathcal{V}_\lambda$ est canoniquement muni d'une filtration de Hodge $(F^i\mathcal{V}_\lambda)_{i\geq 0}$ induite par la filtration de Hodge sur $H_{\Sigma,s}$. Elle vérifie la transversalité de Griffiths relativement à la connexion et l'on peut donc filtrer le complexe de de Rham

$$\mathrm{DR}(\mathcal{V}_\lambda) \;=\; [\mathcal{V}_\lambda \to \mathcal{V}_\lambda \otimes \bar{\Omega}^1_{\bar{\mathcal{A}}_g^\Sigma/\mathbb{Z}_p} \to \mathcal{V}_\lambda \otimes \bar{\Omega}^2_{\bar{\mathcal{A}}_g^\Sigma/\mathbb{Z}_p} \to \cdots]$$

en posant

$$F^i\,\mathrm{DR}(\mathcal{V}_\lambda) \;=\; [F^i\mathcal{V}_\lambda \to F^{i-1}\mathcal{V}_\lambda \otimes \bar{\Omega}^1_{\bar{\mathcal{A}}_g^\Sigma/\mathbb{Z}_p} \to F^{i-2}\mathcal{V}_\lambda \otimes \bar{\Omega}^2_{\bar{\mathcal{A}}_g^\Sigma/\mathbb{Z}_p} \to \cdots]\,.$$

On a donc en ce qui concerne le gradué

$$\mathrm{gr}^i_F\,\mathrm{DR}(\mathcal{V}_\lambda) \;=\; [\mathrm{gr}^i_F\mathcal{V}_\lambda \to \mathrm{gr}^{i-1}_F\mathcal{V}_\lambda \otimes \bar{\Omega}^1_{\bar{\mathcal{A}}_g^\Sigma/\mathbb{Z}_p} \to \mathrm{gr}^{i-2}_F\mathcal{V}_\lambda \otimes \bar{\Omega}^2_{\bar{\mathcal{A}}_g^\Sigma/\mathbb{Z}_p} \to \cdots]\,.$$

3.4. Le complexe BGG. — Soit λ un poids dominant petit devant p pour GSp_{2g}. Il s'avère pour tout $i \in \mathbb{Z}$, le complexe $\mathrm{gr}^i_F\,\mathrm{DR}(\mathcal{V}_\lambda)$ est canoniquement quasi-isomorphe à un complexe scindé. Ce complexe, connu sous le nom de BGG ou de Bernstein-Gelfand-Gelfand, prend une forme plus agréable lorsqu'on considère le dual $\mathcal{V}_\lambda^\vee$ plutôt que $\mathcal{V}_\lambda$. Remarquons que comme $\mathcal{V}_\lambda^\vee = \mathcal{V}_{-w_0\,\lambda}$, le complexe $\mathrm{DR}(\mathcal{V}_\lambda^\vee)$ est canoniquement muni d'une filtration de Hodge.

Rappelons que $W_{\mathrm{GL}_g} = \mathfrak{S}_g$ et que $W_{\mathrm{Gsp}_{2g}} = \mathfrak{S}_g \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^g$. Il existe donc une injection naturelle de W_{GL_g} dans $W_{\mathrm{Gsp}_{2g}}$. Notons W le système de représentants de Kostant de

$$W_{\mathrm{GL}_g} \setminus W_{\mathrm{Gsp}_{2g}}\ ,$$

qui est un sous-ensemble fini de cardinal 2^g de $W_{\mathrm{Gsp}_{2g}}$. Considérons la fonction $l : W \to \mathbb{N}$ obtenue en restreignant la fonction longueur de $W_{\mathrm{Gsp}_{2g}}$ relative à l'ensemble de racines simples déterminé par B'.

Remarque 3.4.1. — Notons $d = g(g+1)/2$. D'après [**FC90**, p. 229], on a $l\,(W) \subset [0, d]$ et d admet $w_1 w_0$ comme unique antécédant.

Notons $\rho = (g, g-1, \cdots, 2, 1; 0) \in X^*(T') \otimes \mathbb{Z}[1/2]$ qui est la demi-somme des racines positives de GSp_{2g}. Introduisons l'action tordue du groupe de Weyl $W_{\mathrm{GSp}_{2g}}$ sur $X^*(T')$ définie par $w \cdot \lambda = w\lambda + w\rho - \rho$. Rappelons que $X_*(T')$ s'identifie canoniquement au sous-module de $\mathbb{Z}^{2g}$ formé des élements $(\alpha_1, \cdots, \alpha_g; \delta_1, \cdots, \delta_g)$ vérifiant $\alpha_i + \delta_i = \alpha_j + \delta_j$ pour tous $1 \leq i, j \leq g$. Notons $H = (0, \cdots, 0; -1, \cdots, -1) \in X_*(T')$. Mokrane, Tilouine et Polo ont prouvé le théorème suivant [**MT02**, 5.4.6].

Théorème 3.4.2. — *Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, le complexe $\mathrm{gr}^i_F\,\mathrm{DR}(\mathcal{V}_\lambda^\vee)$ est canoniquement quasi-isomorphe au complexe scindé*

$$\bigoplus_{w \in W \,\mid\, <w\cdot\lambda, H> = -i} \mathcal{W}^\vee_{w\cdot\lambda}[-l(w)]$$

Remarque 3.4.3. — Par définition de l'ensemble des représentants de Kostant W, lorsque λ est un poids dominant de GSp_{2g} et $w \in W$, si l'on écrit $w \cdot \lambda = (a_1, \cdots, a_g; c)$, le poids $(a_1, \cdots, a_g)$ est dominant pour GL_g. Cette remarque permet de donner un sens au faisceau localement libre $\mathcal{W}_{w\cdot\lambda}$.

3.5. Démonstration du théorème de relèvement. — Le théorème **3.2.1** résultera de la combinaison d'un théorème d'annulation dû à Ogus, du théorème de Shepherd-Barron **2.5.1** et du théorème **3.4.2** relatif au complexe BGG. Commençons par prouver l'annulation de groupes de cohomologie relatifs à certains modules à connexions.

Soit λ un poids dominant petit devant p pour GSp_{2g} et $i \in \mathbb{Z}$ un entier. Nous voulons annuler, sous certaines conditions, le groupe de cohomologie de type de Rham

$$\mathrm{H}^j\left(\bar{\mathcal{A}}_g^{\mathrm{parf}} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)\,,\, \omega^k(-D) \otimes \mathrm{gr}^i_F\,\mathrm{DR}(\mathcal{V}_\lambda^\vee)\right)\ ,$$

où $\bar{\mathcal{A}}_g^{\mathrm{parf}}$ désigne la compactification toroïdale associée à la décomposition du cône parfait et D son bord, et où j et k sont des entiers à préciser. C'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 3.5.1. — *Notons $\lambda = (a_1, \cdots, a_g; c)$ et $s = \sum_i a_i$. Rappelons que l'on a noté $d = g(g+1)/2$. Supposons $p > d + s$ et $n > 12$. Pour tous $j > d$, $k > 0$ et $i \in \mathbb{Z}$ on a*

$$\mathrm{H}^j\left(\bar{\mathcal{A}}_g^{\mathrm{parf}} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)\,,\, \omega^k(-D) \otimes \mathrm{gr}^i_F\,\mathrm{DR}(\mathcal{V}_\lambda^\vee)\right) \,=\, 0\,.$$

Démonstration. — D'après le théorème **3.4.2**, le faisceau $\omega^k(-D)$ est ample sur $\bar{\mathcal{A}}_g^{\mathrm{parf}}$ pour tout $k > 0$. L'énoncé d'annulation précédent résultera donc directement du théorème d'Ogus [**Og94**, 8.2.8] si nous prouvons que $\mathcal{V}_\lambda^\vee$ muni de sa filtration de Hodge et de son morphisme de Frobenius définit un F-T-cristal dans le sens de [**Og94**, 5.3.1] sur

$$\bar{\mathcal{A}}_g^{\mathrm{parf}} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)\,.$$

