Corrigé rapide

Exercice 1.
0) On montre que x est holomorphe sans utiliser le fait que l'immersion $\mathcal{X} \subset \mathbb{C}^2$ et $pr_1 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ sont holomorphes entre variétés de dimension ≥ 1 de la manière suivante : si $P \in \mathcal{X}$ vérifie $\partial f/\partial y(P) \neq 0$ alors $pr_1 : \mathcal{X} \to \mathbb{C}$ est une carte dans laquelle x devient l'identité. Sinon $pr_2 : \mathcal{X} \to \mathbb{C}$ est une carte de réciproque $z \mapsto (h(z), z)$ et x devient dans cette carte $z \mapsto h(z)$. On peut en déduire directement le diviseur de x mais sinon on utilise le cours : le diviseur de x est formé de ses zéros comptés avec multiplicités, or pour tout $P \in \mathcal{X}$ d'abcisse nulle, on a $ord_P(x) = mult_P(pr_1) = 1 + ord_P(\partial f/\partial y) = 2$ donc $div(x) = 2 \cdot (0,0)$. De même pour y.
1) On vérifie que $f^*(div(\phi)) = div(\phi \circ f)$ pour tout $g \in \mathcal{M}(Y) - 0$. En effet en notons $e = mult_P(f)$ et en appliquant le théorème de forme normale à f en P, et en écrivant g dans la carte correspondante, cela revient à comparer l'ordre de $g(z^e)$ et celui de $g(z)$ en $z = 0$. Cf le TD.
2) Appliquer la formule $deg(f) = \sum_{P \in f^{-1}(Q)} mult_P(f)$.
3) Similaire à la question 1 et presque fait en TD ; il faut comparer l'ordre d'annulation en $z = 0$ de $ez^{e-1}g(z^e)$ et celui de $g(z)$. On trouve Riemann-Hurwitz en prenant le degré lorsque X est compacte. On a donc prouvé une égalité entre diviseurs qui raffine légèrement Riemann-Hurwitz, et qui est valable même dans le cas non compact.
4) On commençe par remarque que G/H est bien une fonction ensembliste sur un ouvert dense de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Elle fournit par restriction une fonction ensembliste sur un ouvert dense de $\mathcal{X}$ et il s'agit de prouver la méromorphie ce qui se fait dans des cartes.
Dans la carte de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ donnée par $(u, v) \mapsto [u : v : 1]$, $\mathcal{X}$ devient la courbe algébrique donnée par l'annulation de $f(u, v) = F(u, v, 1)$. D'après la formule d'Euler on sait que $\partial f/\partial u$ ou $\partial f/\partial v \neq 0$. Dans le deuxième cas $(u, v) \mapsto u$ est une carte de réciproque $z \mapsto (z, g(z))$. Dans la composée de ces deux cartes successives, $G/H(X, Y, Z)$ devient $G/H(u, v, 1)$ puis $G/H(z, g(z), 1)$ qui est bien méromorphe sur un ouvert de $\mathbb{C}$.
5.1) Il serait déjà très facile de prouver que G/H est bien méromorphe sur $\mathcal{X}$ en utilisant le concept de fonctions holomorphes à plusieurs variables : G/H est une fonction ensembliste définie sur un ouvert de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ et dans les cartes usuelles, elle devient (par exemple dans la première carte) $F/G(1, x_1, \cdots, x_n)$ holomorphe sur un ouvert de $\mathbb{C}^n$. On utilise alors que par définition le plongement $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ est holomorphe (à plusieurs variables dansdes cartes à la source et au but). Pour la question il suffit d'écrire $G/H' = G/H \cdot H/H'$ puis d'utiliser que la fonction ensembliste H/H' est méromorphe au voisinage de P par hypothèse, et non nulle sans pôle en P comme fonction ensembliste, donc d'ordre 0 comme fonction méromorphe.
5.2) Utiliser $div(G) = div(G') + divG/G')$ et le fait que G/G' est une fonction méromorphe.
5.3) Choisir $G = H^d$ avec H monôme non identiquement nul sur $\mathcal{X}$.
6) Enfin une question un peu intéressante... Soit G de degré 1 homogène. Quitte à appliquer un élément de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ agissant par homographie, on peut supposer $G((X, Y, Z) = X$ et $[0 : 0 : 1] \notin \mathcal{X}$. On peut alors utiliser la fonction méromorphe x/y pour déterminer

