XVII. THÉORÈME DE LEFSCHETZ AFFINE

par

Vincent Pilloni et Benoît Stroh

Nous présentons dans cet article la preuve d'Ofer Gabber du théorème de Lefschetz affine pour les schémas quasi-excellents.

1. Énoncé du théorème

Si X est un schéma muni d'une fonction de dimension δ et $\mathscr{F}$ un faisceau étale en groupes sur X, on pose

$$\delta(\mathscr{F}) = \sup\left\{\delta(x)\ ,\ x \in X \mid \mathscr{F}_{\bar{x}} \neq 0\right\}.$$

Énonçons le théorème principal de l'article.

Théorème 1.1. — *Soit $f : Y \to X$ un morphisme affine de type fini. On suppose le schéma X quasi-excellent muni d'une fonction de dimension δ_X et l'on munit Y de la fonction de dimension δ_Y induite par δ_X (chapitre XVI coro.* **??***). Pour tout entier n inversible sur X et tout faisceau constructible $\mathscr{F}$ en $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$-modules sur Y, on a*

$$\delta_Y(\mathrm{R}^q f_\star(\mathscr{F}))\ \leq\ \delta_X(\mathscr{F}) - q\,.$$

Pour prouver ce théorème, on se ramènera à l'énoncé suivant, démontré par Gabber en 1994 et dont la preuve est présentée dans [**Ill03**].

Théorème 1.2 ([**Ill03**]). — *Soient S un trait et $f : Y \to X$ un morphisme affine de type fini entre schémas de type fini sur S. On suppose X quasi-excellent muni d'une fonction de dimension δ_X, et l'on munit Y de la fonction de dimension δ_Y induite par δ_X (chapitre XVI coro.* **??***). Pour tout entier n inversible sur S et tout faisceau constructible $\mathscr{F}$ en $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$-modules sur Y, on a*

$$\delta_Y(\mathrm{R}^q f_\star(\mathscr{F}))\ \leq\ \delta_X(\mathscr{F}) - q\,.$$

Pour démontrer le théorème **1.1**, il suffit de prouver le résultat correspondant pour X strictement local, c'est-à-dire la proposition suivante.

Proposition 1.3. — *Soit $f : Y \to X$ un morphisme affine de type fini avec X strictement local quasi-excellent. On munit X de la fonction de dimension $\delta_X(x) = \dim(\overline{\{x\}})$ (chapitre XVI prop.* **??** *et* **??***) et Y de la fonction de dimension δ_Y induite par δ_X (chapitre XVI prop.* **??***). Pour tout entier n inversible sur X et tout faisceau constructible $\mathscr{F}$ en $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$-modules sur Y, on a $\mathrm{H}^q(Y, \mathscr{F}) = 0$ si $q > \delta_Y(\mathscr{F})$.*

Le théorème **1.1** implique clairement la proposition **1.3**. Montrons l'implication réciproque.

*Démonstration du théorème **1.1** à partir de la proposition **1.3**.* — On a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{rlcllr} & \delta_X(\mathrm{R}^q f_*\mathscr{F}) & \leq & \delta_Y(\mathscr{F}) - q & & \\ \Longleftrightarrow & \mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F})_{\bar{x}} & = & 0 & \text{si} \quad \delta_X(x) > \delta_Y(\mathscr{F}) - q & \forall\, \bar{x} \to x \in X \\ \Longleftrightarrow & \mathrm{H}^q(Y_{(\bar{x})}, \mathscr{F}) & = & 0 & \text{si} \quad q > \delta_Y(\mathscr{F}) - \delta_X(x) \geq \delta_{Y_{(\bar{x})}}(\mathscr{F}) & \forall\, \bar{x} \to x \in X. \end{array}$$

Comme $Y_{(\bar{x})}$ est quasi-excellent si X l'est, on peut appliquer la proposition **1.3** pour conclure.

D'après le dévissage classique de [**SGA 4** XIV 4.3] il suffit de démontrer le cas particulier suivant de la proposition **1.3**.

