Examen

Durée 3h. Poly, notes de cours et de TD autorisés. You can reply in english if you wish.

Exercice 1. *Dans cet exercice $\bar{z}$ désigne la classe de $z \in \mathbb{C}$ modulo Λ, et non pas le conjugué complexe de z !*

1. Soit $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $a^3 - 27b^2 \neq 0$ et $C^{\mathrm{aff}} \subset \mathbb{C}^2$ la surface de Riemann affine d'équation $y^2 = 4x^3 - ax - b$. Prouver l'égalité entre formes différentielles méromorphes sur C^{aff}
$$\frac{dx}{2y} = \frac{dy}{12x^2 - a}$$

2. Prouver que cette forme différentielle est holomorphe sans zéro sur C^{aff}.

3. Soit $\Lambda \subset \mathbb{C}$ un réseau et $\phi : (\mathbb{C} - \Lambda)/\Lambda \to C_\Lambda^{\mathrm{aff}}$ l'isomorphisme $\bar{z} \mapsto (\wp_\Lambda(\bar{z}), \wp'_\Lambda(\bar{z}))$. Ici $C_\Lambda^{\mathrm{aff}} \subset \mathbb{C}^2$ est la surface de Riemann affine d'équation $y^2 = 4x^3 - g_2(\Lambda)x - g_3(\Lambda)$ et $C_\Lambda^{\mathrm{proj}} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ est la surface de Riemann compacte d'équation $Y^2Z = 4X^3 - g_2(\Lambda)XZ^2 - g_3(\Lambda)Z^3$. Montrer que
$$\phi^*\left(\frac{dx}{y}\right) = \overline{dz}$$
où $\overline{dz}$ est la 1-forme holomorphe sur $(\mathbb{C} - \Lambda)/\Lambda$ obtenu par passage au quotient de dz sur $\mathbb{C}$.

4. En déduire que $\frac{dx}{y}$ s'étend uniquement en une forme différentielle méromorphe ω sur $C_\Lambda^{\mathrm{proj}}$. Quel est le degré du diviseur de ω ? Est-ce normal ? Montrer que toute forme différentielle holomorphe sur $C_\Lambda^{\mathrm{proj}}$ est égale à $\lambda \cdot \omega$ où $\lambda \in \mathbb{C}$.

5. Soit $P \in C_\Lambda^{\mathrm{proj}}$ et $t_P : C_\Lambda^{\mathrm{proj}} \to C_\Lambda^{\mathrm{proj}}$, $Q \mapsto P \boxtimes Q$ où $\boxtimes$ est la loi de groupe sur $C_\Lambda^{\mathrm{proj}}$ vue en cours. Montrer que $t_P^*(\omega) = \omega$.

Exercice 2 On s'intéresse dans cet exercice aux automorphismes de surfaces de Riemann, c'est à dire aux applications bijectives biholomorphes de X dans X.

1. Pour tout $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ et $[X : Y] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, on pose $g \cdot [X : Y] = [aX + bY : cX + dY]$. Vérifier que cela induit une action fidèle par biholomorphismes de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

2. Montrer que tout automorphisme de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est donné par l'action d'une matrice $g \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$.

3. Montrer que tout automorphisme de $\mathbb{C}$ est de la forme $z \mapsto az + b$ avec $a, b \in \mathbb{C}$. *[On pourra chercher à étendre un automorphisme de $\mathbb{C}$ en un automorphisme de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$]*

Exercice 3. Soit X une surface de Riemann compacte de genre 2.

1. Soit K le diviseur d'une forme différentielle méromorphe ω sur X. Montrer que pour tout $P \in X$, il existe $f \in H^0(X, \mathcal{O}_X(K))$ telle que $f^{\text{reg}}(P) \neq 0$. Ici f^{reg} désigne l'évaluation régularisée comme dans le cours.

2. En déduire que tout choix de base (f, g) de $H^0(X, \mathcal{O}_X(K))$ fournit un morphisme $\phi_{\omega,f,g} : X \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ de degré deux.

3. Montrer que $\phi_{\omega,f,g}$ admet exactement 6 points de branchements distincts $Q_1, \cdots, Q_6$ de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, et que l'indice de ramification en l'unique antécédant de Q_i par $\phi_{\omega,f,g}$ est égal à 2 pour tout i.

4. Inversement, montrer que pour tous $\alpha_1, \cdots, \alpha_6 \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts, en notant $Q_i = [\alpha_i, 1]$, il existe une surface de Riemann X compacte de genre 2 et un morphisme de degré deux $\phi : X \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ qui admette exactement les Q_i comme points de branchements.
[On pourra chercher X comme une surface de Riemann projective]
Dans le reste de l'exercice, on admettra que ce $\phi : X \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est bien de la forme $\phi_{\omega,f,g}$ pour ω une forme différentielle sur X de diviseur K et (f, g) une base de $H^0(K)$. On admettre d'autre part que cet X est à isomorphisme près l'unique revêtement de degré 2 de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ramifié exactement en les Q_i

5. On retourne dans le cadre des questions 1,2,3. Notons S le quotient de l'ensemble des 6-uplets d'éléments deux à deux distincts non ordonnés de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ par la relation d'équivalence
$$(Q_1, \cdots, Q_6) \sim (R_1, \cdots, R_6) \iff \exists a \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})) \,\mathrm{tq}\, a(Q_i) = R_i \,\forall i$$
Prouver que l'image des points de branchements $(Q_1, \cdots, Q_6)$ de $\phi_{\omega,f,g}$ dans S ne dépend que de X à isomorphisme près, et pas de ω, f, g.

6. Notons $\mathcal{M}_2$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de surfaces de Riemann compacte de genre 2. En déduire une bijection
$$\mathcal{M}_2 \simeq S$$

7. Prouver que tout 3-uplet (Q_1, Q_2, Q_3) de points deux à deux distincts de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, il existe un unique $a \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ tel que $a(Q_1) = 0, a(Q_2) = 1, a(Q_3) = \infty$. On a noté comme d'habitude $0 = [0 : 1], 1 = [1 : 1], \infty = [1 : 0]$.

8. Soit T l'ensemble des triplets de points deux à deux distincts (P_1, P_2, P_3) de $\mathbb{C} - \{0, 1\}$. Construire une action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_6$ à 6 variables sur T et une bijection $\mathcal{M}_2 \simeq T/\mathfrak{S}_6$.

9. De quel théorème aurait-on besoin pour en déduire une structure de variété analytique complexe sur $\mathcal{M}_2$? Serait-elle compacte ? Quelle est sa dimension ?