Le morphisme de Frobenius φ de $\mathcal{V}_\lambda^\vee$ que nous venons de mentionner s'obtient comme dans la démonstration du lemme **2.4.6** par descente du Frobenius log-cristallin agissant sur la cohomologie relative des compactifications de variétés de Kuga-Sato. D'après le lemme **2.4.6**, $\mathcal{V}_\lambda^\vee$ est localement libre donc sans p-torsion. Par conséquent, φ induit une structure de F-cristal sur $\mathcal{V}_\lambda^\vee$. De plus, toujours d'après le lemme **2.4.6**, les gradués de la filtration de Hodge de $\mathcal{V}_\lambda^\vee$ sont localement libres donc sans p-torsion. D'après la remarque [**Og94**, 3.2.4], cette filtration induit une structure de T-cristal dans le sens de [**Og94**, 3.2.1] sur $\mathcal{V}_\lambda^\vee$. Il reste à prouver que ces structures de F-cristal et de T-cristal sont compatibles, c'est-à-dire qu'elles vérifient la variante faisceautique du théorème de Mazur [**Ma72**] donnée dans la définition [**Og94**, 5.3.1]. On veut donc montrer que la réduction modulo p de la filtration de Hodge coïncide avec la filtration $\alpha(\varphi)$ définie dans [**Og94**, 5.2.8]. Remarquons d'ailleurs que $\alpha(\phi)$ a un sens car le F-cristal $\mathcal{V}_\lambda^\vee$ est admissible en vertu de [**Og94**, 5.2.9] et du lemme **2.4.6**. Il suffit de tester l'égalité de ces deux filtrations sur les points de la compactification toroïdale à valeurs dans des extensions finies de $\mathbb{Z}_p$. Il suffit donc de démontrer que, point par point, les valuations p-adiques des diviseurs élémentaires de φ sont égales aux nombres de Hodge de la filtration. D'après le théorème principal de [**Ma72**] ou [**Og94**, 7.5.3], cela est vrai sur l'ouvert dense $\mathcal{A}_g$ où les compactifications des variétés de Kuga-Sato sont des schémas abéliens. D'après [**Ka79**, 2.3.1], les valuations p-adiques des diviseurs élémentaires de φ ne peuvent qu'augmenter sur le complémentaire de $\mathcal{A}_g$ dans la compactification toroïdale. Comme le déterminant de $\mathcal{V}_\lambda^\vee$ est isomorphe au twist de Tate du log-cristal trivial

$$\mathcal{O}_{\bar{\mathcal{A}}_g^{\mathrm{parf}} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)\,/\,\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)}\left(\frac{s+c}{2}\right),$$

la valuation p-adique du déterminant de φ est constante et les valuations p-adiques des diviseurs élémentaires de φ sont donc constantes sur la compactification toroïdale. Par ailleurs, les nombres de Hodge de la filtration sont constants sur la compactification toroïdale d'après le lemme **2.4.6**. Ainsi, $\mathcal{V}_\lambda^\vee$ est bien un F-T-cristal pour φ et la filtration de Hodge. Ce F-T-cristal est clairement effectif [**Og94**, 5.2.2] et de largeur inférieure à s [**Og94**, 5.1.1]. On conclut en appliquant le théorème [**Og94**, 8.2.8] grâce à l'hypothèse $p > d + s$. On remarquera que les compactifications toroïdales, étant de nature toriques, sont de type Cartier sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ dans le sens de [**Ka89**, 4.8] et sont donc parfaitement lisses dans le sens de [**Og94**, 1.2.3]. □

Remarque 3.5.2. — Même lorsqu'elles sont à fibres équidimensionnelles, les compactifications toroïdales des variétés de Kuga-Sato ne sont pas de type Cartier sur les compactifications toroïdales de $\mathcal{A}_g$ lorsque $g > 1$. En effet, le morphisme défini dans [**Ka89**, 4.8] par factorisation du morphisme de Frobenius n'est pas exact. C'est pourquoi nous n'avons pu utiliser les théorèmes les plus généraux d'Ogus et avons dû montrer à la main l'existence d'une structure de F-T-cristal.

Remarque 3.5.3. — Le théorème d'Ogus [**Og94**, 8.2.8] n'est autre qu'un théorème d'annulation de type Kodaira à coefficients dans un F-T-cristal sur un log-schéma log-lisse et de type Cartier sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$. Lorsque tous les schémas en jeu sont lisses et les coefficients proviennent de la cohomologie de de Rham d'une famille semi-stable, ce théorème est dû à Illusie [**Ill90**, 4.16]. Lorsque les coefficients sont triviaux mais les log-schémas seulement supposés log-lisses et de type Cartier, ce théorème est dû à Kato [**Ka89**, 4.12] *modulo* le raisonnement du lemme [**DI87**, 2.9] dû à Raynaud, Deligne et Illusie. Nous avons eu besoin de toute la force du théorème d'Ogus car les compactifications toroïdales associées à la décomposition du cône parfait ne sont pas lisses lorsque $g \geq 4$ (*cf.* la remarque **2.2.2**). Le lecteur remarquera par contre que le théorème de Kato aurait suffit à traiter le cas sans coefficients, où $\lambda = 0$. Cela suffirait pour démontrer le relèvement des formes de Siegel scalaires cuspidales, associées à des poids μ du type $(k, \cdots, k)$.

Corollaire 3.5.4. — *Pour tous $p > d + s$, $n > 12$ et $k > 0$, on a*

$$\mathrm{H}^1\left(\bar{\mathcal{A}}_g^{\mathrm{parf}} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)\,,\, \omega^k(-D) \otimes \mathcal{W}^{\vee}_{(w_1 w_0)\cdot\lambda}\right) \;=\; 0\,.$$

Démonstration. — D'après la remarque **3.4.1**, $w_1 w_0 \in W$ est l'unique élement de longueur égale à d. Il suffit alors de combiner le théorème **3.4.2** avec la proposition **3.5.1** appliquée à $i = - < (w_1 w_0)\cdot\lambda, H >$. □

Proposition 3.5.5. — *Supposons $p > d$. Soit $\mu = (k_1, \cdots, k_g)$ un poids dominant pour GL_g vérifiant $k_g > g + 1$ et $\sum_i (k_i - k_g) < p - d$. Alors*

$$\mathrm{H}^1\left(\bar{\mathcal{A}}_g^{\mathrm{parf}} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)\,,\, \mathcal{W}_\mu(-D)\right) \;=\; 0\,.$$

Démonstration. — Il suffit de prouver qu'il existe un poids $\lambda = (a_1, \cdots, a_g; c)$ dominant pour GSp_{2g} et un entier $k > 0$ tel que si l'on pose $s = \sum_i a_i$, on ait $p > s+d$ et $\omega^k \otimes \mathcal{W}^{\vee}_{(w_1 w_0)\cdot\lambda} = \mathcal{W}_\mu$. Comme

$$\mathcal{W}^{\vee}_{(w_1 w_0)\cdot\lambda} = \mathcal{W}_{-w_0\lambda - w_0\rho + w_1\rho}$$

et $-w_0\rho + w_1\rho = (g+1, \cdots, g+1)$, on doit avoir $k_i = k + g + 1 + a_i$ pour tous $0 \leq i \leq g$. Puisqu'on doit avoir $a_g \geq 0$ et $k > 0$, il faut que $k_g > g + 1$ et le plus grand choix possible pour k est alors $k = k_g - g - 1$. On a alors $a_i = k_i - k_g$ pour tous $0 \leq i \leq g$. La condition $s + d < p$ se traduit bien par $\sum_i (k_i - k_g) < p - d$. □

Nous pouvons enfin démontrer le théorème de relèvement des formes modulaires cuspidales de Siegel vérifiant certaines hypothèses de poids.