Proposition 1.4. — *Soit X un schéma strictement local quasi-excellent de dimension d, soit U un ouvert affine de X, soit n un entier inversible sur X et soit $\mathscr{F}$ un faisceau constructible en $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$-modules sur U. On a $\mathrm{H}^q(U, \mathscr{F}) = 0$ si $q > d$.*

Donnons le plan de la démonstration de la proposition **1.4**. Dans la partie 2, on se ramène au cas où $\mathscr{F} = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et X est complet. Dans la partie 3, on considère un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ U \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

où X et Y sont des schémas strictement locaux, le morphisme de X dans Y est local, et U et V des ouverts de X et Y. On établit un critère pour que le morphisme d'adjonction $\mathrm{R}\Gamma(U, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \to \mathrm{R}\Gamma(V, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ soit un isomorphisme. Dans le cas où U et V sont des complémentaires de diviseurs à croisements normaux, le théorème de pureté permet de traduire ce critère en termes de combinatoire des diviseurs à croisements normaux. Dans le cas général, si $\big(U \hookrightarrow X\big)$ et $\big(V \hookrightarrow Y\big)$ peuvent être désingularisés par des hyper-recouvrements $\big(U_\bullet \hookrightarrow X_\bullet\big)$ et $\big(V_\bullet \hookrightarrow Y_\bullet\big)$ où $U_\bullet$ et $V_\bullet$ sont des complémentaires de diviseurs à croisements normaux, la condition porte sur la combinatoire de ces diviseurs à croisements normaux.

Soit U un ouvert affine d'un schéma local complet quasi-excellent X. D'après [**ÉGA** 0_{IV} 19.8.8], l'anneau de X est quotient d'un anneau de séries formelles à coefficients dans un anneau de Cohen I du corps résiduel du point fermé de X. L'objectif de la partie 4 est de construire un ouvert affine U_0 d'un schéma X_0 de type fini sur I, de même dimension que X et tel que

$$\mathrm{H}^q(U, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(U_0, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}).$$

On peut donc appliquer le théorème **1.2** pour annuler ce groupe de cohomologie.

2. Deux dévissages

Considérons maintenant un schéma X strictement local, quasi-excellent, de dimension d. Soient U un ouvert affine de X, n un entier inversible sur X et $\mathscr{F}$ un faisceau constructible en $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$-modules sur U. Notre objectif est de montrer que $\mathrm{H}^q(U, \mathscr{F}) = 0$ si $q > d$.

Lemme 2.1. — *On peut se limiter au cas où $\mathscr{F} = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.*

Démonstration. — Supposons donc que la proposition **1.4** soit vraie pour tout schéma strictement local, quasi-excellent, avec les coefficients constants $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et déduisons le pour U, X et $\mathscr{F}$. Par la méthode de la trace ([**SGA 4** IX 5.6]), on peut supposer que $\mathscr{F}$ est égal à $f_\star j_!\, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, avec un diagramme

$$W' \xrightarrow{j} U' \xrightarrow{f} U$$

dans lequel j est une immersion ouverte, U' est un schéma intègre et f est un morphisme fini. Introduisons le normalisé X' de X dans U'. Comme X est quasi-excellent, X' est fini sur X et donc quasi-excellent. On a $\dim X \geq \dim X'$. De plus X étant hensélien et U' intègre et dense dans X', on vérifie facilement que X' est fini, local sur X. Considérons le complémentaire $Y' = X' \setminus W'$ de W' dans X' et l'ouvert affine $V' = U' \setminus W'$ de Y'. On a $\dim Y' < \dim X'$. En considérant le triangle

$$j_!\, (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})_{W'} \longrightarrow (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})_{U'} \longrightarrow (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})_{V'}$$

et la suite longue associée et en appliquant la proposition **1.4** avec les coefficients constants à U' et V', on en déduit que $\mathrm{H}^q(U', j_!\, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) = 0$ pour $q > \dim X'$. Or

$$\mathrm{H}^q(U, f_\star j_!\, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \;=\; \mathrm{H}^q(U', j_!\, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})\;,$$

ce qui nous permet de conclure.

