Bref $\exists$ homeo

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})_{cons} \simeq \hat{\mathbb{N}}$$) ensemble profini

où
$$p_i \longleftarrow\!\shortmid\; i$$
$$\eta \longleftarrow\!\shortmid\; \infty$$

$$\hat{\mathbb{N}} = \lim\left(\{0\} \leftarrow \{0,1\} \leftarrow \{0,1,2\} \leftarrow \{0,1,2,3\} \leftarrow \;\right)$$

$0 \leftarrow\!\shortmid 1$

$1 \leftarrow\!\shortmid 2$, $1 \leftarrow\!\shortmid 1$, $0 \leftarrow\!\shortmid 0$

$2 \leftarrow\!\shortmid 3$, $2 \leftarrow\!\shortmid 2$, $1 \leftarrow\!\shortmid 1$, $0 \leftarrow\!\shortmid 0$

bref à chaque fois on écrase $n+1$ sur n

<u>Fait</u> (réf stack?) $\forall X$ qc, X_{cons} = ensemble profini

$\boxed{\text{Th}}$ (on a tous les ingrédients de la preuve dans la construction de X_ω)

$\forall X = \mathrm{Spec}(A)$ affine

$$\begin{tikzcd}
X_\omega \arrow[d, "g"'] & Z_\omega \arrow[l, hook'] \arrow[dl, "g|_{Z_\omega}"'] \arrow[d, "h"] \\
X_{zar} & X_{cons} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

$Z_\omega \simeq \pi_0(X_\omega)$

étrange, c'est un schéma dont l'espace topo est profini

h se factorise de manière continue

$X_{zar} \leftarrow X_{cons}$: bijectif (c'est Id_X) continu, pas homeo] ie changement de topo sur X

et $h : Z_\omega \xrightarrow{\sim} X_{cons}$ homeo

<u>Coro</u> $X_\omega = \int_{X_{cons} \ni x} \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})\, dx$

ie on met les $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ ensemble $\forall x \in X$

mais en topologisant $\coprod_{x \in X} \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$

selon l'ens profini X_{cons}

<u>Coro</u> X_ω noethérien $\Rightarrow \pi_0(X_\omega) = X_{cons}$ fini

$\Rightarrow X$ <u>fini</u>

En un mot, $\underbrace{X_{ens}}_{\text{l'ens ss-jacent}} = \cancel{\mathrm{colim} \coprod_{Z_i \text{ strat}_f \text{ constructible de } X} Z_i}$

$= \underset{\substack{\{Z_i\} \text{ strat}_f \\ i \in I \text{ constructible} \\ \text{de } X}}{\mathrm{colim}} \coprod_{i \in I} Z_i \in \mathrm{Set}$

et cette colimite est constante égale à n'importe quel terme

(nécessite Stack. lem 5.? ch profinite)

$X_{cons} = \underset{\{Z_i\}}{\mathrm{coli}} \coprod_{i \in I} Z_i \in \mathrm{Top}$

$X_\omega = \underset{\{Z_i\}}{\mathrm{colim}} \coprod_{i \in I} \widetilde{Z_i} \in \mathrm{Sch}$ ou $\in \mathrm{Top}$

où $\widetilde{Z_i} = \{ x \in X \text{ tq } x \rightsquigarrow z \in Z_i \}$

<u>Lem</u> X ω-local, $Z \subset X$ fermé $\Rightarrow Z$ ω-loc

<u>Demo</u> à voir $Z^c \subset Z$ fermé, c'est clair car $Z^c = Z \cap X^c$

et tout pts de Z spécial, mais on l'écrit

NB · fausse a priori que X ω-loc, $\mathcal{U} \subset X$ ouvert (même qc)
$\Rightarrow \mathcal{U}$ ω-loc

· donc pas clair que la construction de $X \mapsto X_\omega$ s'étend à X nonaffine

(déjà $\mathcal{U}^c \underset{\text{géné}}{\subset} \mathcal{U}$ pris en défaut a priori car $\mathcal{U}^c \not\subset \mathcal{U} \cap X^c$
$\left[\mathcal{U} = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_p \hookrightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{Z}_p = X \right]$
$\mathcal{U}^c = \mathcal{U}, \quad \mathcal{U} \cap X^c = \phi$)

et le fait que les rec, scinde ne se déduit pas
ouvert de $\mathcal{U}$

· du fait analogue pour X

Rem : · A_ω est "gros" car non noethérien dès que l'ens profini X_{cons} est non fini i.e. dès que l'ens X est non fini

· néanmoins on voit directement sur la construction que
$$\underbrace{\operatorname{card}}_{\text{au sens de Cantor}}(A_\omega) = \operatorname{card}(A) \quad \forall A$$

Morale · $\forall X$ schéma affine on a $\underbrace{X_\omega}_{\omega\text{-loc}} \xrightarrow{\text{pro zar}} X$

· donc $\forall X$ schéma on a $\underbrace{X'_\omega}_{\amalg\, \omega\text{-loc}} \xrightarrow{\text{pro zar}} \underbrace{X'}_{\substack{\amalg \text{ affines} \\ \text{(et affine si } X \text{ qc)}}} \xrightarrow{\text{rec Zar}} X$

· ensuite $\forall\ \mathcal{U}' \underset{\text{zar}}{\overset{\text{ouvert}}{\hookrightarrow}} X'_\omega$
$\uparrow$ pro zar
$\exists\ \mathcal{U}''_\omega$

etc. Mais dans ce processus on sort du site Zariski à chaque fois qu'on doit faire une ω-localisation

Conséquence coho des recouvrements scindés

Soit $\mathcal{C}$ un site muni de coproduits (ie de colim indexée par une petite catégorie discrète)

$\rightsquigarrow$ on peut remplacer la notion de rec $(U_i \xrightarrow{f_i} U)_{i\in I}$ à I objets par le rec $V \left(= \coprod_{i\in I} U_i\right) \xrightarrow{f = \amalg f_i} U$ à 1 objet

$\rightsquigarrow$ néanmoins dans ce processus il faudra faire attention que $\forall \mathcal{F}$ préfaisceau sur $\mathcal{C}$,

$$\mathcal{F}\left(\coprod_{i\in I} U_i\right) \neq \prod_{i\in I} \mathcal{F}(U_i) \quad \text{en général}$$