$div(G)$. On trouve que $div(G)$ est le diviseur des zéros de x/y. Soit $h : \mathcal{X} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ le morphisme non constant associé à la fonction méromorphe x/y. Il faut donc calculer $deg(h)$. Mais $deg(h) = card\, h^{-1}(Q)$ pour tout point $Q \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ général (ie un point qui n'est pas de branchement). Pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \subset \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ et tout $P = [X : Y : Z] \in \mathcal{X}$ tel que $h(P) = \lambda$, on a $Y = \lambda X$. Comme $F(X, Y, Z) = 0$ et $[0, 0, 1] \notin \mathcal{X}$ on a X ou $Y \neq 0$. Donc si $\lambda \neq 0$ on a $X, Y \neq 0$. Ainsi $P = [\lambda, 1, w]$ où $F(\lambda, 1, w) = 0$ et tous les points de $h^{-1}(Q)$ sont de cette forme. Mais pour $\lambda \in \mathbb{C}$ général, l'équation $F(\lambda, 1, w) = 0$ est polynômiale de degré d en w, et a d solutions distinctes. Un tel λ n'est pas un point de branchement de h et on trouve finalement que h est de degré d, cqfd.

7) Le théorème de Bezout dit que si F, G sont deux polynômes homogènes de degré d, d' sans facteur irréductible commun, les courbes définies par $F = 0$ et $G = 0$ s'intersectent dd' fois comptés avec multiplicité. Et la question de définir la multiplicité d'intersection $mult_P(F, G)$ fait bien sûr partie du théorème...

On a exactement montré ce théorème (combiner les questions 5.3 et 6) lorsque F est lisse irréductible, en posant $mult_P(F, G) = ord_P(G|_{\mathcal{X}})$.

On peut de plus faire le lien avec une définition plus usuelle (et symétrique en F,G de la multiplicité) en utilisant l'anneau local en P. La définition de $mult_P(F, G)$ sera locale en P donc quitte à prendre une carte de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ on se place dans la situation affine où $P \in \mathbb{C}^2$ et $f, g \in \mathbb{C}[x, y]$ sont sans facteur irréductible commun (ce sont les déshomogénéisation de F, G). On note $\mathcal{O}_P$ l'anneau local de $\mathbb{C}^2$ en P, c'est l'anneau des germes de fonctions holomorphes à deux variables définies sur un voisinage de P. On vérifie alors que l'anneau $\mathcal{O}_P/(f, g)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension fini et on note $mult_P(f, g)$ sa dimension (de manière équivalente, $\mathcal{O}_P/(f, g)$ est un anneau artinien et la multiplicité est par définition sa longueur). Pour faire le lien avec notre définition on observe que l'anneau local $\mathcal{O}_{\mathcal{X},P}$ de $\mathcal{X}$ en P est $\mathcal{O}_P/(f)$ lorsque f est lisse irréductible. Il faut donc relier la dimension comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel de $\mathcal{O}_{\mathcal{X},P}/(g)$ et l'entier $ord_P(g|_{\mathcal{X}})$. Mais ce sont les mêmes : introduire z_P une coordonnée locale de $\mathcal{X}$ en P et écrire $g = z_P^e * h$ où h est holomorphe au voisinage de P et non nulle en P. On a alors $ord(g|_{\mathcal{X}}) = e = dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_{\mathcal{X},P}/(g))$ puisque $\mathcal{O}_{\mathcal{X},P}/(z_P) = \mathbb{C}$.

8) Assez long, cf le poly : quitte à appliquer une homographie on suppose que $f\phi\mathcal{X} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, $[X, Y, Z] \mapsto [X, Y]$ est bien définie, donc un morphisme de surfaces de Riemann (formellement cela se prouve dans des cartes au but et à la source, c'est un peu répétitif...). De même on suppose que ϕ est non constante, donc que $\partial F/\partial Z$ est non identiquement nul sur $\mathcal{X}$. Or pour tout $P \in \mathcal{X}$ on a défini l'entier $ord_P(\partial F/\partial Z)$ dans la question 5.1. On vérifie alors que $mult_P(\phi) = 1 + ord_P(\partial F/\partial Z)$, en utilisant le résultat similaire pour les courbes affines (cf poly). On applique enfin la formule de Riemann-Hurwitz à ϕ, et on calcule $\sum_{P\in\mathcal{X}}(mult_P(\phi) - 1) = \sum_P ord_P(\partial F/\partial Z) = deg(div(\partial F/\partial Z)|_{\mathcal{X}}) = d(d - 1)$ grâce aux questions 5.3 et 6), ie grâce à Bezout.