*Démonstration de **3.2.1***. — Il suffit de démontrer le théorème **3.2.1** pour la décomposition du cône parfait. Il nous faut donc montrer que

$$\mathrm{H}^0\left(\bar{\mathcal{A}}_g^{\mathrm{parf}}\,,\, \mathcal{W}_\mu(-D)\right) \otimes_{\mathbb{Z}[1/n]} \mathbb{F}_p \;\longrightarrow\; \mathrm{H}^0\left(\bar{\mathcal{A}}_g^{\mathrm{parf}}\,,\, \mathcal{W}_\mu(-D) \otimes \mathbb{F}_p\right)$$

réalise un isomorphisme sous les hypothèses de **3.2.1**. D'après les théorèmes de changement de base habituels [**EGA 3**, 7.5.3, 7.7], il suffit de prouver que

$$\mathrm{H}^1\left(\bar{\mathcal{A}}_g^{\mathrm{parf}} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)\,,\, \mathcal{W}_\mu(-D)\right) \;=\; 0\,,$$

ce qui résulte de la proposition **3.5.5**. □

Remarque 3.5.6. — Récapitulons la signification et l'origine de l'hypothèse $\sum_i(k_i - k_g) < p - g(g+1)/2$ dans le théorème **3.2.1**. Cette hypothèse signifie que le poids $(k_1, \cdots, k_g)$ est translaté d'un poids petit devant p par le poids diagonal $(k_g, \cdots, k_g)$. Elle est nécessaire pour appliquer les théorèmes **3.4.2** et [**Og94**, 8.2.8]. Il paraît difficile de la supprimer, car la théorie des représentations de groupes algébriques comme la théorie de Hodge selon Deligne et Illusie se comportent pathologiquement lorsque les poids des représentations et les dimensions des variétés en jeu sont trop grands devant p.

Remarque 3.5.7. — Le lecteur aura remarqué que notre théorème s'étend trivialement au cas des variétés de Shimura PEL compactes. La démonstration se simplifie même considérablement, car l'équivalent du faisceau ω est ample et il n'y a pas besoin d'utiliser d'équivalent de [**SB06**]. De même, aucune complication combinatoire ou de log-géométrie n'est à craindre, et l'on peut utiliser les résultats de [**Ill90**] en lieu et place de ceux de [**Og94**]. C'est l'approche de [**LS10**].

4. Le théorème de classicité

4.1. Opérateurs de Hecke. — Dans le reste de l'article, p désigne un nombre premier qui ne divise pas n. Commençons par définir l'opérateur de Hecke T_p. Pour cela, notons $\mathcal{A}_{g,\mathcal{D}}$ le schéma sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/n])$ qui paramètre les classes d'isomorphismes de schémas abéliens G principalement polarisés de genre g munis d'une structure de niveau principale en n et d'un sous-groupe $H \subset G[p]$ fini, plat et lagrangien. Rappelons que la conditon « lagrangien » signifie que H est totalement isotrope de rang maximal, donc de rang p^g. Notons G et H le schéma abélien et le sous-groupe universel sur $\mathcal{A}_{g,\mathcal{D}}$. Comme H est lagrangien, le schéma abélien G/H est canoniquement muni d'une polarisation principale. Il existe ainsi deux morphismes d'oubli du niveau

$$p_1, p_2 \;:\; \mathcal{A}_{g,\mathcal{D}} \rightrightarrows \mathcal{A}_g$$

caractérisés par $p_1^* G = G$ et $p_2^* G = G/H$. Soit $\pi : G \to G/H$ l'isogénie canonique. Elle induit un morphisme

$$\pi^* \;:\; p_2^* \,\Omega \longrightarrow p_1^* \,\Omega$$

Après changement de base à $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/np])$, les morphismes p_1 et p_2 deviennent finis étales et π^* est un isomorphisme. Cet isomorphisme induit un morphisme

$$\pi^* \;:\; p_2^* \,\mathcal{W}_\mu \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/np]) \longrightarrow p_1^* \,\mathcal{W}_\mu \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/np])$$

pour tout poids dominant μ de GL_g. La définition suivante est plus que classique. Notons y bien le facteur de normalisation $p^{-g(g+1)/2}$ qui jouera un rôle important dans la suite.

Définition 4.1.1. — On définit l'opérateur T_p agissant sur $\mathrm{H}^0\left(\mathcal{A}_g \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Q}_p),\, \mathcal{W}_\mu\right)$ comme $p^{-g(g+1)/2}$ multiplié par la composée

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{H}^0\left(\mathcal{A}_g \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Q}_p),\, \mathcal{W}_\mu\right) & \longrightarrow & \mathrm{H}^0\left(\mathcal{A}_{g,\mathcal{D}} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Q}_p),\, p_2^* \,\mathcal{W}_\mu\right) \\
 & & \Big\downarrow \pi^* \\
\mathrm{H}^0\left(\mathcal{A}_g \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Q}_p),\, \mathcal{W}_\mu\right) & \xleftarrow[\mathrm{Tr}_{p_1}]{} & \mathrm{H}^0\left(\mathcal{A}_{g,\mathcal{D}} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Q}_p),\, p_1^* \,\mathcal{W}_\mu\right)
\end{array}$$

où Tr_{p_1} désigne la trace associé au morphisme fini étale p_1.

Notons S_1 le lieu ordinaire de $\mathcal{A}_g \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$, c'est-à-dire le sous-schéma ouvert sur lequel la variété abélienne universelle G est ordinaire. Choisissons un sous-schéma ouvert U de $\mathcal{A}_g \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ de fibre spéciale S_1 et notons S_∞ la complétion formelle de U le long de S_1. On obtient un schéma formel indépendant du choix de U appelé lieu ordinaire formel. Si l'on note $S_{\infty,\mathcal{D}} = \mathcal{A}_{g,\mathcal{D}} \times_{\mathcal{A}_g} S_\infty$, les morphismes $p_1, p_2 : S_{\infty,\mathcal{D}} \to S_\infty$ sont finis et plats. Notons $S_{\infty,\mathcal{D}} = \mathcal{A}_{g,\mathcal{D}} \times_{\mathcal{A}_g} S_\infty$.

Définition 4.1.2. — On définit l'opérateur T_p agissant sur $\mathrm{H}^0(S_\infty, \mathcal{W}_\mu) \otimes \mathbb{Q}_p$ comme $p^{-g(g+1)/2}$ multiplié par la composée

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}^0(S_\infty, \mathcal{W}_\mu) \otimes \mathbb{Q}_p \arrow[r] & \mathrm{H}^0(S_{\infty,\mathcal{D}}, p_2^* \mathcal{W}_\mu) \otimes \mathbb{Q}_p \arrow[d, "\pi^*"] \\ \mathrm{H}^0(S_\infty, \mathcal{W}_\mu) \otimes \mathbb{Q}_p & \mathrm{H}^0(S_{\infty,\mathcal{D}}, p_1^* \mathcal{W}_\mu) \otimes \mathbb{Q}_p \arrow[l, "\mathrm{Tr}_{p_1}"] \end{tikzcd}$$

où Tr_{p_1} désigne la trace associé au morphisme fini étale p_1.

Remarque 4.1.3. — Par quasi-compacité, $\mathrm{H}^0(S_\infty, \mathcal{W}_\mu) \otimes \mathbb{Q}_p$ est isomorphe au module des sections globales du faisceau rigide-analytique induit par $\mathcal{W}_\mu$ sur la fibre générique de S_∞ au sens de Raynaud. De même pour $S_{\infty,\mathcal{D}}$.