Lemme 2.2. — *On peut se limiter au cas où X est complet.*

Démonstration. — Soit $\widehat{X}$ le complété de X. Le morphisme naturel de $\widehat{X}$ dans X est régulier car X est quasi-excellent. Soit U un ouvert affine de X. Notons $\widehat{U}$ son image inverse dans $\widehat{X}$; c'est un ouvert affine de $\widehat{X}$ de même dimension que U. En appliquant le lemme de changement de base par un morphisme régulier **??** au diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} \widehat{U} \arrow[r] \arrow[d] & U \arrow[d] \\ \widehat{X} \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

on obtient $\mathrm{H}^q(\widehat{U}, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) = \mathrm{H}^q(U, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ pour tout $q \geq 0$ et tout entier n inversible sur X.

3. Un théorème de changement de base

Soit

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ U \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

un carré commutatif où X et Y sont des schémas strictement locaux, le morphisme $Y \to X$ est local et U, V sont des ouverts respectifs de X et Y. Dans cette section, nous établissons un critère pour que le morphisme d'adjonction $\mathrm{R}\Gamma(U, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \to \mathrm{R}\Gamma(V, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ soit un isomorphisme.

3.1. Pureté. — Nous rappelons le théorème de pureté absolue démontré par Gabber. Par convention, on considère le schéma vide comme un diviseur strictement à croisements normaux dont l'ensemble des branches est indexé par l'ensemble vide.

Théorème 3.2 **(ch. XVIII th. ??).** — *Soient X un schéma régulier, Z un diviseur strictement à croisements normaux de complémentaire $j : U = X \backslash Z \hookrightarrow X$ et de branches $\{Z_i\}_{i \in I}$, et n un entier inversible sur X. Il existe des isomorphismes canoniques*

$$\begin{aligned} \mathrm{R}^1 j_\star (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) & \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i \in I} (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})_{Z_i}(-1) \\ \mathrm{R}^q j_\star (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) & \xrightarrow{\sim} \bigwedge^q \mathrm{R}^1 j_\star (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \end{aligned}$$

Considérons un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "j'"] \arrow[d] & Y \arrow[d, "g"] & T \arrow[l] \arrow[d] \\ U \arrow[r, "j"] & X & Z \arrow[l] \end{tikzcd}$$

où X et Y sont des schémas réguliers et U et V des ouverts complémentaires de diviseurs à croisements normaux Z et T.

Définition 3.3. — Soient $\bar{y} \to Y$ un point géométrique et $f_1, \cdots, f_r$ un système d'équations locales des branches de Z en $g(\bar{y})$. On dit que $(Z \hookrightarrow X)$ et $(T \hookrightarrow Y)$ ont *même combinatoire en $\bar{y}$* si $g^*(f_1), \cdots, g^*(f_r)$ est un système d'équations locales des branches de T en $\bar{y}$; cette notion est indépendante du choix des f_i. On dit ont que $(Z \hookrightarrow X)$ et $(T \hookrightarrow Y)$ *même combinatoire* s'ils ont même combinatoire en tout point géométrique de Y.

Corollaire 3.4. — *Si ($Z \hookrightarrow X$) et ($T \hookrightarrow Y$) ont même combinatoire, la flèche de changement de base*

$$g^\star \, \mathrm{R}j_\star \, (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}j'_\star \, (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$$

est un isomorphisme. En particulier, si X et Y sont strictement locaux et g est local, on dispose d'un isomorphisme

$$\mathrm{R}\Gamma(U, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}\Gamma(V, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \, .$$

Démonstration. — Il suffit de montrer le second point. D'après le théorème **3.2**, les algèbres de cohomologie de U et de V sont des algèbres extérieures sur leur composante de degré 1. Il suffit donc de montrer que g induit un isomorphisme $\mathrm{H}^1(U, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1(V, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$. Cela résulte du calcul de ces groupes de cohomologie en terme de combinatoire des branches et du fait que les classes de cohomologie associées aux branches de Z et de T se correspondent par g (chapitre XVIII partie **??**).