Exercice 2.

1. Il suffit d'associer (pour $U \subset X$ un ouvert variable) à une fonction méromorphe sur U son diviseur.

2. Si pour $U \subset \mathbb{C}$ une boule ouverte, tout diviseur est principal, alors notre suite de faisceaux est exacte à droite. Cet énoncé est vrai (en fait idem pour tout $U \subset \mathbb{C}$ ouvert quelconque) mais est souvent mal documenté. Notamment, contrairement à

une assertion du poly les produits de Blaschke ne répondent que conditionnellement à cette question car il faut supposer $\sum_n (1-|a_n|) < \infty$ sur la boule de rayon 1. Les références classiques donnent malheureusement souvent une preuve cohomologique de ce résultat, ce qui peut donner l'impression de tourner en rond dans les arguments (puisqu'il est naturel d'utiliser le résultat d'analyse complexe pour montrer la suite exacte courte, puis pour utiliser la suite exacte longue avec X quelconque). Cf Fritzche-Grauert, From holomorphic functions to complex manifolds, cf V.1 ou Grauert-Remmert, Theory of Stein spaces, ch V, th 5 p.143. Mais voir Analyse complexe - Fonctions holomorphes d'une variable, Andréi Iordan, Vincent Michel Th 10.3 pour une preuve explicite sans cohomologie.

3. Il n'est pas flasque puisque des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}^*$ peuvent avoir une singularité essentielle en 0 donc ne pas s'étendre en des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$. Il est néanmoins acyclique sur les surfaces de Riemann comme admis dans l'énoncé, cf `https://www.math.wustl.edu/~matkerr/MerR.pdf` (référence dans laquelle les auteurs corrigent une erreur classique, qui est de penser que ce faisceau est acyclique pour toutes les variétés analytiques complexes).

4. On utilise la suite exacte longue de cohomologie et l'isomorphisme est tout de suite founi par le morphisme de bord $\delta : Div(X) = H^0(X, \underline{Div}_X) \to H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$.

5. évident, les fonctions holomorphes sans zéro sont localement des logarithmes de fonctions holomorphes.

6. On admet que la cohomologie du faisceau $\underline{\mathbb{Z}}_X$ coincide avec la cohomologie singulière à coefficients entiers de X (preuve : il faut introduire les faisceaux de cochaînes sur X, c'est juste la faisceautisation de la définition usuelle des $\mathbb{Z}$-modules des cochaines, vérifier que cela donne une résolution du faisceau $\underline{\mathbb{Z}}_X$ car localement X est contractile, toute cochaîne de bord nul est un bord), et que les faisceaux de cochaînes sont acycliques. On en déduit $H^i(X, \underline{\mathbb{Z}}_X) = H^i(X, \mathbb{Z})$ grâce aux généralités sur le calcul de la cohomlogie des faisceaux par des résolutions acycliques. Voir par exemple Sella. Comparison of sheaf cohomology and singular cohomology. arXiv :1602.06674, ArXiv.org/, 2016.) Bref on obtient $H^0(X, \underline{\mathbb{Z}}_X) = \mathbb{Z}$ car X est connexe, $H^1(X, \underline{\mathbb{Z}}_X) = \mathbb{Z}^{2g}$ et $H^2(X, \underline{\mathbb{Z}}_X) = \mathbb{Z}$ car X est orientable.

   On a d'une part le degré $deg : Pic(X) \to \mathbb{Z}$, d'autre part le morphisme de bord induit par la suite exponentielle $\delta' : H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \to H^2(X, \underline{\mathbb{Z}}_X) = \mathbb{Z}$. On onjecture donc que ces deux morphismes se correspondent par composition par ϕ (la preuve consiste à expliciter tous les morphismes de bord et est fastidieuse). Ainsi ϕ fournit un isomorphisme $Pic^0(X) \simeq Ker(\delta')$. Mais par la suite longue associée à la suite courte exponentielle, $Ker(\delta') \simeq H^1(X, \mathcal{O}_X)/Im(H^1(X, \mathbb{Z}))$. De plus le morphisme $H^1(X, \mathbb{Z}) \to H^1(X, \mathcal{O}_X)$ est injectif puisque par Liouville, on obtient au niveau des H^0 la suite exponentielle $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$, qui est bien sûr exacte à droite.

