Corrigé rapide

Exercice 1.

1. Pour tout $(x_0, y_0) \in C^{\text{aff}}$ l'espace tangent $T_{x_0,y_0}C^{\text{aff}} \subset \mathbb{C}^2$ est égale au noyau de la différentielle en (x_0, y_0) de $(x, y) \mapsto y^2-4x^3+ax+b$. On a donc $2ydy = (12x^2-a)dx$, d'où l'égalité.

2. Notons ω cette forme différentielle méromorphe. Comme $\Delta \neq 0$, on sait que les deux dérivées partielles de $y^2 - 4x^3 + ax + b$ ne s'annulent pas simultanément sur C^{aff}. On a donc $y_0 \neq 0$ ou $12x_0^3 \neq a$. Si $y_0 \neq 0$, par construction de la structure de surface de Riemann sur C^{aff}, on sait que la fonction $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto x - x_0$ est un paramètre local en (x_0, y_0). Donc $\omega = d(x - x_0)/2y$ est de la forme $f(z)dz$ où z est un paramètre local en (x_0, y_0) et f est holomorphe non nulle. On en déduit que ω est holomorphe non nulle au voisinage de (x_0, y_0). De même dans l'autre cas. *Attention : on ne peut pas simplement dire que $dx \neq 0$ et que le coefficient $1/2y$ est aussi non nul. En effet $dx : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ est la première projection, que l'on restreint à $T_{(x,y)}C^{aff} \subset \mathbb{C}^2$. Cette restriction peut devenir la forme linéaire nulle, et il faut exclure ce cas...*

3. Il s'agit de calculer $d\wp_\Lambda(z)/\wp'_\Lambda(z) = \wp'_\Lambda(z)dz/\wp'_\Lambda(z) = \overline{dz}$....

4. C'est évident car ϕ et ψ s'étendent en des isomorphismes $\mathbb{C}/\Lambda = C_\Lambda^{\text{proj}}$ et que $\overline{dz}$ s'étend bien à tout $\mathbb{C}/\Lambda$. On obtient que ω est holomorphe sans zéro, donc de degré 0 ce qui est possible car $2g - 2 = 0$.

5. C'est clair car ϕ, ψ sont des isomorphismes de groupe et que $\overline{dz}$ vérifie des propriétés similaires sur $\mathbb{C}/\Lambda$.

On dit que ω est une forme différentielle invariante sur C_Λ^{proj}, et on a vérifié que toute forme holomorphe est invariante. En fait on aurait pu raisonner purement algébriquement et montrer que ω s'étend holomorphiquement à C_Λ^{proj} en regardant dans une bonne carte mais c'est un peu lourd. On aurait aussi pu prouver que ω est invariante sans utiliser $\mathbb{C}/\Lambda$, cf le cours de courbes elliptiques

Exercice 2.

1. C'est évident. La fidélité se teste par calcul, ou en utilisant qu'une application linéaire qui stabilise chaque droite est une homothétie.

2. f est une fonction méromorphe sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, donc une fonction rationnelle. On a donc $f([X : Y]) = P(X, Y)/Q(X, Y)$ où P, Q sont des polynômes homogènes de même degré. Mais f est injective, donc P ne s'annule qu'une fois, donc est de degré 1. C'est gagné.

3. On étend f en $g : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ en posant $g(\infty) = \infty$. Pour vérifier que g est holomorphe, il suffit de vérifier que f est bornée au voisinage de ∞ lorsqu'on la considère dans des cartes centrées en ∞ à la source et au but. On veut donc vérifier que $z \mapsto f(z)$ tend vers ∞ en module si z tend vers ∞ en modules. Mais $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est un homéomrphisme, donc f^{-1} est continue donc pour tout compact $K \subset \mathbb{C}$ on a $f^{-1}(K)$ compact, ce qui implique ce que l'on cherche. *Argument plus compliqué : on veut prouver que $z \neq 0 \mapsto f(1/z)$ diverge en module au voisinage de 0. C'est évident si $f(1/z)$ est méromorphe en 0 en écrivant $1/z^n$ comme un terme dominant. Et si $z \mapsto f(1/z)$ a une singularité essentielle, par le théorème de Picard, elle ne peut pas être localement injective. Ce cas est donc exclu.* Donc par le cours, g est est holomorphe. Elle est de plus bijective. Donc il existe $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $f(z) = (az + b)/(cz + d)$ par la question précédente. Comme f n'a pas de pôle sur $\mathbb{C}$, on en déduit bien que $f(z) = az + b$.

Exercice 3.