La proposition suivante provient de [**Pi10**, prop. A.1].

Proposition 4.1.4. — *Soit* $\mu = (k_1, \cdots, k_g)$ *un poids dominant de* GL_g *tel que* $k_g \geq g$. *L'opérateur* T_p *stabilise le sous-module* $\mathrm{H}^0(\mathcal{A}_g \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p), \mathcal{W}_\mu)$ *de* $\mathrm{H}^0(\mathcal{A}_g \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Q}_p), \mathcal{W}_\mu)$.

Démonstration. — Par densité du lieu ordinaire, $\mathrm{H}^0(\mathcal{A}_g \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p), \mathcal{W}_\mu)$ est l'intersection de $\mathrm{H}^0(\mathcal{A}_g \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Q}_p), \mathcal{W}_\mu)$ et de $\mathrm{H}^0(S_\infty, \mathcal{W}_\mu)$ dans $\mathrm{H}^0(S_\infty, \mathcal{W}_\mu) \otimes \mathbb{Q}_p$. Il suffit donc de prouver que T_p préserve $\mathrm{H}^0(S_\infty, \mathcal{W}_\mu)$ lorsque $k_g \geq g$. Soient $\bar{\mathbb{F}}_p$ une clôture algébrique de $\mathbb{F}_p$ et $y \in S_{\infty,\mathcal{D}}(\bar{\mathbb{F}}_p)$ un point géométrique. Notons i le rang étale du groupe fini et plat H_y ; c'est un entier compris entre 0 et g. Notons

$$\widehat{\mathcal{A}}^y_{g,\mathcal{D}}$$

le spectre de la complétion de l'hensélisé strict de $\mathcal{A}_{g,\mathcal{D}}$ en y. D'après [**Pi10**, lem. A.2, A.3], on a

$$\pi^* p_2^* \mathcal{W}_\mu|_{\widehat{\mathcal{A}}^y_{g,\mathcal{D}}} \subset p^{k_g(g-i)} p_1^* \mathcal{W}_\mu|_{\widehat{\mathcal{A}}^y_{g,\mathcal{D}}} \tag{4.1.A}$$

et

$$\mathrm{Tr}_{p_1}\left(\mathrm{H}^0(\widehat{\mathcal{A}}^y_{g,\mathcal{D}}, p_1^* \mathcal{W}_\mu)\right) \subset p^{i(i+1)/2}\, \mathrm{H}^0(\widehat{\mathcal{A}}^x_g, \mathcal{W}_\mu) \tag{4.1.B}$$

où $x = p_1(y)$ et $\widehat{\mathcal{A}}^x_g$ désigne le spectre de la complétion de l'hensélisé strict de $\mathcal{A}_g$ en x. On en déduit que T_p stabilise $\mathrm{H}^0(S_\infty, \mathcal{W}_\mu)$ lorsque

$$k_g(g-i) \geq \frac{g(g+1)}{2} - \frac{i(i+1)}{2}$$

pour tout entier $0 \leq i \leq g$. Il suffit donc que $k_g \geq (g+i+1)/2$ pour tout $0 \leq i \leq g-1$ donc que $k_g \geq g$. $\square$

Remarque 4.1.5. — Les égalités (**4.1**.A) et (**4.1**.B) peuvent s'interpréter en termes de la fonction « degré » de Fargues [**Fa09**]. L'égalité (**4.1**.A) résulte aisément du fait que le degré au sens de Fargues du groupe fini et plat

$$H|_{\widehat{\mathcal{A}}^y_{g,\mathcal{D}}}$$

est $g-i$. L'égalité (**4.1**.B) peut s'obtenir à partir de [**Fa09**, prop. 1]. En effet, d'après cette proposition, le plus grand exposant d'une puissance de p divisant l'image de

$$\mathrm{Tr}_{p_1} \,:\, \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{A}}^y_{g,\mathcal{D}}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{A}}^x_g}$$

est le degré au sens de Fargues du morphisme $\widehat{\mathcal{A}}^y_{g,\mathcal{D}} \to \widehat{\mathcal{A}}^x_g$ qui est fini, plat, étale sur $\mathbb{Q}_p$ et syntomique. D'après la théorie de Serre-Tate, ce morphisme est isomorphe à une isogénie entre tores formels dont le noyau est $\mu_p^{i(i+1)/2}$. Cela explique le facteur $p^{i(i+1)/2}$ dans (**4.1**.B).

Définissons à présent l'opérateur U_p agissant sur $\mathrm{H}^0(S_\infty,\, \mathcal{W}_\mu)\otimes\mathbb{Q}_p$. Notons pour cela $S^{\mathrm{et}}_{\infty,\mathcal{D}}$ la composante connexe de $S_{\infty,\mathcal{D}}$ sur laquelle le sous-groupe universel H est étale.

Définition 4.1.6. — L'opérateur U_p agissant sur $\mathrm{H}^0(S_\infty,\, \mathcal{W}_\mu)\otimes\mathbb{Q}_p$ est $p^{-g(g+1)/2}$ multiplié par la composée

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^0(S_\infty\,,\, \mathcal{W}_\mu)\otimes\mathbb{Q}_p \arrow[r] & \mathrm{H}^0\left(S^{\mathrm{et}}_{\infty,\mathcal{D}}\,,\, p_2^*\,\mathcal{W}_\mu\right)\otimes\mathbb{Q}_p \arrow[d, "\pi^*"] \\
\mathrm{H}^0(S_\infty\,,\, \mathcal{W}_\mu)\otimes\mathbb{Q}_p & \mathrm{H}^0\left(S^{\mathrm{et}}_{\infty,\mathcal{D}}\,,\, p_1^*\,\mathcal{W}_\mu\right)\otimes\mathbb{Q}_p \arrow[l, "\mathrm{Tr}_{p_1}"']
\end{tikzcd}$$

La démonstration de la proposition **4.1.4** prouve aussitôt l'énoncé suivant (*cf.* aussi [**Pi10**, coro. A.1 et A.2]).

Proposition 4.1.7. — *Soit* $\mu = (k_1, \cdots, k_g)$ *un poids dominant de* GL_g*. L'opérateur* U_p *stabilise le sous-module* $\mathrm{H}^0(S_\infty,\, \mathcal{W}_\mu)$*. Si* $k_g > g$*, les opérateurs* T_p *et* U_p *de* $\mathrm{H}^0(S_\infty,\, \mathcal{W}_\mu)$ *sont congrus modulo* p*.*

4.2. Comportement sur le lieu non-ordinaire. — Par définition, le lieu non-ordinaire est le complémentaire réduit du lieu ordinaire dans $\mathcal{A}_g \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$.

