M2 Surfaces de Riemann 2020-21, corrigé rapide

Exercice 1. Soit $C_{\text{aff}} \subset \mathbb{C}^2$ et $C_{\text{proj}} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ les versions affines et projectives de la courbe algébrique. Comme $\Delta(\Lambda) \neq 0$, le polynôme $4x^3 - g_2(\Lambda)x - g_3(\Lambda)$ est à racines simples, donc n'est pas un carré. On en déduit que $y^2 - 4x^3 + g_2(\Lambda)x + g_3(\Lambda)$ est irréductible et lisse. Donc C_{proj} est bien une surface de Riemann compacte.
On a prouvé en cours que $(\mathbb{C} - \Lambda)/\Lambda \to C_{\text{aff}}$, $z \mapsto (\wp_\Lambda(z), \wp'_\Lambda(z))$ s'étend en un morphisme de surfaces de Riemann $f : \mathbb{C}/\Lambda \to C_{\text{proj}}$. Cela résulte d'ailleurs de la proposition 24 du poly. Puis f est non constante donc ouverte, et la source est compacte donc f est surjective. Il reste à prouver qu'elle est de degré un. Mais c'est clair car f est bijective.

Exercice 2.

1. L'action de g stabilise un voisinage ouvert de P dans X par continuité, donc agit à la source sur les fonctions sur cet ouvert. En particulier g agit sur z, et le résultat est une série en z, soit $g(z) = \sum_{n \geq 0} a_n(g) z^n$. Comme $g(P) = P$ on a $a_0(g) = 0$. Comme g est biholomorphe, on a $a_1(g) \neq 0$.

2. On a alors pour tous $g, h \in G_P$ que $g(h(z)) = g(\sum a_n(h) z^n) = \sum_m a_m(g)(\sum a_n(h) z^n)^m$ qui est égal à $a_1(g)a_1(h)z$ à l'ordre 1 en z.

3. Soit $g \in G_P$ tel que $a_1(g) = 1$. On veut montrer que g agit trivialement sur X, donc que $g(z) = z$. Par contraposée soit $m \geq 2$ le plus petit entier tel que le coefficient de z^m dans $g(z)$ est non nul. On a donc $g(z) = z + az^m + o(z^{m+1})$ avec $a \neq 0$. Par récurrence il vient pour tout $k \geq 0$ que $g^k(z) = z + a^k z^m + o(z^{m+1})$. Comme G_P est fini, on en déduit qu'il existe m tel que $a^m = 0$ donc $a = 0$.

4. Les seuls-sous groupes finis de $\mathbb{C}^*$ sont cycliques.

5. Soit $P_n \to P$ une suite convergente tel que P_n est fixé par $g_n \neq e_G$ pour tout n. Comme G est fini, quitte à extraire, on peut supposer que P_n est fixé par $g \neq e_G$. Par continuité on a $g * P = P$. Par l'unicité du prolongement analytique, g agit donc comme l'identité de X puis $g = e_G$.

6. Soit $g_1, \cdots, g_n \in G$ les éléments qui ne fixent pas P. Comme X est séparé, il existe des ouverts disjoints $P \in V_i$ et $g_i * P \in W_i$ pour tout i. On pose $R_i = V_i \cap g_i^{-1} W_i$ et $R = \cap_i R_i$ et $U = \cap_{g \in G_P} g \cdot R$ et on vérifie qu'il convient.

7. Soit $\pi : X \to X/G$ la surjection. Soit $P \in X$ et $\bar{P} = \pi(P)$. Si $G_P = \{e_G\}$ on sait que π est un homéomorphisme local au voisinage de P et il suffit de s'en servir pour transporter une carte de X en P. Si G_P est de cardinal $m \geq 2$, on sait que X/G est localement autour de $\bar{P}$ homéomorphe à U/G_P. Pour trouver une carte sous-jacente à U/G_P, il suffit de trouver une fonction $h = U \to \mathbb{C}$ holomorphe, G_P-invariante, telle que la fonction quotient $\bar{h} : U/G_P \to \mathbb{C}$ soit injective et ouverte. On pose $h(z) = \prod_{g \in G_P} g(z)$ où z est une coordonnée locale sur U en P (quitte à rapetisser U pour que z soit définie sur tout U). L'application $\bar{h}$ est bien injective car h est holomorphe de degré m et $U \to U/G_p$ a des fibres de cardinal m. On vérifie ensuite que toutes ces cartes forment un atlas.