1. On a $\deg(K) = 2g - 2 = 2$ et $h^0(K) = 2$ en se servant de $h^1(K) = h^0(0) = 1$ par Liouville. Il faut voir $h^0(K - (P)) \neq h^0(K)$. Si on suppose que c'est vrai $h^0(K-(P)) = 2$. Par Riemann-Roch appliqué à $D = (P)$, on en déduit $h^0((P)) = 2$. Donc il existe f avec pôle simple en P qui est non constante, ce qui mène à $X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ et c'est absurde.

2. Si f, g est une telle base, le morphisme est $\phi : P \mapsto [f^{\text{reg}}(P), g^{\text{reg}}(P)]$, ce qui a un sens par la question précédente. Comme $\text{div}(f) \geq -K$ et que ce dernier est de degré -2, on en déduit que f^{reg} s'annule exactement deux fois avec multiplicités. Donc $\phi^{-1}([0 : 1])$ est de cardinal deux compté avec multiplicité, donc ϕ est de degré 2.

3. La formule de Riemann-Hurwitz garantit $4 = -4 + \sum_{P \in X}(e_P - 1)$ d'où le résultat, car pour une application de degré 2 on a $e_P = 1$ ou 2.

4. Définissons $\mathcal{Y} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ par l'équation homogène $Z^2Y^4 = (X - \alpha_1 Y) \cdots (X - \alpha_6 Y)$. L'application $\phi : [X : Y : Z] \to [X : Y]$ est bien ramifié en $Q_1, \cdots, Q_6$ et de degré 2. Malheureusement $\mathcal{Y}$ n'est pas lisse (seule sa partie affine $\mathcal{Y} \cap \mathbb{C}^2$ l'est) et c'est heureux car la formule degré-genre donnerait un genre égal à $5 * 4/2 \neq 2$. Il faut alors définir $\mathcal{X}$ comme la normalisée de $\mathcal{Y}$. C'est donc une question plus difficile demandant des connaissances en courbes algébriques singulières !

5. Si on change la base f, g de $H^0(K)$ par un élément $a \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$, alors clairement la famille $(Q_1, \cdots, Q_6)$ est changée par l'automorphisme a de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Si on change ω en ω' alors en posant $h = \omega'/\omega$ qui est une fonction méromorphe, on a $K' = K + \text{div}(h)$. Donc la multiplication par h induit un isomorphisme de faisceaux $\mathcal{O}_X(K) \to \mathcal{O}_X(K')$ puis un isomorphisme d'espace vectoriel $H^0(K) \to H^0(K')$ d'où encore l'action d'un élément de $\text{GL}_2(\mathbb{C})$ sur la famille des Q_i.

6. Ainsi si à X on associe la classe d'équivalence de $(Q_1, \cdots, Q_6)$ les points de branchements de $\phi_{\omega,f,g}$, on obtient une application bien définie $\mathcal{M}_2 \to S$. Elle est surjective par la question 4 (bien sûr quitte à prendre un bon représentant d'une classe

d'équivalence, on peut supposer $Q_i \in \mathbb{C} \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$). Et elle est injective par le fait admis après la question 4.

7. C'est bien connu et élémentaire en terme d'algèbre linéaire. On utilise l'exercice 2 pour savoir que tout automorphisme est associé à une matrice de PGL_2.

8. Si $\sigma \in \mathfrak{S}_6$ on considère $(\sigma(0), \sigma(1), \sigma(\infty), \sigma(P_1), \sigma(P_2), \sigma(P_3))$. D'après la question 7, il existe un unique $a \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ envoyant cette famille vers $(0, 1, \infty, P_1', P_2', P_3')$. On pose alors $\sigma * (P_1, P_2, P_3) = (P_1', P_2', P_3') \in T$ et on vérifie que cela fait une action.

9. En tant qu'ouvert de $\mathbb{C}^3$, l'espace topologique T est une variété complexe de dimension trois. Si on montre que le quotient d'une variété complexe par l'action d'un groupe fini (agissant avec points fixes, il s'agit donc de généraliser au cas de plus grande dimensinon le théorème vu sur les surfaces de Riemann dans l'examen 2020-21), alors $T/\mathfrak{S}_6$ est muni d'une structure de variété complexe de dimension 3, et est en bijection canonique avec $\mathcal{M}_2$. Cette variété n'est pas compacte car la project $T \to T/\mathfrak{S}_6$ est un morphisme propre car le groupe est fini, donc T le serait ce qui est absurde.

On peut munir canoniquement l'ensemble $\mathcal{M}_g$ des classes d'isomorphisme de surfaces de Riemann compactes de genre g d'une structure de variété complexe (non compacte) de dimension $3g-3$. On l'appelle l'espace de modules grossiers des surfaces de Riemann de genre g.