$\rightsquigarrow$ on pourra utiliser ce processus seulement sur les préfaisc vérifiant l'axiome $\mathcal{F}(\amalg U_i) = \prod \mathcal{F}(U_i)$

$\boxed{\text{Lem}}$ Soit $V \underset{s}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} U$ recouvrement dans $\mathcal{C}$ ayant section s $(\pi \circ s = Id_U)$

et $\mathcal{F}$ préfais$/\mathcal{C}$, alors

$$0 \to \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\pi^*} \mathcal{F}(V) \underset{pr_2^*}{\overset{pr_1^*}{\rightrightarrows}} \mathcal{F}(V \times_U V) \quad \text{exact}$$

(ie l'axiome de fais est automatiquement vérifié sur les rec scindés)

Demo • $s^* \circ \pi^* = Id_{\mathcal{F}(U)}$ donc π^* injectif

• si $g \in \mathcal{F}(V)$ tq $pr_1^*(g) = pr_2^*(g)$ $(*)$

soit $f = s^*(g) \in \mathcal{F}(V)$, on veut $\pi^*(f) \overset{?}{=} g$

pas clair car $\pi^* \circ s^* \neq id$, mais il faut bien s'en utiliser $(*)$

L DU
PLACE

$$\begin{tikzcd} \mathcal{V} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "t"'] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "\square"] & \mathcal{U} \arrow[d, "s"] \arrow[dd, bend left, "id_{\mathcal{U}}"] \\ \mathcal{V}\times_{\mathcal{U}}\mathcal{V} \arrow[r, "pr_1"] \arrow[d, "pr_2"'] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "\square"] & \mathcal{V} \arrow[d, "\pi"] \\ \mathcal{V} \arrow[r, "\pi"] & \mathcal{U} \end{tikzcd}$$

le produit fibré du carré du haut donne $\mathcal{V}$ par transitivité du produit fibré, en calculant avec le diagramme concaténé

on a donc t section de pr_2

t^* ($pr_2^* g = pr_1^* g$)

donne $t^* pr_2^* g \underset{\text{carré commutatif en haut}}{=} t^* pr_1^* g$

$(pr_2 \circ t)^* g$ ‖ , ‖ $\pi^* s^* g = \pi^* f$ cqfd

‖ g

<u>Rem</u> on a déjà utilisé exactement cette preuve (au niveau des anneaux) si $\mathcal{E} = X_{fppc}$, $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$

pour vérifier $0 \to B \to B\otimes_A B \rightrightarrows B^{\otimes_A 3}$ exact, car $Spec(B\otimes_A B) \to Spec(B)$ rec fpqc scindé par $\Delta_{B/A}$

(et donc en déduire par fidèle platitude l'exactitude de $0 \to A \to B \to B\otimes_A B$ correspondant au rec $Spec(B) \to Spec(A)$ non scindé)

$\boxed{\text{Lem 2}}$ soit $\mathcal{U} \in ob(\mathcal{E})$ tq tout rec à 1 objet $\mathcal{V} \xrightarrow{\pi} \mathcal{U}$ a section

alors $\forall\ \mathcal{F} \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} \mathcal{G}$ surjection de faisceaux sur $\mathcal{E}$

on a $\mathcal{F}(\mathcal{U}) \twoheadrightarrow \mathcal{G}(\mathcal{U})$ surjectif

<u>Demo</u> si $g \in \mathcal{G}(\mathcal{U})$ par surjectivité au sens des faisceaux

on pose $F = s^* f \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$

et $\mathcal{C}_{\mathcal{U}}(F) = \mathcal{C}_{\mathcal{U}}\, s^* f \underset{\substack{\mathcal{C}_{\mathcal{U}} \text{ morphisme} \\ \text{de préfais,} \\ \text{commute aux} \\ \text{restrictions}}}{=} s^* \mathcal{C}_{\mathcal{V}} f$

$$= s^* \pi^* (g) \underset{\pi \circ s = id_{\mathcal{U}}}{=} \underline{g}$$

Plus précisément peut-être $\exists (\mathcal{U}_i \xrightarrow{f_i} \mathcal{U})_{i \in I}$ tq $\forall i \in I$

$$\exists f_i \in \mathcal{F}(\mathcal{U}_i) \quad tq \quad \mathcal{C}(f_i) = g|_{\mathcal{U}_i}$$

Mais F faisceau donc $\mathcal{F}(\mathcal{V} := \coprod_{i \in I} \mathcal{U}_i) = \prod_{i \in I} \mathcal{F}(\mathcal{U}_i)$

donc $\underset{\text{// appelé avant } f}{(f_i)_{i \in I}} \in \mathcal{F}(\mathcal{V})$ tq $\pi^* g = \mathcal{C}(f)$

avec 1 ouvert

Coro • $\forall \mathcal{U} \in ob(\mathcal{C})$ tq tout rec $\mathcal{V} \xrightarrow{\pi} \mathcal{U}$ a section
alors $\forall \mathcal{F}$ fais sur $\mathcal{C}$ on a $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0 \; \forall i > 0$

(ex) • $\forall X$ schéma co-loc, $\forall \mathcal{F}$ fais sur X_{zar}
on a $H^i(X_{zar}, \mathcal{F}) = 0$

Rem • la seconde assertion peut évoquer le Th. de Serre
sur les qcoh mais elle est beaucoup + forte
car valable $\forall$ faisceau

• aucun exemple en géo diff / cplx de telles situation
si X = boule ouverte de $\mathbb{R}^2$ (contenant S^1)

$$H^1(X, \mathbb{Z}_{S^1}) = H^1(S^1, \mathbb{Z}_{S^1}) = \mathbb{Z}$$

Démo du coro $H^0(\mathcal{U}, -) : \text{Fais}/\mathcal{C} \to Ab$ exact

Déf! le site $\mathcal{E}$ a assez de co-contractile si $\forall \mathcal{U} \in ob\, \mathcal{E}$
$\exists (\mathcal{U}_i \to \mathcal{U})_{i \in I}$ rec tq $\mathcal{U}_i$ co-contractile $\forall i$
(de manière équivalente $\exists\, \mathcal{O} \to \mathcal{U}$ recouvrement à 1 ouvert tq $\mathcal{O}$ co-contractile pas tout à fait clair si!)
et on dira alors que $\mathcal{U}$ est co-contractile