3.5. Application du théorème de descente fléchée. — Considérons un diagramme commutatif à carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "j'"] \arrow[d] & Y \arrow[d, "g"] & T \arrow[l] \arrow[d] \\ U \arrow[r, "j"] & X & Z \arrow[l] \end{tikzcd}$$

où X et Y sont des schémas quasi-excellents strictement locaux de points fermés respectifs x et y, où g est un morphisme local, et où U et V sont des ouverts respectifs de X et Y. On note $h : x \to X$ et $h' : y \to Y$ les immersions fermées canoniques. Nous désignerons par le sigle *pspf* la topologie des altérations introduite dans le chapitre II. Soit

$$\begin{tikzcd} U_\bullet \arrow[r, "j_\bullet"] \arrow[d, "\varepsilon_U"] & X_\bullet \arrow[d, "\varepsilon_X"] & Z_\bullet \arrow[l] \arrow[d, "\varepsilon_Z"] \\ U \arrow[r, "j"] & X & Z \arrow[l] \end{tikzcd}$$

un diagramme cartésien d'hyper-recouvrements *pspf*. Par changement de base, on obtient des hyper-recouvrements *pspf* $\varepsilon_Y : Y_\bullet \to Y$, $\varepsilon_V : V_\bullet \to V$, $\varepsilon_T : T_\bullet \to T$, $\varepsilon_{X,x} : X_{\bullet,x} \to x$ et $\varepsilon_{Y,y} : Y_{\bullet,y} \to y$. On note $h_\bullet : X_{\bullet,x} \to X_\bullet$ et $h'_\bullet : Y_{\bullet,y} \to Y_\bullet$ les immersions fermées obtenues par image inverse de h et de h', et $g_\bullet : Y_\bullet \to X_\bullet$ le morphisme obtenu par image inverse de g.

Proposition 3.6. — *On fait les hypothèses que pour tout i :*
- *l'étage X_i (resp. Y_i) est un schéma régulier en tout point de sa fibre spéciale,*
- *l'étage Z_i (resp. T_i) est un diviseur à croisements normaux en tout point de la fibre spéciale,*
- *($Z_i \hookrightarrow X_i$) et ($T_i \hookrightarrow Y_i$) ont même combinatoire en tout point de la fibre spéciale de Y_i.*

Si n est un entier inversible sur X, la flèche naturelle

$$\mathrm{R}\Gamma(U, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}\Gamma(V, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — La proposition résulte des isomorphismes canoniques suivants.

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{R}\Gamma(U, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) & \xrightarrow{\sim} & h^* \, \mathrm{R}j_\star \, (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) & \\ & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{R}(\varepsilon_{X,x})_\star \, h_\bullet^\star \, \mathrm{R}(j_\bullet)_\star \, (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) & (\textbf{??} \text{ et } \textbf{??}) \\ & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{R}(\varepsilon_{Y,y})_\star \, (h'_\bullet)^\star \, g_\bullet^\star \, \mathrm{R}(j_\bullet)_\star \, (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) & \\ & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{R}(\varepsilon_{Y,y})_\star \, (h'_\bullet)^\star \, \mathrm{R}(j'_\bullet)_\star \, (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) & (\mathbf{3.4}) \\ & \xrightarrow{\sim} & (h')^* \, \mathrm{R}j'_\star \, (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) & (\textbf{??} \text{ et } \textbf{??}) \\ & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{R}\Gamma(V, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) & \end{array}$$

Le fait que la flèche $h^*\mathrm{R}j_\star \, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \to \mathrm{R}(\varepsilon_{X,x})_\star \, h_\bullet^\star \, \mathrm{R}(j_\bullet)_\star \, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ réalise un isomorphisme résulte du théorème de descente fléchée ; ce fait a été montré dans le paragraphe **??** du chapitre XIV et a été rappelé dans le théorème **??** du chapitre XV. Remarquons que l'application du corollaire **3.4** est justifiée. En effet, d'après l'hypothèse de quasi-excellence et le théorème de pureté, il existe un voisinage ouvert de la fibre spéciale de $Y_\bullet$ sur lequel le morphisme canonique $g_\bullet^\star\,\mathrm{R}(j_\bullet)_\star\,\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \to \mathrm{R}(j'_\bullet)_\star\,\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ réalise un isomorphisme. On a donc bien un isomorphisme $(h'_\bullet)^\star\,g_\bullet^\star\,\mathrm{R}(j_\bullet)_\star\,\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \to (h'_\bullet)^\star\,\mathrm{R}(j'_\bullet)_\star\,\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$

Remarque 3.7. — Dans ce critère, on ne fait d'hypothèses qu'en les points des fibres spéciales des hyper-recouvrements ; c'est ce qui en fait toute sa force.