Proposition 4.2.1. — *Soit* $\mu = (k_1, \cdots, k_g)$ *un poids dominant pour* GL_g *tel que* $k_g > g+p$ *et* $f \in \mathrm{H}^0(\mathcal{A}_g \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p),\, \mathcal{W}_\mu)$*. Alors* $T_p \cdot f \bmod p \in \mathrm{H}^0(\mathcal{A}_g \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p),\, \mathcal{W}_\mu)$ *est nulle sur le lieu non-ordinaire.*

Démonstration. — Soit $x \in \mathcal{A}_g(\bar{\mathbb{F}}_p)$ un point géométrique non-ordinaire et $\tilde{x} \in \mathcal{A}_g(W(\bar{\mathbb{F}}_p))$ un relèvement à valeurs dans les vecteurs de Witt. Un tel relèvement existe par lissité de $\mathcal{A}_g$. Notons $\bar{\mathbb{Z}}_p$ la clôture intégrale de $\mathbb{Z}_p$ dans une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$ contenant $W(\bar{\mathbb{F}}_p)$. Soit $\tilde{y} \in \mathcal{A}_{g,\mathcal{D}}(\bar{\mathbb{Z}}_p)$ un point dans la fibre $p_1^{-1}(\tilde{x})$. Il suffit de prouver qu'il existe un rationnel $\delta > 0$ indépendant du choix de x, $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ tel que l'image de

$$\mathrm{Tr}_{p_1} \circ \pi^* \,:\, \mathrm{H}^0(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\tilde{y}}),\, p_2^*\,\mathcal{W}_\mu) \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\tilde{x}} \otimes_{W(\bar{\mathbb{F}}_p)} \bar{\mathbb{Z}}_p),\, \mathcal{W}_\mu)$$

soit incluse dans $\subset p^{g(g+1)/2+\delta}\,\mathrm{H}^0(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\tilde{x}} \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p),\, \mathcal{W}_\mu)$. Ici, p^δ désigne n'importe quel élément de $\bar{\mathbb{Z}}_p$ de valuation p-adique égale à δ. Comme les schémas en jeu sont séparés, il suffit de prouver cela lorsque x parcourt un ouvert dense du lieu non-ordinaire. Il est donc loisible de se restreindre au sous-schéma localement fermé V de $\mathcal{A}_g \times \operatorname{Spec}(\mathbb{F}_p)$ où le p-rang du schéma abélien universel G est $g-1$. D'après [**Oo91**], il est bien dense dans le lieu non-ordinaire. Supposons désormais $x \in V(\bar{\mathbb{F}}_p)$.

Le groupe H induit un groupe fini et plat $H_{\tilde{y}}$ sur $\operatorname{Spec}(\bar{\mathbb{Z}}_p)$. Notons i son rang étale, qui est un entier compris entre 0 et $g-1$. D'après [**Pi10**, p. 46], le degré au sens de Fargues de $H_{\tilde{y}}$ est $g-1-i+1/(p+1)$. En tenant compte de la remarque **4.1.5**, on généralise l'égalité (**4.1**.A) en

$$\pi^* p_2^* \mathcal{W}_\mu|_{\tilde{y}} \subset p^{k_g(g-1-i+1/(p+1))} p_1^* \mathcal{W}_\mu|_{\tilde{y}},$$

ce qui suffit à conclure dans le cas $g = 1$. Lorsque $g \geq 2$, il faut également tenir compte des puissances de p apparaissant dans l'image de

$$\operatorname{Tr}_{p_1} : \mathcal{O}_{\tilde{y}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\tilde{x}} \otimes_{W(\bar{\mathbb{F}}_p)} \bar{\mathbb{Z}}_p .$$

Là encore, il suffit de minorer ces puissances de p lorsque x se factorise par un ouvert étale d'image dense dans V. Nous allons choisir un ouvert étale « proche du bord ». Soit Σ une décomposition polyédrale admissible de C_g et

$$\bar{\mathcal{A}}_g^\Sigma$$

la compactification toroïdale associée à Σ. L'ensemble des strates de bord de $\bar{\mathcal{A}}_g^\Sigma$ sur lesquelles le schéma semi-abélien canonique G est de rang torique $g-1$ forme un diviseur de

$$\bar{\mathcal{A}}_g^\Sigma .$$

D'après [**FC90**, ch. IV], il existe un voisinage étale W de ce diviseur dans $\bar{\mathcal{A}}_g^\Sigma$ qui admet une description explicite que l'on rappellera plus bas. On appelle W l'union des cartes locales associées au dégénérescences de rang torique $g-1$. On pose alors

$$U = V \times_{\bar{\mathcal{A}}_g^\Sigma} W$$

qui est un ouvert étale de V. D'après le corollaire [**VG99**, 1.7], toute sous-variété de $\mathcal{A}_g \times \operatorname{Spec}(\mathbb{F}_p)$ de codimension $< g$ rencontre le bord des compactifications et d'après [**Oo91**], V est purement de codimension 1 dans $\mathcal{A}_g \times \operatorname{Spec}(\mathbb{F}_p)$. On en déduit que si $g \geq 2$, l'ouvert étale U est d'image dense dans V. Supposons désormais que $\tilde{x}$ se factorise par U. D'après [**FC90**, IV.3],

$$W \times_{\bar{\mathcal{A}}_g^\Sigma} \mathcal{A}_g$$

est isomorphe localement pour la topologie étale à un schéma $\mathcal{M}$ qui se dévisse en

$$\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A} ,$$

où $\mathcal{A} \simeq \mathcal{A}_1$ est isomorphe à la courbe modulaire non compactifiée de niveau principal en n, où $\mathcal{B} \to \mathcal{A}$ est un schéma abélien de genre $g-1$ et où $\mathcal{M} \to \mathcal{B}$ est un torseur sous un tore de dimension $g(g-1)/2$. De même, d'après [**St10**, 1.4.6], la composante connexe de

$$W \times_{\bar{\mathcal{A}}_g^\Sigma} \mathcal{A}_{g,\mathcal{D}}$$

par laquelle $\tilde{y}$ se factorise est isomorphe localement pour la topologie étale à un schéma $\mathcal{M}_{\mathcal{D}}^i$ qui se dévisse en

$$\mathcal{M}_{\mathcal{D}}^i \longrightarrow \mathcal{B}_{\mathcal{D}}^i \longrightarrow \mathcal{A}_{\mathcal{D}}^i ,$$

où $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}^i \simeq \mathcal{A}_{1,\mathcal{D}}$ est isomorphe à la courbe modulaire non compactifiée de niveau principal en n et de niveau parahorique en p, où $\mathcal{B}_{\mathcal{D}}^i \to \mathcal{A}_{\mathcal{D}}^i$ est un schéma abélien de genre $g-1$ et où

$\mathcal{M}_{\mathcal{D}}^i \to \mathcal{B}_{\mathcal{D}}^i$ est un torseur sous un tore de dimension $g(g-1)/2$. Le morphisme d'oubli du niveau

$$p_1 \ : \ W \times_{\bar{\mathcal{A}}_g^\Sigma} \mathcal{A}_{g,\mathcal{D}} \longrightarrow W \times_{\bar{\mathcal{A}}_g^\Sigma} \mathcal{A}_g$$

correspond *via* les isomorphismes précédents à un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_{\mathcal{D}}^i \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{B}_{\mathcal{D}}^i \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{A}_{\mathcal{D}}^i \arrow[d] \\ \mathcal{M} \arrow[r] & \mathcal{B} \arrow[r] & \mathcal{A} \end{tikzcd}$$

où $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}^i \to \mathcal{A}$ est le morphisme habituel d'oubli du niveau sur les courbes modulaires, qui consiste à oublier le sous-groupe universel H_1, où $\mathcal{B}_{\mathcal{D}}^i \to \mathcal{B} \times_{\mathcal{A}} \mathcal{A}_{\mathcal{D}}^i$ est une isogénie entre schémas abéliens de noyau $\mathrm{Hom}(H_1, \mu_p^i)$ et où $\mathcal{M}_{\mathcal{D}}^i \to \mathcal{M} \times_{\mathcal{B}} \mathcal{B}_{\mathcal{D}}^i$ est localement isomorphe à une isogénie entre tores de noyau

$$\mu_p^{i(i+1)/2}.$$

D'après la remarque **4.1.5**, le meilleur exposant d'une puissance de p par laquelle l'image de

$$\mathrm{Tr}_{p_1} \ : \ \mathcal{O}_{\tilde{y}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\tilde{x}} \otimes_{W(\bar{\mathbb{F}}_p)} \bar{\mathbb{Z}}_p$$

est divisible coïncide avec le degré au sens de Fargues de la restriction en $\tilde{y}$ du morphisme