7. On sait par Riemann-Roch que $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension g, et par les rappels précédents que $H^1(X, \mathbb{Z})$ est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang $2g$ inclus dans cet espace vectoriel. Il reste à montrer qu'il est discret, ce qui n'est pas évident et résulte de la théorie d'Abel. On en déduit que $\mathrm{Pic}^0(X)$ est un groupe

abélien canoniquement muni d'une structure de variété complexe, en fait un tore complexe de dimension g.

8. Il y a un isomorphisme canonique entre $Pic(X)$ et l'ensemble des classes d'isomorphismes de fibrés en droites holomorphes sur X, qui est muni d'une structure de groupe par le produit tensoriel des fibrés. En effet par Cech $Pic(X) \simeq H^1(X, \mathcal{O}_X^*) = colim_{U_\bullet} H^1_{Cech}(X, U_\bullet, \mathcal{O}_X^*)$ où la colimite est prise sur tous les recouvrements ouverts. Fixons un tel recouvrement $X = \cup_i U_i$. Alors $H^1_{Cech}(X, U_\bullet, \mathcal{O}_X^*)$ est l'ensemble des $f_{i,j} \in \mathcal{O}^*(U_{ij})$ vérifiant la règle de Chasles, modulo les $f_{i,j}$ de la forme $f_{i,j} = g_i/g_j$ où $g_i \in \mathcal{O}(U_i)^*$. Considérons un fibré en droite holomorphe $F \to X$ (définition assez claire mais à écrire) qui est trivialisable de manière holomorphe sur le recouvrement $U_\bullet$. On choisit arbitrairement une trivialisation $\Phi_i : F|_{U_i} \simeq U_i \times \mathbb{C}$. On note alors $f_{ij} = \Phi_i \circ \Phi_j^{-1}$ que l'on peut voir comme une fonction holomorphe $U_{ij} \to \mathbb{C}^*$. La famille f_{ij} vérifie la règle de Chasles, et on vérifie que changer les Φ_i ou changer F à isomorphisme près revient exactement à multiplier f_{ij} par un élément de la forme g_i/g_j. On obtient ainsi une injection de l'ensemble des classes d'isomorphismes de fibrés holomorphes trivialisables sur $U_\bullet$ vers $H^1_{Cech}(X, U_\bullet, \mathcal{O}_X^*)$. Cette injection est une bijection puisque étant donné f_{ij} on arrive à définir un fibré holomorphe F par recollement des fibrés triviaux sur U_i, où le recollement est donné par la multiplication par f_{ij} sur U_{ij}. On prend ensuite la colimite sur tous les recouvrements $U_\bullet$ de X.

   Question additionnelle : soit $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ comme dans l'exercice 1. On introduit exactement comme en géométrie différentielle le fibré de Hopf sur $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, dont les sections sont les polynômes homogènes de degré 1. Il fournit par restriction un fibré en droite sur $\mathcal{X}$ noté $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(1)$. On peut pour tout $d \in \mathbb{Z}$ prendre la puissance tensorielle d-ème (et le dual si $d < 0$) et l'on obtient un fibré en droites holomorphe sur $\mathcal{X}$ noté $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(d)$ dont les sections globales sont les polynômes homogènes de degré d, restreintes à $\mathcal{X}$. Vu la question 8 de l'exercice 2 on peut donc voir $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(d)$ comme un élément de $Pic(X)$. C'est l'élément construit dans la question 5.2 de l'exercice 1 ! Ainsi l'entier $deg(\mathcal{X})$ de l'exercice 1 est en fait le degré du fibré $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(1)$. Bien sûr prouver toutes ces identifications est long et non trivial.

   On peut aller plus loin : les polynômes homogènes de degré d sont par construction les sections globales de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(d)$. Mais à tout fibré holomorphe $F \to X$ et toute section méromorphe $s : X \to F$ on peut associer son diviseur $div(s)$ (trivialiser le fibré sur un recouvrement, et la définition ne dépend pas du choix des trivialisations). Il est alors clair que l'image de $div(s) \in Div(\mathcal{X})$ dans $Pic(\mathcal{X})$ ne dépend que de la classe d'isomorphisme de F et pas de s. Cela redonne comme cas particulier si $F = \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(d)$ et $s = G$ les constructions de $div(G)$ puis le résultat de la question 5.2.

   Au final cela fournit la version la plus abstraite au premier abord, mais en fait la plus pratique à maints égards, du nombre de points comptés avec multiplicités de l'intersection de $\mathcal{X}$ et d'une courbe de degré d' : c'est le degré du fibré en droite holomorphe $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(d')$.