<u>Rem</u> : • Même si X co-local, ne s'appliques pas à X_{Zar} car $\mathcal{U} \subset X$ ouvert reste pas co-loc | i.e ~~...~~ X est co-contractile, mais cela ne suffit pas

• On peut penser utiliser X_{proet} ou X_{proZar} mais | pour que X_{Zar} ait assez de co-contractiles
pour l'instant → on n'a pas défini ce site
→ fausse que co-loc ⇒ tout rec $Y \to X$ proet (ou proZar) scindé

$\boxed{\text{Lem } 3}$ Soit $\mathcal{E}$ site et $\mathcal{U} \in ob(\mathcal{E})$ et soit
$(f_i : \mathcal{U}_i \to \mathcal{U})_{i \in I}$ rec tq $\mathcal{O} = \amalg\, \mathcal{U}_i \xrightarrow{\pi} \mathcal{U}$
a une section s.
Alors $\forall \mathcal{F}$ préfaisceau sur $\mathcal{E}$ vérifiant $\mathcal{F}(\amalg\, \mathcal{U}_i) \overset{(*)}{=} \pi \mathcal{F}(\mathcal{U}_i)$
la suite $0 \to \mathcal{F}(\mathcal{U}) \xrightarrow{\pi^*} \mathcal{F}(\mathcal{O}) \to \cancel{\prod \mathcal{F}(\mathcal{U}_i)}$ $\mathcal{F}(\mathcal{O} \times_{\mathcal{U}} \mathcal{O})$, avec $\mathcal{F}(\mathcal{O}) = \prod \mathcal{F}(\mathcal{U}_i)$
est exact

<u>Démo</u> comme lem 2, on a en effet besoin de l'hyp
$\mathcal{F}(\amalg\, \mathcal{U}_i) = \pi\, \mathcal{F}(\mathcal{U}_i)$ sinon on peut considérer
le préfaisceau | $\mathcal{F}(\mathcal{U}_i) = \text{random}_i$ $\forall i$
$\mathcal{F}(\amalg\, \mathcal{U}_i) = \text{random}$
restrictions $\overset{\mathcal{U}}{\underset{\mathcal{U}}{}} = 0$ ou Id si $\mathcal{V} \neq \mathcal{U}$

Rem on ne dit pas que tout préfais vérifiant $\mathcal{F}(\amalg\, \mathcal{U}_i) = \pi \mathcal{F}(\mathcal{U}_i)$ est un fais car il faudrait que le lem 3 soit valable $\forall\, \mathcal{U} \in ob\,\mathcal{E}$ sans hyp, cf lem 4

$\boxed{\text{Lem } 4}$ Soit $\mathcal{E}$ site avec assez de co-contractiles et $\mathcal{F}$ fais sur $\mathcal{E}$, alors $\mathcal{F}$ est déterminé par les
$\mathcal{F}(\mathcal{U})$ $\forall\, \mathcal{U}$ co-contractile de $\mathcal{E}$

Demo $\forall \mathcal{U} \in ob(\mathcal{C})$ soit $\pi : \mathcal{V} \xrightarrow{\pi} \mathcal{U}$ rec. contractile par $\mathcal{V}$ qui est ω-

On a alors
$$\mathcal{U} \xleftarrow{\pi} \mathcal{V} \underset{pr_2}{\overset{pr_1}{\leftleftarrows}} \mathcal{V} \times_{\mathcal{U}} \mathcal{V} \xleftarrow{\varphi} \omega$$

ne reste pas ω-contractile a priori

mais admet un recouv ω-contractile par ω

donc
$$\mathcal{U} \xleftarrow{\pi} \mathcal{V} \underset{p = pr_1 \circ \varphi}{\overset{q = pr_2 \circ \varphi}{\leftleftarrows}} \omega$$

ω-contractiles

et $\mathcal{F}(\mathcal{U}) = \text{Egalisateur}(p^*, q^* : \mathcal{F}(\mathcal{V}) \to \mathcal{F}(\omega))$

Coro : si $\mathcal{C}$ site avec assez de ω-contractiles, alors tout préfaisceau $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{C}$ vérifiant $\mathcal{F}(\amalg \mathcal{U}_i) = \prod \mathcal{F}(\mathcal{U}_i)$ (*) il admet $\mathcal{F}^+$ un faisceautisé, vérifiant la prop univ

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}^+ \arrow[dl, "\exists !"] \\ \forall \mathcal{G} \text{ fais} & \end{tikzcd}$$

On peut forcer cette propriété par une petite colim sur l'ens des décompositions connexes de $\mathcal{U}$

Demo on pose $\mathcal{F}^+(\mathcal{U}) = \text{Ker}(\mathcal{F}(\mathcal{V}) \underset{q^*}{\overset{p^*}{\rightrightarrows}} \mathcal{F}(\omega))$

$\forall \mathcal{V}, \omega$ ω-contractiles comme dans lem 4

on a bien utilisé l'hyp (*) sur $\mathcal{F}$ car $\mathcal{C}$ a assez de ω-contr

$\Rightarrow \exists (\mathcal{U}_i \xrightarrow{f_i} \mathcal{U})$ rec avec $\mathcal{U}_i$ ω-contr

$\boxed{\text{EX}}$ / • de site avec assez de ω-contractile : $\forall X$ schéma,

• le site $X_{proétale}$, cf stack part 3 lem 62.6.7, 6.8

• le site $X_{proét}$ à côté

Coro $\Rightarrow \exists$ faisceautisation pour $X_{proét}$, $\exists H^i(X_{proét}, -)$

et $\forall \mathcal{F}$ fais/X_{proet}, $\forall U \in$ ~~X~~proet w-contractile
$\forall i>0$ on a $H^i(U,\mathcal{F}) = 0$

Scinder les rec étales

Déf $X = \mathrm{Spec}(A)$ on dit que X est w-strictement local si (1) X est w-local (2) $\forall Y \to X$ étale + surj

(et Y qc ? non on recouvre Y par des affines puis on utilise que $\forall A \to B$ ét, il a une rétract)