8. Le degré de π est le cardinal de G et sa multiplicité en P est le cardinal de G_P.

9. Soit w une coordonnée locale sur X/G en $\bar{P}$. Par le théorème de forme normale des morphismes, il existe une coordonnée locale z sur X en P telle que dans ces coordonnées, $\pi(z) = z^m$. Pour tout $\bar{Q} \in X/G$ proche de $\bar{P}$ (qui par la carte w correspond à w_0 proche de 0), ses antécédants par π dans la carte fournie par z sont donc de la forme $z_0, \zeta z_0, \cdots, \zeta^{m-1} z_0$ où ζ est une racine primitive m-ème de l'unité. Donc dans cette carte z on a $g \cdot z_0 = \lambda z_0$, ce qu'il fallait démontrer.

10. La première assertion est claire car les fibres de π sont des G-orbites, en bijection avec G/G_{P_i}. La seconde provient immédiatement de Riemann-Hurwitz.

11. Si G est discret on demande qu'il agisse proprement pour que X/G soit séparé. Tous les énoncés du début continuent à marcher avec les mêmes preuves, notamment les stabilisateurs sont finis cycliques si l'action est fidèle. On en déduit bien une structure de surface de Riemann sur X/G. Par contre π n'est plus de degré fini. La partie avec Riemann-Hurwitz n'a pas de sens car si X/G est compacte et G est infini agissant fidèlement, X ne peut pas être compacte (car un morphisme non constant π entre surfaces de Riemann compactes a un degré fini), et n'a donc pas de genre.

Exercice 3.

1. On a $\deg(K) = 2g - 2 = 2$ et $h^0(K) = 2$ en se servant de $h^1(K) = h^0(0) = 1$ par Liouville. Il existe donc $0 \neq f \in H^0(X, O_X(K))$. Quitte à ajouter $\mathrm{div}(f)$ à K, on peut donc supposer que K est effectif, soit $K = (p) + (q)$. Soit $0 \neq f \in H^0(X, O_X(K))$ qui a donc au plus deux pôles (en p et q). Si f a un unique pôle en p, on a nécessairement $X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ par le cours, ce qui est absurde. Donc f a exactement deux pôles. Il détermine $\tilde{f} : X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, qui est donc de degré 2.

2. Bien sûr les $f_i(P)$ font intervenir des régularisations de f_i en P comme dans le cours. Il faut vérifier qu'on n'a pas $f_i(P) = 0$ pour tout i. Il faut donc voir $h^0(K - (P)) \neq h^0(K)$. Si on suppose que c'est vrai $h^0(K - (P)) = g$. Par Riemann-Roch appliqué à $D = (P)$, on en déduit $h^0((P)) = 2$. Donc il existe f avec pôle simple en P qui est non constante, ce qui mène encore à $X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

3. Il faut montrer que ϕ_K sépare les points et les tangentes si et seulement si X n'est pas hyperelliptique. Soient $P, Q \in X$ (et on autorise $P = Q$, ce qui correspond à la condition de séparer les tangentes). Or ϕ_K sépare les points et les tangentes si et seulement si $h^0(K - (P) - (Q)) = h^0(K) - 2$ pour tous P, Q. Par Riemann-Roch, $h^0(K - (P) - (Q)) = g - 3 + h^0((P) + (Q))$. Donc ϕ_K n'est pas une immersion si et seulement s'il existe P, Q tels que $h^0((P) + (Q)) = 2$.

   Si $h^0((P) + (Q)) = 2$, soit f non constante ayant au plus un pôle simple en P et Q. Toujours puisque $X \neq \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, f a nécessairement deux pôles simples, donc en P et Q (ou un pôle double en P si $P = Q$). Le morphisme $\tilde{f} : X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ associé est donc de degré 2, comme on le voit en regardant les antécédants de ∞, donc X est hyperelliptique.

   Réciproquement si X est hyperelliptique, soit $\tilde{f} : X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ de degré 2 qui correspond donc à une fonction méromorphe f ayant deux pôles simples en P et Q (ou un pôle double en un unique point). On trouve donc $h^0((P)+(Q)) > 1$ car f est non constante, donc $h^0((P)+(Q)) = 2$ et ϕ_K n'est pas une immersion.