Examen

Durée 3h. Poly, notes de cours et de TD autorisés. You can reply in english if you wish.

Exercice 1.
0) Soit $\mathcal{X} \subset \mathbb{C}^2$ la surface de Riemann algébrique affine définie par l'équation $y^2 = x^5 - x$ dont on admet qu'elle est lisse irréductible. Montrer que $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ sont des fonctions holomorphes sur $\mathcal{X}$, et calculer $div(x)$ et $div(y)$.

Soient $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ un revêtement de surfaces de Riemann. Pour tout $Q \in \mathcal{Y}$ considéré comme un diviseur $(Q) \in \mathrm{Div}(\mathcal{Y})$ on pose $f^*((Q)) = \sum_{P \in f^{-1}(Q)} mult_P(f) \cdot (P) \in \mathrm{Div}(\mathcal{X})$. On étend ensuite cette définition par $\mathbb{Z}$-linéarité et on obtient

$$f^* : \mathrm{Div}(\mathcal{Y}) \to \mathrm{Div}(\mathcal{X})$$

1) Montrer que f^* respecte les diviseurs principaux.
2) Si X est compacte, montrer que $deg(f^*(D)) = deg(f) \cdot deg(D)$ pour tout $D \in \mathrm{div}(\mathcal{Y})$.

On note $R_f = \sum_{P \in X} (mult_P(f) - 1) \cdot (P) \in \mathrm{Div}(\mathcal{X})$ qui est le diviseur de ramification de f.

3) Soit $\omega \in \mathcal{M}(\mathcal{Y})^{\mathrm{diff}} \setminus 0$. Montrer que $\mathrm{div}(f^*\omega) = f^*(\mathrm{div}(\omega)) + R_f$. Comment en déduire la formule de Riemann-Hurwitz ?

Supposons que $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ est une surface de Riemann algébrique définie par l'annulation de $F \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ un polynôme homogène lisse. Soit $G, H \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ homogènes de même degré tel que H n'est pas identiquement nul sur $\mathcal{X}$.

4) Prouver que G/H est une fonction méromorphe sur $\mathcal{X}$.

Supposons maintenant que $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ est une surface de Riemann compacte plongée dans l'espace projectif. Soit $G \in \mathbb{C}[X_0, \cdots, X_n]$ un polynôme homogène de degré d non identiquement nul sur $\mathcal{X}$. Soit $P \in \mathcal{X}$ tel que $G(P) = 0$. Soit $H \in \mathbb{C}[X_0, \cdots, X_n]$ homogène de degré d tel que $H(P) \neq 0$. On admettra que $G/H \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ est méromorphe. Posons $ord_P(G) = ord_P(G/H) \in \mathbb{N}$.

5.1) Vérifier que $ord_P(G)$ est indépendant du choix de H.

Lorsque $P \in \mathcal{X}$ vérifie $G(P) \neq 0$, on pose $ord_P(G) = 0$. On pose enfin $div(G) = \sum_{P \in \mathcal{X}} ord_P(G) \cdot (P) \in \mathrm{Div}(\mathcal{X})$.

5.2) Montrer que l'image de $div(G)$ dans $\mathrm{Pic}(\mathcal{X})$ ne dépend que de d et pas de G.

On note enfin $\deg(\mathcal{X}) = \deg(div(G))$ pour tout G de degré 1 non identiquement nul sur $\mathcal{X}$.

5.3) Montrer que $\deg(div(G)) = \deg(\mathcal{X}) \cdot \deg(G)$.

On passe au cas particulier où $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ est définie par l'annulation de $F \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ homogène lisse de degré d.

6) Montrer que $\deg(\mathcal{X}) = d$.

7) Quel lien avec le classique théorème de Bezout ?
8) En déduire une preuve complète de la formule degré-genre $g_{\mathcal{X}} = (d-1)(d-2)/2$.

Exercice 2. Soit X une surface de Riemann. On note $\mathcal{O}_X^*$ le faisceau en groupe abélien multiplicatif des fonctions holomorphes sans zéros. On note $\underline{\mathcal{M}}_X^*$ le faisceau des fonctions méromorphes non identiquement nulles, qui vaut $\mathcal{M}(U)^*$ sur un ouvert $U \subset X$ (et si U n'est pas connexe, on demande que les éléments de $\mathcal{M}(U)^*$ ne sont pas identiquement nuls sur une compsante connexe de U). On note $\underline{\mathrm{Div}}_X$ le faisceau des diviseurs, qui vaut $\mathrm{Div}(U)$ sur un tout ouvert $U \subset X$.

1) Construire une suite de faisceaux exacte à gauche $0 \to \mathcal{O}_X^* \to \underline{\mathcal{M}}_X^* \to \underline{\mathrm{Div}}_X$.

2) Quel énoncé d'analyse complexe impliquerait que cette suite est exacte à droite $0 \to \mathcal{O}_X^* \to \underline{\mathcal{M}}_X^* \to \underline{\mathrm{Div}}_X \to 0$? On admet un tel énoncé dans la suite de l'exercice.

3) Le faisceau $\underline{\mathcal{M}}_X^*$ est il-flasque ? On admet que $H^1(X, \underline{\mathcal{M}}_X^*) = 0$.

4) Construire un isomorphisme $\phi : \mathrm{Pic}(X) \simeq H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$.

5) Construire une suite exacte courte de faisceaux $0 \to \underline{\mathbb{Z}}_X \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X^* \to 0$.

La fin de l'exercice demande d'utiliser des connaissances légèrement hors du programme de ce cours. Il en sera tenu compte dans la notation. On pourra donc se sentir libre d'énoncer des conjectures concernant le calcul de certains groupes de cohomologie afin de traiter les questions suivantes.

On suppose dans le reste du sujet que X est compacte de genre g

6) Donner une description de $\mathrm{Pic}^0(X)$ utilisant l'isomorphisme ϕ et les groupes $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ et $H^1(X, \underline{\mathbb{Z}}_X)$.
On pourra utiliser que la cohomologie des faisceaux localement constants est isomorphe à la cohomologie singulière.

7) Que reste-il à prouver pour en déduire un isomorphisme $\mathrm{Pic}^0(X) \simeq \mathbb{C}^g/\Lambda$ avec $\Lambda \subset \mathbb{C}^g$ un réseau ?

8) Relier $\mathrm{Pic}(X)$ et les fibrés en droites holomorphes sur X.
On pourra utiliser l'isomorphisme ϕ ainsi que la cohomologie de Cech.