3.8. Une version tronquée du critère. — Nous allons donner une version plus pratique de la proposition **3.6**, valable pour des hyper-recouvrements tronqués qui interviendront par la suite. Fixons quelques notations. Soient $\varepsilon_X : X_\bullet \to X$ un hyper-recouvrement et $N \in \mathbb{N}$ un entier. Notons $X_{\bullet\leq N} = sq_N(X_\bullet)$ la troncature de $X_\bullet$ en les degrés $\leq N$. Pour tout $\mathscr{G} \in \mathsf{D}_c^+(X, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ et pour tout entier $r \in \mathbf{N}$, notons $\tau_{\leq r}\,\mathscr{G}$ la troncature canonique au cran r.

Lemme 3.9. — *Soit $\mathscr{F}_\bullet$ un faisceau de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$-modules sur $X_\bullet$. Le complexe tronqué $\tau_{\leq r}\mathrm{R}(\varepsilon_X)_\star\mathscr{F}_\bullet$ ne dépend que de $X_{\bullet\leq r+1}$.*

Démonstration. — Pour tout entier $q \geq 0$, notons $f_q : X_q \to X$ le morphisme structural du q-ième étage de l'hyper-recouvrement. Soit $A^{q,\cdot}$ un complexe représentant $\mathrm{R}f_{q,\star}\,\mathscr{F}$ pour $q \geq 0$. On sait que $\mathrm{R}(\varepsilon_X)_\star(\mathscr{F}_\bullet)$ est représenté par le complexe simple associé au complexe double

$$\begin{tikzcd} A^{q+1,p} \arrow[r] & A^{q+1,p+1} \\ A^{q,p} \arrow[r] \arrow[u] & A^{q,p+1} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

pour p et $q \geq 0$, où les différentielles verticales sont des sommes alternées de flèches induites par les différents morphismes $X_{q+1} \to X_q$. Le complexe $\tau_{\leq q}\mathrm{R}(\varepsilon_X)_\star\,\mathscr{F}_\bullet$ est représenté par le complexe simple associé au complexe double tronqué de $A^{q,p}$ en les degrés $p+q \leq r$ et ne fait donc intervenir que $X_{\bullet\leq r+1}$.

On en déduit une version tronquée de la proposition **3.6**. On se place dans le cadre du début du paragraphe **3.5**, et l'on se donne un diagramme cartésien d'hyper-recouvrements *pspf* tronqués

$$\begin{tikzcd} U_{\bullet\leq N} \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_U"] & X_{\bullet\leq N} \arrow[d, "\varepsilon_X"] & Z_{\bullet\leq N} \arrow[l] \arrow[d, "\varepsilon_Z"] \\ U \arrow[r] & X & Z \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Par changement de base, on obtient des hyper-recouvrements *pspf* $\varepsilon_Y : Y_{\bullet\leq N} \to Y$, $\varepsilon_V : V_{\bullet\leq N} \to V$ et $\varepsilon_T : T_{\bullet\leq N} \to T$. On adopte des notations analogues à celles du paragraphe **3.5**.

Proposition 3.10. — *On fait les hypothèses que pour tout $i \leq N$:*
- *l'étage X_i (resp. Y_i) est un schéma régulier en tout point de sa fibre spéciale,*
- *l'étage Z_i (resp. T_i) est un diviseur à croisements normaux en tout point de la fibre spéciale,*
- *$(Z_i \hookrightarrow X_i)$ et $(T_i \hookrightarrow Y_i)$ ont même combinatoire en tout point de la fibre spéciale de Y_i.*

Si n est un entier inversible sur X, la flèche naturelle

$$\mathrm{H}^q(U, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \longrightarrow \mathrm{H}^q(V, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$$

est un isomorphisme pour tout $q < N$.