$$W \times_{\bar{\mathcal{A}}_g^\Sigma} \mathcal{A}_{g,\mathcal{D}} \to W \times_{\bar{\mathcal{A}}_g^\Sigma} \mathcal{A}_g$$

qui est bien fini, plat, étale sur $\mathbb{Q}_p$ et syntomique. Mais le degré de la restriction en $\tilde{y}$ de H_1 est $1/(p+1)$ donc le degré de $\mathcal{B}_{\mathcal{D}}^i \to \mathcal{B} \times_{\mathcal{A}} \mathcal{A}_{\mathcal{D}}^i$ est $ip/(p+1)$, et le degré de $\mathcal{M}_{\mathcal{D}}^i \to \mathcal{M} \times_{\mathcal{B}} \mathcal{B}_{\mathcal{D}}^i$ est $i(i+1)/2$. Ainsi, l'image de

$$\mathrm{Tr}_{p_1} \ : \ \mathcal{O}_{\tilde{y}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\tilde{x}} \otimes_{W(\bar{\mathbb{F}}_p)} \bar{\mathbb{Z}}_p$$

est divisible par $p^{i(i+1)/2+pi/(p+1)}$. Finalement, pour que l'image de T_p modulo p soit nulle sur le lieu non-ordinaire, il suffit que pour tout $0 \leq i \leq g-1$,

$$k_g \left(g - 1 - i + \frac{1}{p+1} \right) > \frac{g(g+1)}{2} - \frac{i(i+1)}{2} - \frac{ip}{p+1}.$$

Posons $j = g-1-i$. On trouve comme condition suffisante

$$k_g > g - \frac{1}{2} \frac{(j+1)(j(p+1)-2p)}{1+j(p+1)}$$

Mais $j(p+1) - 2p = j + p(j-2) \geq -2p$ pour tout entier $j \geq 0$ donc *a fortiori* pour tout entier $0 \leq j \leq g-1$. Ainsi il suffit bien que $k_g > g+p$ pour que l'image de T_p modulo p soit nulle sur le lieu non-ordinaire. □

Remarque 4.2.2. — Le lecteur trouvera une proposition analogue dans [**Pi10**, prop. A.5] lorsque k_g satisfait à des hypothèses plus restrictives. En effet, l'estimation de divisibilité par p de [**Pi10**] ne tient pas compte des puissances de p apparaissant dans la trace de p_1, contrairement à la nôtre. La borne $k_g > g+p$ sera importante pour nous.

Remarque 4.2.3. — Soit Σ une décomposition polyédrale admissible de C_g. Notons $\bar{\mathcal{A}}_g^\Sigma$ la compactification toroïdale associée à Σ et D le bord muni de sa structure schématique réduite. Il est clair d'après la définition que T_p stabilise les sous-espaces vectoriels

$$\mathrm{H}^0\left(\bar{\mathcal{A}}_g^\Sigma \times \mathbb{Q}_p,\ \mathcal{W}_\mu\right)$$

et

$$\mathrm{H}^0\left(\bar{\mathcal{A}}_g^{\Sigma} \times \mathbb{Q}_p,\, \mathcal{W}_\mu(-D)\right)$$

de $\mathrm{H}^0\left(\mathcal{A}_g \times \mathbb{Q}_p,\, \mathcal{W}_\mu\right)$. On en déduit que les propositions **4.1.4** et **4.2.1** s'étendent au cas des formes modulaires cuspidales. De même, notons $\bar{S}_1^{\Sigma}$ le lieu ordinaire compactifié de $\bar{\mathcal{A}}_g^{\Sigma} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$, c'est-à-dire l'ouvert où le schéma semi-abélien canonique G est ordinaire. Choisissons un ouvert U de

$$\bar{\mathcal{A}}_g^{\Sigma} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$$

de fibre spéciale égale à $\bar{S}_1^{\Sigma}$ et notons $\bar{S}_\infty^{\Sigma}$ la complétion formelle p-adique de U, qu'on appelle lieu ordinaire formel compactifié. L'opérateur U_p agissant sur

$$\mathrm{H}^0\left(S_\infty,\, \mathcal{W}_\mu\right) \otimes \mathbb{Q}_p$$

stabilise les sous-espaces vectoriels $\mathrm{H}^0\left(\bar{S}_\infty^{\Sigma},\, \mathcal{W}_\mu\right) \otimes \mathbb{Q}_p$ et $\mathrm{H}^0\left(\bar{S}_\infty^{\Sigma},\, \mathcal{W}_\mu(-D)\right) \otimes \mathbb{Q}_p$. On en déduit que la proposition **4.1.7** s'étend au cas des formes modulaires cuspidales définies sur le lieu ordinaire formel compactifié.

4.3. Formes modulaires ordinaires. — Soit Σ une décomposition polyédrale admissible de C_g. Notons $\bar{\mathcal{A}}_g^{\Sigma}$ la compactification toroïdale associée à Σ et D le bord muni de sa structure schématique réduite. Notons

$$\bar{S}_1^{\Sigma}$$

le lieu ordinaire compactifié et $\bar{S}_\infty^{\Sigma}$ le lieu ordinaire formel compactifié. Soit $\mu = (k_1, \cdots, k_g)$ un poids dominant pour GL_g. D'après [**Hi02**, coro. 3.3] (voir aussi [**Pi10**, th. 6.2]), le morphisme de changement de base

$$\mathrm{H}^0\left(\bar{S}_\infty^{\Sigma},\, \mathcal{W}_\mu(-D)\right) \longrightarrow \mathrm{H}^0\left(\bar{S}_1^{\Sigma},\, \mathcal{W}_\mu(-D)\right)$$

est surjectif. Autrement dit, les formes modulaires cuspidales définies sur le lieu ordinaire se relèvent en caractéristique nulle. Ainsi, en vertu de la proposition **4.1.7**, on peut définir par réduction modulo p une action de U_p sur

$$\mathrm{H}^0\left(\bar{S}_1^{\Sigma},\, \mathcal{W}_\mu(-D)\right).$$

De même, si $k_g \geq g$ on peut définir par réduction modulo p une action de T_p sur

$$\mathrm{H}^0\left(\bar{S}_1^{\Sigma},\, \mathcal{W}_\mu(-D)\right)$$

grâce à la proposition **4.1.4**. Lorsque $k_g \geq g+1$, les opérateurs T_p et U_p agissant sur $\mathrm{H}^0\left(\bar{S}_1^{\Sigma},\, \mathcal{W}_\mu(-D)\right)$ sont égaux d'après la proposition **4.1.7**.

Remarque 4.3.1. — On aurait en fait pu définir directement l'action de U_p en caractéristique p, sans recourir au corollaire [**Hi02**, coro. 3.3].

Définition 4.3.2. — Supposons $k_g \geq 0$. On dit qu'un élement $f \in \mathrm{H}^0\left(\bar{S}_\infty^{\Sigma},\, \mathcal{W}_\mu(-D)\right)$ est propre et ordinaire pour U_p s'il existe $\alpha \in \bar{\mathbb{Z}}_p^{\times}$ vérifiant $U_p \cdot f = \alpha f$. On dit qu'un élement $g \in \mathrm{H}^0\left(\bar{S}_1^{\Sigma},\, \mathcal{W}_\mu(-D)\right)$ est propre et ordinaire pour U_p s'il existe $\beta \in \bar{\mathbb{F}}_p^{\times}$ vérifiant $U_p \cdot g = \beta g$.