$\exists$ section $s : X \to Y$

De manière éq (1) $X^c \subset X$ fermé
(2) $\forall Y \xrightarrow{\pi} X$ étale + surj, $\exists$ s section

car w-loc $\Leftrightarrow$ $X^c \subset X$ fermé et les rec Zar scindent
mais ce sont des rec. étales

EX: $X = \coprod_{finie} \mathrm{Spec}$ (corps séparablement clos)

$X = \mathrm{Spec}$ (anneau strictement local)
$\Leftrightarrow$ anneau strictement hensélien

C'est une histoire classique, cf exposé

EX A local m-adiquement complet tq A/m sép clos
$\xRightarrow[\text{Hensel}]{\text{Lem}}$ A strictement local

Prop (cf exposé) $\forall A$ anneau $\exists A \to B$ fidèl plat, proet
B w-strictement local

Rem • pas canonique contrairement au w-localisé
en fait si $A = \mathrm{Spec}(k)$, $B = \mathrm{Spec}(k^{sep})$ c'est un choix

Scinder les rec proétales

Q: peut-on bien supposer qu'il est affine ?

Def $X = \mathrm{Spec}(A)$ est ω-contractile si $\forall Y = \mathrm{Spec}\,B \xrightarrow[\text{proét surj}]{\pi} X = \mathrm{Spec}\,A$

$\exists\, s$ section de π

Donc $\underbrace{\omega\text{-contractile}}_{\text{tous les rec proét scindent}} \Rightarrow \underbrace{\omega\text{-strict loc}}_{\text{les rec étales scindent}} \Rightarrow \underbrace{\omega\text{-loc}}_{\text{les rec Zar scindent}}$

$\boxed{\text{Th Fonda}}$ $\forall X$ affine $\exists\ Y = \mathrm{Spec}(B) \xrightarrow[\text{proét surj}]{\pi} X$

tq Y ω-contractile

Rem . Y non cano. (c'est déjà le cas pour le cas ω-strict. local)

. $\mathrm{card}(Y) \gg \mathrm{card}(X)$, cf après
$\mathrm{card}(B) \gg \mathrm{card}(A)$

Donne bien un site : le produit fibré d'affines reste affine

Coro de la discussion sur les sites

. $\forall X$ affine, $X_{\text{proét aff}} = \{$ site des $Y \xrightarrow[\text{proét}]{\text{aff}} X \}$

a assez de ω-contractiles

. $\forall \mathcal{F} / X_{\text{proét aff}}$ préfaisceau $\exists\, \mathcal{F}^+$ faisceautisé qui coïncide avec $\mathcal{F}$ sur les ω-contractiles

Il faut commencer par imposer $\mathcal{F}^+(\amalg U_i) = \prod \mathcal{F}^+(U_i)$ puis faisceautiser en imposant la valeur de $\mathcal{F}^+$ sur ω-contractiles

. $\mathrm{Fais}(X_{\text{proét aff}})$ est abélienne

. $\forall\, Y \in X_{\text{proét aff}}$ ω-contractile, $\forall\, \mathcal{F} \in \mathrm{Fais}(X_{\text{proét aff}})$

$\forall i > 0 \quad H^i(Y, \mathcal{F}) = 0$

. Plus généralement $H^i(X_{\text{proét-aff}}, \mathcal{F})$ se calcule à la Čech avec le (hyperrec) ω-contractile

X affine … donc qc … si $(X_i \to X)$ … ops … fini … $\amalg X_i$ reste … donc … ite … le par … roduits … is mais … c'est … même … le cas) pb de X_{pqc} !

on a donc $(X \twoheadleftarrow) \underbrace{Y_0}_{\omega\text{-contra}} \overset{p}{\underset{q}{\leftleftarrows}} \underbrace{Y_1}_{\omega\text{-contra}} \overset{a}{\underset{c}{\leftleftarrows}} \underbrace{Y_2}_{\omega\text{-contra}} \cdots$

et $H^i(X_{\text{proet, aff}}, \mathcal{F}) = H^i$ du complexe de Čech

$$\left(H^0(Y_0,\mathcal{F}) \xrightarrow{p^*-q^*} H^0(Y_1,\mathcal{F}) \xrightarrow{\pm a^* \pm b^* \pm c^*} H^0(Y_2,\mathcal{F}) \to \right)$$

- donc $\exists\, H^i(X_{\text{proet, aff}}, \mathcal{F}_{\mathbb{Z}_\ell})$ et $H^i(X_{\text{proet, aff}}, \mathcal{F}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{disc}}})$

qui sont des $\mathbb{Z}_\ell$-modules a priori différents

Ex de ω-contractiles

(1) $X = \operatorname{Spec}(k)$ k sép clos, on a déjà vu l'éq de cat $X_{\text{proet, aff}} \overset{\Phi}{\simeq}$ ProFinite Set

autre ex : $X = \operatorname{Spec}$(anneau local strict hensélien) ou $\coprod$ fini ceux-ci

$S \times \operatorname{Spec}(k) \longleftarrow S$

donc X ω-contractile via $|X| \longrightarrow S$

(2) Toujours k sép clos, S ens profini

dégager la condition pour que $S'_k \to S_k$ soit étale à faire

on a vu que $S \times \operatorname{spec}(k)$ est ω-local

et de même on peut vérifier qu'il est ω-strict local.

À quelle condition est-il ω-contractible ?

Vu Φ l'éq de cat (et $S' \times \operatorname{Spec} k \to S \times \operatorname{Spec} k$ proet surj $\iff S' \to S$ cont + surj entre ens profinis)

il est équivalent de demander $\forall S' \overset{\pi}{\to} S$ cont + surj

$\exists$ section $s : S \to S'$ cont

Lem (~~Stack 62~~ Bhatt–Scholze lem 2.1.13) $\forall\, S' \to S$ cont entre ensemble profinis, $S' = \lim_{i \in I} S'_i$ où
$$\begin{tikzcd} S'_i \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & S \arrow[d] \\ (\text{profini}) \arrow[r] & (\text{fini}) \end{tikzcd}$$
compatible en i

En particulier $S' \times \mathrm{Spec}(k) \to S \times \mathrm{Spec}(k)$ est pro-ét (même pro-Zar)

Dem $S = \lim S_i$, $S'_i := S' \times_{S_i} S$, alors
$$\begin{tikzcd} S'_i \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & S \arrow[d] \\ S \arrow[r] & S_i \end{tikzcd}$$
, $S' = \lim (S'_i)$ cqfd

) quel choix de i ? quelconque ?