Démonstration. — Commençons par considérer l'hyper-recouvrement complet $X_\bullet = \mathrm{cosq}_N X_{\bullet\leq N}$. Par changement de base, on en déduit un hyper-recouvrement complet $Y_\bullet$ de Y. La démonstration s'effectue comme pour le critère non tronqué, à l'aide du lemme **3.9**. On dispose en effet des isomorphismes canoniques suivantes.

$$\begin{array}{rcll} \tau_{\leq N-1}\,\mathrm{R}\Gamma(U,\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) & \xrightarrow{\sim} & \tau_{\leq N-1}\,h^{*}\,\mathrm{R}j_{\star}\,(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) & \\ & \xrightarrow{\sim} & \tau_{\leq N-1}\,\mathrm{R}(\varepsilon_{X,x})_{\star}\,h_{\bullet}^{\star}\,\mathrm{R}(j_{\bullet})_{\star}\,(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) & (\mathbf{??}\text{ et }\mathbf{??}) \\ & \xrightarrow{\sim} & \tau_{\leq N-1}\,\mathrm{R}(\varepsilon_{Y,y})_{\star}\,(h'_{\bullet})^{\star}\,g_{\bullet}^{\star}\,\mathrm{R}(j_{\bullet})_{\star}\,(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) & \\ & \xrightarrow{\sim} & \tau_{\leq N-1}\,\mathrm{R}(\varepsilon_{Y,y})_{\star}\,(h'_{\bullet})^{\star}\,\mathrm{R}(j'_{\bullet})_{\star}\,(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) & (\mathbf{3.4}\text{ et }\mathbf{3.9}) \\ & \xrightarrow{\sim} & \tau_{\leq N-1}\,(h')^{*}\,\mathrm{R}j'_{\star}\,(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) & (\mathbf{??}\text{ et }\mathbf{??}) \\ & \xrightarrow{\sim} & \tau_{\leq N-1}\,\mathrm{R}\Gamma(V,\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) & \end{array}$$

4. Uniformisation et approximation des données

Nous réduisons à présent le problème au cas où X est localisé d'un schéma de type fini sur un trait, qui est redevable de **1.2**.

4.1. Uniformisation. — Soient $X = \mathrm{Spec}(R)$ un schéma strictement local complet quasi-excellent, U un ouvert affine de X, et n un entier inversible sur X. On veut annuler $\mathrm{H}^q(U,\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ pour $q > \dim X$. On peut supposer que U est dense. Appliquons le théorème d'uniformisation de Gabber (chapitre VII th. **??** et chapitre XV th. **??**).

Proposition 4.2. — *Il existe un hyper-recouvrement pspf $\varepsilon : X_\bullet \to X$ tel que X_i soit régulier et que $Z_i = X_i \times_X Z$ soit un diviseur à croisements normaux pour tout $i \geq 0$.*

Soient N un entier et $X_{\bullet \leq N}$ le tronqué à l'ordre N de cet hyper-recouvrement.

4.3. Passage à un cran α. — Notons I un anneau de Cohen de corps résiduel égal au corps résiduel de R. D'après le théorème de structure des anneaux locaux complets noethériens ([**ÉGA** 0_{IV} 19.8.8]), l'anneau local complet R est isomorphe à un quotient $\widehat{A}/P$ où $\widehat{A} = I[[\underline{T}]]$ est un anneau de séries formelles sur I en un nombre fini de variables et P est un idéal de type fini de $\widehat{A}$.

Notons A le localisé strict de $I[\underline{T}]$ en l'idéal engendré par $\underline{T}$ et par l'idéal maximal de I. L'anneau $\widehat{A}$ est bien égal au complété de A. D'après le théorème de Popescu, on peut écrire $\widehat{A}$ comme limite inductive filtrante de A-algèbres A^α essentiellement lisses et strictement locales, soit

$$\widehat{A} = \mathrm{colim}\, A^\alpha.$$

Le lemme suivant résulte immédiatement de [**Mat86**, th.14.2] en utilisant la caténarité des anneaux réguliers (chapitre XVI exemple **??**).

Lemme 4.4. — *Soit B un anneau, $r \geq 0$ un entier, $\mathfrak{p}$ un idéal premier de B et $f_1, \cdots, f_r$ des éléments de $\mathfrak{p}$. On suppose que B est régulier en $\mathfrak{p}$. L'anneau $B/(f_1, \cdots, f_r)$ est régulier en $\mathfrak{p}$ et définit un sous-schéma fermé de codimension r dans* $\mathrm{Spec}(B)$ *si et seulement si les images des f_i dans $\mathfrak{p}B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2B_\mathfrak{p}$ forment une famille libre sur $k(\mathfrak{p})$.*