Notons $\mathrm{H}^0_{\mathrm{ord}}\left(\bar{S}_\infty^{\Sigma},\, \mathcal{W}_\mu(-D)\right)$ le sous-$\mathbb{Z}_p$-module de $\mathrm{H}^0\left(\bar{S}_\infty^{\Sigma},\, \mathcal{W}_\mu(-D)\right)$ engendré par les formes propres et ordinaires pour U_p. De même pour $\mathrm{H}^0_{\mathrm{ord}}\left(\bar{S}_1^{\Sigma},\, \mathcal{W}_\mu(-D)\right)$. D'après [**Hi02**, coro. 3.3], $\mathrm{H}^0_{\mathrm{ord}}\left(\bar{S}_1^{\Sigma},\, \mathcal{W}_\mu(-D)\right)$ est l'image de $\mathrm{H}^0_{\mathrm{ord}}\left(\bar{S}_\infty^{\Sigma},\, \mathcal{W}_\mu(-D)\right)$ par l'application de réduction modulo p.

Proposition 4.3.3. — *Supposons $k_g > g+1$. Toute forme $f \in \mathrm{H}^0_{\mathrm{ord}}\left(\bar{S}_1^{\Sigma},\, \mathcal{W}_\mu(-D)\right)$ s'étend à $\bar{\mathcal{A}}_g^{\Sigma} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$.*

Démonstration. — On peut supposer f propre et ordinaire pour U_p de valeur propre $\alpha \in \bar{\mathbb{F}}_p^{\times}$. Comme $k_g \geq g+1$, on a $T_p \cdot f = \alpha f$ d'après la proposition **4.1.7**. Soit

$$H \in \mathrm{H}^0\left(\bar{\mathcal{A}}_g^{\Sigma} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p),\, \omega^{p-1}\right)$$

l'invariant de Hasse. Rappelons que le lieu d'annulation de H est le lieu non-ordinaire et que H s'annule avec multiplicité un le long de ce diviseur d'après un théorème d'Igusa [**Pi10**, th. A.4]. Il existe un plus petit entier $t \geq 0$ tel $H^t f$ s'étende à $\bar{\mathcal{A}}_g^{\Sigma} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$. Montrons par l'absurde que $t = 0$. Si $t \geq 1$, la forme modulaire $H^t f$ est de poids strictement supérieur à $g+p$. D'après la proposition **4.2.1**, la forme modulaire $T_p \cdot (H^t f)$ est nulle sur le lieu non-ordinaire, donc divisible par H dans $\mathrm{H}^0\left(\bar{\mathcal{A}}_g^{\Sigma} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p),\, \mathcal{W}_\mu \otimes \omega^{t(p-1)}\right)$ en vertu du théorème d'Igusa mentionné plus haut. Mais un calcul usuel de développement de Fourier-Jacobi montre que la multiplication par H commute à T_p, donc que $H^t f = H^t\,(T_p \cdot f)/\alpha = T_p \cdot (H^t f)/\alpha$. Ainsi, $H^t f$ est divisible par H dans $\mathrm{H}^0\left(\bar{\mathcal{A}}_g^{\Sigma} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p),\, \mathcal{W}_\mu \otimes \omega^{t(p-1)}\right)$, ce qui contredit la minimalité de t. □

Notons $\mathrm{H}^0_{\mathrm{ord}}\left(\bar{\mathcal{A}}_g^{\Sigma} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p),\, \mathcal{W}_\mu(-D)\right)$ l'intersection de

$$\mathrm{H}^0\left(\bar{\mathcal{A}}_g^{\Sigma} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p),\, \mathcal{W}_\mu(-D)\right)$$

et de

$$\mathrm{H}^0_{\mathrm{ord}}\left(\bar{S}_\infty^{\Sigma},\, \mathcal{W}_\mu(-D)\right)$$

dans $\mathrm{H}^0\left(\bar{S}_\infty^{\Sigma},\, \mathcal{W}_\mu(-D)\right)$. De même, notons

$$\mathrm{H}^0_{\mathrm{ord}}\left(\bar{\mathcal{A}}_g^{\Sigma} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p),\, \mathcal{W}_\mu(-D)\right)$$

l'intersection de

$$\mathrm{H}^0\left(\bar{\mathcal{A}}_g^{\Sigma} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p),\, \mathcal{W}_\mu(-D)\right)$$

et de

$$\mathrm{H}^0_{\mathrm{ord}}\left(\bar{S}_1^{\Sigma},\, \mathcal{W}_\mu(-D)\right)$$

dans $\mathrm{H}^0\left(\bar{S}_1^{\Sigma},\, \mathcal{W}_\mu(-D)\right)$.

Proposition 4.3.4. — *Supposons $n > 12$, $p > g(g+1)/2$, $k_g > g+1$ et $\sum_i (k_i - k_g) < p - g(g+1)/2$. Le morphisme de restriction*

$$\mathrm{H}^0_{\mathrm{ord}}\left(\bar{\mathcal{A}}_g^{\Sigma} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p),\, \mathcal{W}_\mu(-D)\right) \longrightarrow \mathrm{H}^0_{\mathrm{ord}}\left(\bar{S}_\infty^{\Sigma},\, \mathcal{W}_\mu(-D)\right)$$

réalise un isomorphisme.

Démonstration. — Ce morphisme de restriction est clairement injectif. Montrons sa surjectivité. D'après le théorème **3.2.1**,

$$\mathrm{H}^0_{\mathrm{ord}}\left(\bar{\mathcal{A}}_g^{\Sigma} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p),\, \mathcal{W}_\mu(-D)\right) \otimes \mathbb{F}_p \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0_{\mathrm{ord}}\left(\bar{\mathcal{A}}_g^{\Sigma} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p),\, \mathcal{W}_\mu(-D)\right)$$

et d'après [**Hi02**, coro. 3.3],

$$\mathrm{H}^0_{\mathrm{ord}}\left(\bar{S}_\infty^{\Sigma},\, \mathcal{W}_\mu(-D)\right) \otimes \mathbb{F}_p \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0_{\mathrm{ord}}\left(\bar{S}_1^{\Sigma},\, \mathcal{W}_\mu(-D)\right) .$$

On conclut grâce au lemme de Nakayama topologique en appliquant la proposition **4.3.3**. □

Remarque 4.3.5. — Il est possible de remplacer l'hypothèse $n > 12$ par $n \geq 3$ en tenant compte de la remarque **3.2.2**, quitte à exclure quelques valeurs de p. De même, on peut généraliser la proposition **4.3.4** à des sous-groupes de niveau non nécessairement principaux en n.

La proposition **4.3.4** permet de démontrer immédiatement un théorème effectif de classicité en théorie de Hida. Nous renvoyons par exemple le lecteur à [**Pi10**, déf. 4.3 et 5.1] pour la définition des formes modulaires de Siegel p-adiques ordinaires.

Théorème 4.3.6. — *Supposons $n > 12$ et $p > g(g+1)/2$. Soit $\mu = (k_1, \cdots, k_g)$ un poids dominant pour GL_g tel que $k_g > g+1$, que $k_1 > k_2 > \cdots > k_g$ et que $\sum_i (k_i - k_g) < p - g(g+1)/2$. Toute forme modulaire de Siegel p-adique, ordinaire, cuspidale, de niveau principal en $n > 12$ et de poids μ est classique, donc provient d'un unique élement de $\mathrm{H}^0\left(\bar{\mathcal{A}}_g^{\Sigma} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p),\, \mathcal{W}_\mu(-D)\right)$.*

Démonstration. — D'après [**Pi10**, coro. 6.2], toute forme modulaire de Siegel p-adique, ordinaire, cuspidale, de poids $\mu = (k_1, \cdots, k_g)$ dominant pour GL_g tel que $k_1 > k_2 > \cdots > k_g$ provient d'un unique élement de $\mathrm{H}^0_{\mathrm{ord}}\left(\bar{S}_\infty^{\Sigma},\, \mathcal{W}_\mu(-D)\right)$. Il suffit alors d'appliquer la proposition **4.3.4**. □

Remarque 4.3.7. — Ce théorème admet diverses généralisations. On peut tout d'abord l'étendre aux formes P-ordinaires [**Pi10**, déf. 5.1], où P désigne un sous-parabolique standard supérieur de GL_g. Dans ce cas, l'hypothèse de régularité $k_1 > \cdots > k_g$ est remplacée par une hypothèse plus faible de P-régularité [**Pi10**, part. 2]. On peut ensuite supposer $n \geq 3$ en excluant quelques valeurs de p, comme nous l'avons déjà expliqué dans les remarques **3.2.2** et **4.3.5**. De même, on peut considérer des structures de niveau non principales en n.