Question à quelle condition sur S profini tout $S' \to S$ continue surjective admet section continue ?

Def S extrêmalement discontinu ssi c'est vrai

Coro $S \times \mathrm{Spec}(k)$ w-contractile $\Leftrightarrow$ S extrê. discont
sep clos

EX S fini, c'est les seuls exemples simples !

Dur à voir $\mathbb{Z}_p$ pas extr. discont

Prop de Gleason (à comprendre !) S extr. discont $\Rightarrow$ toute suite convergente stationne

Coro $\mathbb{Z}_p$ pas extr discont

Th à prouver $\forall S$ profini $\exists\, S' \to S$ surj + cont, S' profini extrêmalement discontinu

cas particulier du th fonda si $X = S \times \mathrm{Spec}\, k$

parler de filet, cela revient dans les condensés

... pas retrouvée par suites. C'est logique car S non métrique (mais $\mathbb{Z}_p$ métrique) qui sont les $\underset{\text{extr disc}}{S} \times \mathrm{Spec}(k)$ (1)

-ant la démo du th 3, faut parler de compactification Stone - Čech (cf exposé aussi)

Th 4 (Stone-Čech) L'inclusion $\mathrm{TopCpct} \hookrightarrow \mathrm{Top}$
(espaces topo cpct)

admet un adjoint à gauche $\beta : \mathrm{Top} \to \mathrm{TopCpct}$ (βX = compactif. de Stone-Čech de X)

donc $\forall X \in \mathrm{Top}$, $\forall K$ cpct, $\forall$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\text{cont}"] \arrow[d] & K \\ \beta X \arrow[ur, dashed, "\exists !"'] & \end{tikzcd}$$

~~Bref βX est le plus petit~~ βX est "le plus gros" (au sens catégorique) compact contenant X

• $X \to \beta X$ toujours d'image dense, gratuit par la prop univ en considérant $K = \overline{X}^{\beta X}$

et de plus • X séparé T_2 $\Rightarrow$ $X \to \beta X$ injective, homéo sur son image

C'est une condition nécessaire car βX cpct $\Rightarrow T_2$

qui est cpct

aussi nécessaire (• X loc cpct séparé T_2 $\Rightarrow$ $X \subset \beta X$ ouvert

-tative naïve de démo via le th. du foncteur adjoint de Freyd

---

naïf du foncteur adjoint soit $\mathcal{E}$ cat. complète (ayant toutes les limites)

et $F : \mathcal{E} \to \mathcal{D}$ foncteur préservant les limites
ie $F(\lim_{i \in I} X_i) = \lim_{i \in I} F(X_i)$ doit donc exister dans $\mathcal{D}$

alors $F : \mathcal{E} \to \mathcal{D}$ admet $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ adjoint à gauche

n • si F a un adjoint G à gauche, il préserve les limites
(donner l'argument)

• variante du th avec cat cocomplète, F qui commute aux colim et qui admet un adjoint à droite, ...

et on vérifie formellement que c'est l'adjoint de F : (2)

$\forall X \in ob\, \mathcal{C},\ \forall Y \in ob\, D$

$$Hom_{\mathcal{C}}(GY, X) = Hom_{\mathcal{C}}\Big(\lim_{\substack{Z \in ob(\mathcal{C}) \\ \cancel{FZ \xrightarrow{f} Y}\ Y \xrightarrow{f} FZ \\ \text{flèche dans } D}} Z, X\Big)$$

$$\underset{\substack{\text{propriété} \\ \text{universelle} \\ \text{de la limite}}}{=} \lim_{\substack{Z \in ob(\mathcal{C}) \\ \cancel{FZ \xrightarrow{f} Y}\ Y \xrightarrow{f} FZ \\ \text{flèche de } D}} Hom_{\mathcal{C}}(Z, X)$$

plus à la main :
βX = fermeture de
$$\Big(X \to \prod_{\substack{K \in CpctTop \\ f : X \to K \text{ cont}}} K\Big)$$
$x \mapsto ((K,f) \mapsto f(x))$
pas ensemble (le produit n'existe donc pas dans Top !)

(à finir)

lication naïve au th 4 de Stone-Čech :

- l'inclusion TopCpct $\hookrightarrow$ Top respecte les produits par Tychonov donc les limites (qui dans Top sont des fermés dans les produits)
- donc on a gratuitement β : Top $\to$ TopCpct adjoint à gauche

ur depuis le th. naïf de Freyd

- on a pris des limites indexées par des grosses cat
- on retrouve donc le paradoxe de Russell !!!

Th du foncteur adjoint

$\mathcal{C}$ admettant toutes les petites limites, $F : \mathcal{C} \to D$ qui commute aux limites (petites)

et on suppose de plus : $\forall Y \in ob(D)$

$\exists I$ ensemble et $(X_i \in ob\, \mathcal{C})_{i \in I}$

et $(f_i : Y \to F(X_i))_{i \in I}$ flèches de D

$\forall Y,\ \exists Y \to F(X_i)$

$\forall \searrow\ \exists \swarrow \exists F(g_i)$

$F(X)$

ntification

alors $\exists\ G : D \to C$ adjoint à gauche, (3)

donné par la formule $\underset{\substack{\cap \\ \text{ob } D}}{G(Y)} = \lim_{i \in I} X_i$

(on choisit donc $(X_i)_{i \in I}$, f_i et on vérifie G indép des choix)

i démo du th ~~1~~ de Stone-Cech : en exposé

mule) $\forall k$ corps, $\forall X$ espace topo discret

$$\underbrace{\beta X}_{\text{profini en fait}} = \underset{\substack{\cap \\ \text{espace topo d'un schéma affine}}}{\left| \mathrm{Spec}\ k^X \right|} = \left| \mathrm{Spec}\ \mathrm{Cont}(X, k_{disc}) \right|$$

$$= \left| \mathrm{Spec}\ \mathrm{Map}(X, k_{disc}) \right|$$

$$= \left| \mathrm{SpecMax}\ \mathrm{Map}(X, k_{disc}) \right|$$

- ainsi $|\mathrm{Spec}\ k^{\mathbb{N}}| = \beta \mathbb{N}$ ens profini horrible
- on prend k fini $\Rightarrow$ $\mathrm{card}\ \mathrm{Map}(X, k) = 2^{\mathrm{card}(X)}$

$\Rightarrow \mathrm{card}\ \beta(X) \leq \mathrm{card}\ \underset{\text{parties}}{\mathcal{P}}(\mathrm{Map}(X,k))$

$$\| \quad 2^{2^{\mathrm{card}(X)}}$$

heureusement qu'on autorise des ens profinis

$S = \lim_{i \in I} S_i$ limite filtrante ordonnée par I ens quelconque, pas juste $I = \mathbb{N}$!!