Proposition 4.5. — *Pour α assez grand, le diagramme*

$$\begin{tikzcd} U_{\bullet\leq N} \arrow[r] \arrow[d] & X_{\bullet\leq N} \arrow[d] & Z_{\bullet\leq N} \arrow[l] \arrow[d] \\ U \arrow[r] \arrow[dr] & X \arrow[d] & Z \arrow[l] \arrow[dl] \\ & \mathrm{Spec}(\widehat{A}) & \end{tikzcd}$$

provient par image inverse d'un diagramme

$$\begin{tikzcd}
U^{\alpha}_{\bullet\leq N} \arrow[r] \arrow[d] & X^{\alpha}_{\bullet\leq N} \arrow[d] & Z^{\alpha}_{\bullet\leq N} \arrow[l] \arrow[d] \\
U^{\alpha} \arrow[r] \arrow[dr] & X^{\alpha} \arrow[d] & Z^{\alpha} \arrow[l] \arrow[dl] \\
& \mathrm{Spec}(A^{\alpha}). &
\end{tikzcd}$$

où U^{α} est un ouvert affine de X^{α}. De plus, on peut supposer que la flèche $\varepsilon^{\alpha} : X^{\alpha}_{\bullet\leq N} \to X^{\alpha}$ est couvrante pour la topologie pspf, et que pour tout $k \leq N$:
- *l'étage X^{α}_k est un schéma régulier en tout point de sa fibre spéciale,*
- *l'étage Z^{α}_k est un diviseur à croisements normaux en tout point de la fibre spéciale,*
- *$(Z^{\alpha}_k \hookrightarrow X^{\alpha}_k)$ et $(Z_k \hookrightarrow X_k)$ ont même combinatoire en tout point de la fibre spéciale de X_k.*

Remarque 4.6. — Les schémas X_k et X^{α}_k ont même fibre spéciale pour tout $k \leq N$.

Démonstration. — Toutes les données X, Z, U, $X_{\bullet\leq N}$ sont de présentation finie sur $\mathrm{Spec}(\hat{A})$, et il n'y a qu'un nombre fini de telles données. Il existe donc un indice α assez grand et des schémas X_{α}, U_{α} et $X^{\alpha}_{\bullet\,\leq N}$ qui descendent X, U et $X_{\bullet\leq N}$ à $\mathrm{Spec}(A_{\alpha})$. Vérifions que les différentes assertions sont vérifiées.

Le premier point résulte du fait que chacune des propriétés « propre », « immersion ouverte », « surjectif », « affine » est vérifiée sur une limite projective filtrante de schémas si et seulement elle l'est sur un cran assez grand [**ÉGA** IV$_3$ 8.10.5].

Montrons que quitte à augmenter α, on peut supposer que X^{α}_k est régulier en chaque point de sa fibre spéciale pour tout $k \leq N$. Quitte à considérer un nombre fini d'ouverts affines de X_k qui recouvrent la fibre spéciale, on peut supposer qu'il existe un anneau régulier B de type fini sur $\widehat{A}$, un entier $r \geq 0$, des éléments $f_1, \cdots, f_r \in B$ qui engendrent un idéal de codimension r, et un isomorphisme $X_k \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spec}(B/(f_1, \cdots, f_r))$. En effet, il suffit de plonger localement X_k dans un espace affine et d'utiliser le fait qu'une immersion régulière est localement d'intersection complète [**ÉGA** IV$_4$ 19.3.2]. On peut également supposer qu'il existe un anneau régulier B^{α} de type fini sur A^{α} tel que $B = B^{\alpha} \otimes_{A^{\alpha}} \widehat{A}$, des éléments $f^{\alpha}_1, \cdots, f^{\alpha}_r \in B^{\alpha}$ qui induisent $f_1, \cdots, f_r$, et un isomorphisme $X^{\alpha}_k \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spec}(B^{\alpha}/(f^{\alpha}_1, \cdots, f^{\alpha}_r))$. Soit $\mathfrak{p}$ l'idéal d'un point de la fibre spéciale de X_k. Notons $\mathfrak{p}^{\alpha}$ l'idéal du point correspondant de la fibre spéciale de X^{α}_k. Le morphisme $A^{\alpha} \to \widehat{A}$ induit un morphisme $\mathfrak{p}^{\alpha}B^{\alpha}_{\mathfrak{p}^{\alpha}}/(\mathfrak{p}^{\alpha})^2B^{\alpha}_{\mathfrak{p}^{\alpha}} \to \mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^2B_{\mathfrak{p}}$. D'après le lemme **4.4**, les images des f_i dans $\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^2B_{\mathfrak{p}}$ sont linéairement indépendantes sur $k(\mathfrak{p})$. Les images des f^{α}_i dans $\mathfrak{p}^{\alpha}B^{\alpha}_{\mathfrak{p}^{\alpha}}/(\mathfrak{p}^{\alpha})^2B^{\alpha}_{\mathfrak{p}^{\alpha}}$ sont donc linéairement indépendantes sur $k(\mathfrak{p}^{\alpha}) = k(\mathfrak{p})$. D'après le lemme **4.4**, l'anneau $B^{\alpha}/(f^{\alpha}_1, \cdots, f^{\alpha}_r)$ est bien régulier en $\mathfrak{p}$.