Remarque 4.3.8. — Lorsque $g = 1$, on retrouve exactement les résultats de Jochnowitz [**Jo82**]. En ce sens, certaines des hypothèses du théorème **4.3.6** paraissent optimales. C'est notamment le cas de l'hypothèse $k_g > g + 1$, comme on peut déjà le voir avec le cas de GL_2 car les formes modulaires usuelles p-adiques de poids $g+1 = 2$ ne sont pas nécessairement classiques sans niveau en p. Rappelons d'ailleurs pour mémoire que $\mu = (k_1, \cdots, k_g)$ est un poids cohomologique si et seulement $k_g \geq g + 1$. Il ne paraît pas possible de se débarasser de l'hypothèse de cuspidalité et cela est relié à la conjecture de Bloch-Kato. Il est par contre tentant de penser qu'on peut se débarrasser de l'hypothèse $\sum_i (k_i - k_g) < p - g(g+1)/2$, mais nos méthodes ne permettent pas de s'en affranchir simplement (*cf.* remarque **3.5.6**).

Remarque 4.3.9. — Hida a montré une version moins effective du théorème **4.3.6** (voir [**Hi02**, th. 7.1.(4)] et [**Pi10**, th. 6.6]) dans laquelle il suppose $(k_1, \cdots, k_g)$ assez loin de l'origine sur la droite vectorielle de $\mathbb{Z}^g$ passant par $(k_1, \cdots, k_g)$; « assez loin de l'origine » n'est pas précisément quantifié. Par contre, aucune hypothèse du type $\sum_i (k_i - k_g) < p - g(g+1)/2$ n'apparaît dans ses travaux. Lorsque $g = 2$, Pilloni a prouvé dans [**Pi10b**] un théorème de classicité effectif avec niveau en p, sans aucune hypothèse du type $\sum_i (k_i - k_g) < p - g(g+1)/2$. Dans [**Ur10**], Urban a montré en théorème de classicité valable pour tout g (et dans beaucoup d'autres cas). Toutefois son énoncé ne concerne que la classicité du système de valeurs propres de Hecke, ce qui n'implique pas d'énoncé de classicité pour les formes modulaires de Siegel en l'absence d'un théorème de multiplicité un pour les groupes symplectiques.

Références

[DI87] P. Deligne & L. Illusie – *Relèvements modulo p^2 et décomposition du complexe de de Rham*, Invent. Math. **89** (1987), n° 2, p. 247–270.

[EGA 3] A. Grothendieck – *Éléments de géométrie algébrique. III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents. II.*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **17** (1963).

[FC90] G. Faltings & C.-L. Chai – *Degeneration of abelian varieties*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. 22 (1990), Springer, Berlin.

[Fa09] L. Fargues – *La filtration de Harder-Narasimhan des schémas en groupes finis et plats*, prépublication (2009), à paraître dans J. Reine Angew. Math.

[Hi02] H. Hida – *Control theorems of coherent sheaves on Shimura varieties of PEL type*, J. Inst. Math. Jussieu **1**, (2002), p. 1-76.

[Hu00] K. Hulek – *Nef divisors on moduli spaces of abelian varieties*, *in* « Complex analysis and algebraic geometry », de Gruyter (2000), Berlin.

[HS04] K. Hulek & G. K. Sankaran – *The nef cone of toroidal compactifications of $\mathcal{A}_4$*, Proc. London Math. Soc. **88** (2004), n° 3, p. 659-704.

[Ill90] L. Illusie – *Réduction semi-stable et décomposition de complexes de de Rham à coefficients*, Duke Math. J. **60** (1990), n° 1, p. 139–185.

[Ja90] D. O. Jaquet – *Domaines de Voronoï et algorithme de réduction des formes quadratiques définies positives*, Sém. Théor. Nombres Bordeaux (2) **2** (1990), n° 1, p. 163–215.

[Jo82] N. Jochnowitz – *A study of the local components of the Hecke algebra mod ℓ*, Trans. Am. Math. Soc. **270** (1982), p. 253-267.

[Ka89] K. Kato – *Logarithmic structures of Fontaine-Illusie*, *in* « Algebraic analysis, geometry, and number theory », Johns Hopkins Univ. Press (1989), p. 191–224, Baltimore, MD.

[Ka72] N. Katz – *p-adic properties of modular schemes and modular forms, in* « Modular functions of one variable III », Lecture Notes in Mathematics, vol. 350 (1972), p. 69–190, Springer, Berlin.

[Ka79] N. Katz – *Slope filtration of F-crystals*, Astérisque, **63** (1979).

[La10] K.W. Lan – *Toroidal compactifications of PEL-type Kuga families*, prépublication (2010).

[LS10] K.W. Lan & J. Suh – *Vanishing theorems for torsion automorphic sheaves on compact PEL-type Shimura varieties*, prépublication (2010).

[LS10] K.W. Lan & J. Suh – *Vanishing theorems for torsion automorphic sheaves on general PEL-type Shimura varieties*, prépublication (2010).

[Ma72] B. Mazur – *Frobenius and the Hodge filtration*, Bull. Amer. Math. Soc. **78** (1972), p. 653–667.

[MT02] A. Mokrane & J. Tilouine – *Cohomology of Siegel varieties with p-adic integral coefficients and applications*, *in* « Cohomology of Siegel varieties », Astérisque, **280** (2002), p. 1–95.

[Og94] A. Ogus – *F-crystals, Griffiths transversality, and the Hodge decomposition*, Astérisque, **221** (1994).

[Oo91] F. Oort – « Moduli of abelian varieties and Newton polygons », *C.R.A.S.* **312** série 1 (1991), p. 385–389.

[PT02] P. Polo & J. Tilouine – *Bernstein-Gelfand-Gelfand complexes and cohomology of nilpotent groups over $\mathbb{Z}_{(p)}$ for representations with p-small weights*, *in* « Cohomology of Siegel varieties », Astérisque, **280** (2002), p. 1–95.

[Pi10] V. Pilloni – *Sur la théorie de Hida pour le groupe GSp_{2g}, à paraître à Bull. Soc. Math. Fr.* (2010).

[Pi10b] V. Pilloni – *Prolongement analytique sur les variétes de Siegel*, *à paraître à Duke Math. Journal* (2010).

[SB06] N. Shepherd-Barron – *Perfect forms and the moduli space of abelian varieties*, Invent. Math. 163 (2006), n° 1, p. 25–45.

[St10] B. Stroh – *Compactification de variétés de Siegel aux places de mauvaise réduction*, Bull. Soc. Math. Fr. **138** (2010), n° 2, p. 259-315.

[Ur10] É. Urban – *Eigenvarieties for reductive groups*, prépublication (2010).

[VG99] G. Van der Geer – *Cycles on the moduli space of abelian varieties*, *in* « Moduli of curves and abelian varieties », Aspects Math. n° 33 (1999), p. 65-89.

---

3 septembre 2010

Benoît Stroh • *Courriel :* `stroh@math.univ-paris13.fr`, C.N.R.S, Université Paris 13, LAGA, 99 avenue J.B. Clément, 93430 Villetaneuse France