- ainsi $\mathrm{Card}(\beta \mathbb{N}) = \aleph_2$,

ensemble profini sauvage

on a juste par propriété universelle $\beta\mathbb{N} \to \hat{\mathbb{N}}$ cont (!)

Stack 5.25.2 part 1

(d'ailleurs la compact. d'Alexandrov n'est pas fonctorielle : elle est juste fonctorielle pour les morphismes propres)

- β est un adjoint à gauche $\Rightarrow$ il commute aux colim dans Top

mais il ne commute pas aux limites,
pas aux produits
et même pas aux produits finis

bref $\beta(X \times Y) \neq (\beta X) \times (\beta Y)$

par conséquent X grp topo $\Rightarrow$ βX grp topo compact

Cf les compactifications de Bohr des grp topo!!!

etour aux profinis extrêmalement discontinus

Prop ① $\forall S$ ens discret, $\beta(S)$ est profini extr. discont

② $\forall S$ profini $\underbrace{\beta(S_{disc})}_{\text{extr discont}} \longrightarrow S$ est cont, surj

(B Stack part 1, 5.26 pour vérifier que $\beta(S_{disc})$ est profini etc)

Démo facile sans rien savoir de $\beta(S)$ à part l'adjonction

① $\forall S'$ profini
$\forall$ S discret

$\forall$
$$\begin{tikzcd} S' \arrow[r, shift left, "\pi"] & \beta(S) \arrow[l, shift left, "g"] \\ & S \arrow[ul, "f"] \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$
cont + surj

on a $\mathrm{Cont}(S, S') \xleftarrow{\sim} \mathrm{Cont}(\beta S, S')$

$f = g \circ i \longleftarrow\!\!| \; g$

donc on choisit f ensemblistement section de $\pi|_S$

(2) 5

$$\begin{array}{ccc} \beta(S_{disc}) & \searrow^{\exists!\ \text{cont, toujours surjective}} & \\ \uparrow & & S \\ S_{disc} & \xrightarrow[\text{continue bijective}]{id_S} & \end{array}$$

Thm (Bhatt-Scholze Lem 2.4.8 ; Stack part 3 Ch 62 Lem 11,2)
Si X affine sont équivalents
(1) X w-contractile (ie tout rec proét scinde)
(2) X w-strictement local (ie tout rec étale scinde)
$\pi_0(X)$ extr discont (ie tout $\underline{T} \to \pi_0(X)$ profini contain surjectif scinde)

On va juste démontrer $\Rightarrow$ (mais on utilisera $\Leftarrow$)
Avant cela quelques lemmes

Lem 1 (Stack Lem 2.5) X schéma affine, Y affine, T profini

et soit
$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{e} & T \\ g\downarrow & \square & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{\pi} & \pi_0(X) \end{array}$$
cartésien dans la cat des espaces topologique Top (ie π_0 foncteur cartésien ?)

(ie Y est obtenu à partir de X en rajoutant des comp connexes)

alors $\pi_0(Y) = T$.

Si X | w-local / w-loc strict on a | Y w-loc / Y w-loc stric , et $Y^c = g^{-1}(X^c)$

~~$Y \subset X \times T$ est le lieu où $f = \pi$ donc fermé etc etc~~

Lem 2 (Stack Lem 6.1) X affine, $T \subset \pi_0(X)$ fermé (=> profini)

... $S \times \mathrm{Spec}(k)$

soit $Z = \pi^{-1}(T) \subset X$ fermé donc schéma affine **7**
avec structure réduite

on a $Z = \bigcap_\alpha Z_\alpha$ où $Z \subset Z_\alpha \subset X$ ouvert fermé (vrai pour tous les X qc)
$= \lim_\alpha Z_\alpha$

comme $Z_\alpha \hookrightarrow X$, $Z_\alpha = \mathrm{Spec}(B_\alpha)$ où $A \twoheadrightarrow B_\alpha$
—— Z_α ouvert, $A \twoheadrightarrow B_\alpha$ iso local donc proét

puis $Z = \mathrm{Spec}(\mathrm{colim}_\alpha B_\alpha) \xrightarrow{\text{proét}} X$

3 $\forall X$ affine, $\forall T$ profini, $\forall T \to \pi_0(X)$ cont,
$\exists Y$ affine et $Y \to X$ proét (pro-Zar en fait)
tq le diagramme soit cartésien dans Top :

$$\begin{array}{ccc} Y & \to & T \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\pi} & \pi_0(X) \end{array}$$

(rq on peut librement rajouter un ens profini de composantes connexes)
Par le lem 1, X w-loc $\Rightarrow$ Y w-loc
w-strict-loc $\Rightarrow$ X w-strict-loc

(cas facile $T = S \times \pi_0(X)$)
(et on se ramène à un fermé dans ce cas...)