On montre les deux derniers points de la proposition d'une manière analogue.

4.7. Approximation. — La proposition suivante résulte des techniques d'approximation de Gabber exposées dans le chapite III (références précises ? ? ?).

Proposition 4.8. — *Il existe une section* $\mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(A^{\alpha})$ *telle que le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
U^{0}_{\bullet\leq N} \arrow[r] \arrow[d] & X^{0}_{\bullet\leq N} \arrow[d] & Z^{0}_{\bullet\leq N} \arrow[l] \arrow[d] \\
U^{0} \arrow[r] \arrow[dr] & X^{0} \arrow[d] & Z^{0} \arrow[l] \arrow[dl] \\
& \mathrm{Spec}(A) &
\end{tikzcd}$$

déduit par changement de base du diagramme

$$\begin{tikzcd} U^\alpha_{\bullet\leq N} \arrow[r] \arrow[d] & X^\alpha_{\bullet\leq N} \arrow[d] & Z^\alpha_{\bullet\leq N} \arrow[l] \arrow[d] \\ U^\alpha \arrow[r] \arrow[dr] & X^\alpha \arrow[d] & Z^\alpha \arrow[l] \arrow[dl] \\ & \mathrm{Spec}(A^\alpha) & \end{tikzcd}$$

vérifie les propriétés suivantes :

- *la flèche* $\varepsilon^0 : X^0_{\bullet\leq N} \to X^0$ *est couvrante pour la topologie pspf,*
- *l'étage* X^0_k *est un schéma régulier en tout point de sa fibre spéciale pour tout* $k \leq N$*,*
- *l'étage* Z^0_k *est un diviseur à croisements normaux en tout point de la fibre spéciale pour tout* $k \leq N$*,*
- $(Z^\alpha_k \hookrightarrow X^\alpha_k)$ *et* $(Z^0_k \hookrightarrow X^0_k)$ *ont même combinatoire en tout point de la fibre spéciale de* X^α_k *pour tout* $k \leq N$*,*
- *les schémas* X *et* X^0 *ont même dimension et* U^0 *est un ouvert affine de* X^0*.*

4.9. Fin de la démonstration du théorème. — Il suffit d'appliquer la proposition **3.10** aux deux carrés du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X_{\bullet\leq N} \arrow[r] \arrow[d] & X^\alpha_{\bullet\leq N} \arrow[d] & X^0_{\bullet\leq N} \arrow[l] \arrow[d] \\ X \arrow[r] & X^\alpha & X^0 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

pour prouver que pour tout $q < N$, il existe des isomorphismes

$$\mathrm{H}^q(U, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \simeq \mathrm{H}^q(U^\alpha, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \simeq \mathrm{H}^q(U^0, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}).$$

Le schéma X^0 est essentiellement de type fini sur le trait I, et de même dimension que X. On peut donc appliquer le théorème **1.2** à X_0 pour montrer que $\mathrm{H}^q(U, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) = 0$ pour $N > q > \dim(X)$. On conclut la démonstration du théorème **1.1** en remarquant que N est arbitraire.

Références

[Ill03] L. Illusie – « Perversité et variation », *Manuscripta Mathematica* **112** (2003), no. 3, p. 271–295.

[Mat86] H. Matsumura – *Commutative ring theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 8, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

Vincent Pilloni et Benoît Stroh