0 $T = \lim \underset{\text{finis}}{T_i}$, $\forall i$ $Z_i = \mathrm{Im}(T \xrightarrow[\text{diagonale}]{\text{flèche}} \pi_0(X) \times T_i)$

$\subset$ fermé $\underbrace{\pi_0(X) \times T_i}_{\text{profini}}$

or $\pi_0(X) \times T_i = \pi_0(\underbrace{X \times T_i}_{\text{affine}}) = \mathrm{Spec}(A^{T_i})$ car T_i fini

bref par lem 2, $\exists \overset{\text{affine}}{Y_i} \to Z_i$

... à la prop ($\Rightarrow$) X ω-contractile $\Rightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} X \text{ - strictement local} \\ \pi_0(X) \text{ extrêmalement discont} \end{array} \right.$ 8

• $X^c \subset X$ fermé ? (il est clair que tout rec étale scinde)

on a $\underbrace{X_\omega}_{\substack{\text{construit précédemment,} \\ \omega\text{-local}}} \xrightarrow[\text{proét surj}]{\pi} X$ qui scinde donc en

$s : X \to X_\omega$

d'image fermée car $\pi \circ s = id_X$

donc $\cancel{\pi}^{-1}(X - s(X))$ ouvert (?)

or π quotient

donc X fermé dans ω-loc donc ω-loc donc $X^c \subset X$ fermé

• $\forall \underbrace{T}_{\text{profini}} \to \pi_0(X)$ continue surj, par lem 3

$$\exists \begin{tikzcd} Y \arrow[r] \arrow[d, "\text{proét surj}"'] & T = \pi_0(Y) \arrow[d] \\ X \arrow[r, "\pi"] & \pi_0(X) \end{tikzcd}$$ cartésien dans Top

donc $\exists\, s : X \to Y$ section, $\pi_0(s) : \pi_0(X) \to T$ est la section cherchée

Prop

$\forall X$ affine $\exists Y$ non canonique affine

et $\underbrace{Y}_{\omega\text{-contractile}} \xrightarrow[\text{surj}]{\text{proét}} X$.

$X = \operatorname{Spec} A$, $Y = \operatorname{Spec} B$

$\Rightarrow$ $\# B = 2^{2^{2^{\operatorname{card}(A)}}}$

car $\# X_{cons} = 2^{\operatorname{card}(A)}$

Dém | • cps X ω-strictement local car on a déjà

construit $\underbrace{X'}_{\omega\text{-strict loc}} \xrightarrow[\text{surj}]{\text{pro ét}} X$

$Y \longrightarrow \beta\, \pi_0(X)_{disc}$) profini extr. discont

$\cap$ $\quad$ |

emples de recouvr. ω-contractiles

) $X = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) \leftarrow X_\omega = \int_{X_{cons} = \hat{\mathbb{N}}} \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_{(p)})$

$\hat{\mathbb{N}} \simeq \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ compactifié d'Alexandrov, profini

$\uparrow$

$X_{strictloc} = \int_{\hat{\mathbb{N}} \ni i} \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_{(p)}^{s.h})$

non cano

où $\mathbb{Z}_{(p)}^{sh}$ = clotûre intégrale de $\mathbb{Z}_{(p)}$ ds $\mathbb{Z}_p^{nr}$, $\mathbb{Q}^{s.h} = \bar{\mathbb{Q}}$

puis

$$\begin{array}{ccc} X_{strictloc} & \leftarrow & X_{\omega\text{-contract}} \\ \downarrow \pi & \square & \downarrow \\ \pi_0(X_{strictloc}) = \pi_0(X_\omega) = \hat{\mathbb{N}} & \leftarrow & \beta\, \hat{\mathbb{N}}_{disc} \end{array}$$

$\beta\, \hat{\mathbb{N}}_{disc} = \beta \mathbb{N} = |\mathrm{Spec}\, k^{\mathbb{N}}|$ $\forall k$ corps

$\hat{\mathbb{N}}_{disc} = (\mathbb{N} \cup \infty)_{disc} = \mathbb{N}$

à quelle condition l'espace topo d'un produit fibré est le produit fibré des espaces topo?

~~une flèche doit être un homéomorphisme~~

Question : est-ce que si $X_{strictloc} = \mathrm{Spec}(C)$ on a $X_\omega \overset{?}{=} \mathrm{Spec}\, \mathrm{Map}(k_{disc}, C)$

) $\forall k$ corps algclos, $X = \mathbb{A}^1_k$

$$X_{strictloc} = \int_{\hat{k}_{disc} \ni x} \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}^{s.h}) \leftarrow X_{\omega\text{-}\cancel{strictloc}\ \text{contra}}$$

$\downarrow \qquad \square \qquad \downarrow \quad |\mathrm{Spec}\, k^{k}|$

à l'existence de Y fournie par lem 3, 19

et par lem 1 $\begin{cases} \pi_0(Y) = \beta\, \pi_0(X)_{disc} \text{ extrem. disc} \\ Y \text{ } \omega\text{-strictement local} \end{cases}$

donc par prop Y est ω-contractile !

, $\forall X$ affine, $X_{\substack{proét \\ aff}}$ ~~a~~ assez de ω-contractile

et toutes les conséquences cohomologiques s'enclenchent,

$\begin{cases} \exists \text{ faisceautisation} \\ \exists \text{ coho} \end{cases}$

. Y très gros, si $X = \operatorname{Spec} A$, $\kappa = \operatorname{card} A$
$Y = \operatorname{Spec} B$, $\operatorname{card}(B) = 2^{2^{\kappa}}$

as non affine en un mot | $\forall X$ schéma

e n'est pas une question cruciale...
le manière analogue on peut définir la coho Zariski
n étudiant que les ouverts affines (surtout si X qcqs)

$Y \to X$ faible étale si $Y \to X$ plat et $\Delta : Y \to Y \times_X Y$ plat

$Y \to X$ faible étale si

nc Y, X affine et $Y \to X$ proétale $\Rightarrow$ $Y \to X$ faiblement étale)

$X_{proét}$ est le site des $Y \to X$ faiblement étale

donc c'est juste un nom

$\forall Y \to X$ faiblement étale

Coro $\forall X$ schéma, $X_{proét}$ est un site 110

engendré [sens à définir mais intuition claire] par au choix
- les affines proét sur un affine de X
- les affines w-contractiles proétales sur un affine de X

donc $\left\{ \begin{array}{l} \exists \text{ faisceautisation} \\ \exists\ H^i(X_{proét}, \mathcal{F}) \text{ coho} \end{array} \right.$

Point de vue condensé

(Scholze-Clausen, Lecture on Condensed Math

mais en fait seules les premières pages! ensuite ça parle de solide & coho cohérente)

Soit k corps sép. clos

- $\mathrm{AffEt}/k \xleftrightarrow[\text{équiv de cat}]{\sim} \mathrm{FiniteSet}$

$S \times \mathrm{Spec}\, k \longleftarrow\!\shortmid S$

- donc (comme $\mathrm{Spec}(k)_{et}$ est engendré par les affines)

eq de cat ~~Fais(Spec(k)et) $\simeq$ Foncteurs contra de FiniteSet → Set~~

$\mathrm{Fais}(\mathrm{Spec}(k)_{et}) \simeq \left\{ \begin{array}{l} \text{foncteurs contravariants} \\ F : \mathrm{Finite\ Set} \to \mathrm{Set} \\ \text{tq } \forall \text{ surj } S' \to S \text{, on a} \end{array} \right.$

Mais d'après notre discussion sur les rec scindé, 11

comme tout $S' \to S$ surjective ensembliste est scindée

un tel F est déterminé par $F(\underset{\text{le singleton}}{*})$

car $F(S) = F(*)^S$

20 $\mathrm{Fais}(\mathrm{Spec}(k)_{et}) = \mathrm{Set}$

$\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(\mathrm{Spec}\, k)$

on retrouve l'idée qu'on ne peut pas mettre de topo non triviale ds le site étale

rappel $\forall k$ sép clos, équiv de ~~cat~~ site

$$\mathrm{Spec}(k)_{\substack{\text{proet}\\ \text{aff}}} \xleftarrow[\phi]{\sim} \mathrm{ProFiniteSet}$$

$$S \times \mathrm{Spec}(k) \longleftarrow S$$

site catégorie avec
- flèches les $S' \to S$ cont
- recouvrement les $\coprod_i S'_i \to S$ cont + surj

20 : Eq de cat

$$\mathrm{Fais}(\mathrm{Spec}(k)_{\substack{\text{proet}\\ \text{(aff) si on veut}}}) \simeq \left\{ \begin{array}{l} \text{foncteur } F \text{ contra } \mathrm{ProFiniteSet} \to \mathrm{Set} \\ \text{tq } \forall S' \to S \text{ cont surj,} \\ 0 \to F(S) \to F(S') \rightrightarrows F(S' \times_S S') \end{array} \right.$$

$$\mathcal{F} \mapsto F(S) = \mathcal{F}(S \times \mathrm{Spec}\, k)$$

et $F(\coprod_{\substack{i\\ \text{finie}}} S_i) = \prod_i F(S_i)$ reste profini

Mais F n'est plus déterminé

car $F(*) \in \mathrm{Set}$

par définition

$S \neq \ldots (*)^S$ ...

On note $\mathrm{Cond}(\mathrm{Set})$ cette catégorie $\left(\begin{array}{l}\text{on oublie} \\ \text{donc } \kappa\end{array}\right)$ 12

Par l'existence de profinis ~~xxxx~~ extrêmalement discont, on a
et la discussion précédente sur l'axiome de fais sur rec. scindés.

éq de cat $\mathrm{Cond}(\mathrm{Set}) \simeq \left(F \text{ contra } \begin{pmatrix}\text{profini} \\ \text{extr.} \\ \text{discont}\end{pmatrix} \to \mathrm{Set} \right)$

$$\text{tq} \quad F\Big(\coprod_{\text{finie}} S_i\Big) = \prod F(S_i)$$

20 • on peut faisceautiser un foncteur contra $F : \mathrm{Profinite} \to \mathrm{Set}$

(1) en imposant $F\big(\coprod_{\text{finie}} U_i\big) = \prod F(U_i)$

(2) puis en posant $F^+(S) = F(S)$ $\forall S$ extr disc

(3) et en posant $\forall S$ profini

$$F^+(S) = \mathrm{Coeq}\left(p^*, q^* : F(S') \to F(S'')\right)$$

où $\underset{\text{extr disc}}{S'} \xrightarrow[\text{surj}]{\text{cont}} S$, $\underset{\text{extr disc}}{S''} \xrightarrow[\text{surj}]{\text{cont}} S' \times_S S'$

• $\mathrm{Cond}(\mathrm{Ab}) = \text{faisc}(\mathrm{Profinite} \to \mathrm{Ab})$ en grp ab

$=$ par déf, les groupes abéliens condensés

est une catégorie abélienne

de grp ab condensés ou ensembles condensés, à la Yoneda via $\mathrm{Profinite} \subset \mathrm{Top}$
Set

$\forall X$ espace topo $\underline{X} : \mathrm{Profinite} \to \mathrm{Set}$

$S \longmapsto \mathrm{Cont}(S, X)$

• $\forall X$ grp abélien topologique, $\underline{X} \in Cond(Ab)$

($\triangle$ $\underline{X}(S) = \underbrace{Cont(S, X)}_{\text{grp ab par structure au but}}$

on ne se restreint pas à S grp ab profini et aux morphismes de grp continu)

20 : on a des foncteurs

$$Set \xrightarrow[\text{discrète}]{\text{topo}} Top \to Cond(Set)$$

$$X \mapsto \underline{X}$$

$$Ab \xrightarrow[\text{discrète}]{\text{topo}} \underbrace{AbTop}_{\text{grp ab. topologiques}} \to Cond(Ab)$$

et cela répare déjà un défaut classique de AbTop qui n'est pas abélienne (si $f : A \to B$ continue entre grp ab topo on topologise $\cancel{Coker}$ CoIm $f = A/_{\ker f}$ par topo quot; $Im f \subset B$ par topo induite

et on a $\cancel{Coker} f$ CoIm $\to Im f$ cont, bij, pas toujours homeo

ex $f : \mathbb{R}_{disc} \to \mathbb{R}$

bij + cont, non homeo)

analogie : $VectFilt_k$

Rem : cas des structures Hodge)

$\underline{f} : \underline{\mathbb{R}_{disc}} \to \underline{\mathbb{R}}$ n'est plus une bijection de groupe ab condensé

• Remarque : pas si clair de trouver S profini et $S \to \mathbb{R}$ continue intéressante

Mais si $S = \beta([0,1]^{disc})$ ou $\beta(X^{disc})$ $\forall X$ cpct

En fait $Cond(Set) = \left\{ F : EspacesTopCpct \longrightarrow Set \right.$ tq $F(\coprod_{fini} K_i) = \prod F(K_i)$ et $\forall K' \to K$ cont surj

$\left. 0 \to F(K) \to F(K') \rightrightarrows F(K' \times_K K') \right\}$

car F déterminé par sa valeur sur S extr discont et $\forall K$ cpct $\underbrace{\beta(K^{disc})}_{\substack{\text{profini} \\ \text{extr. discont}}} \xrightarrow[\text{surj}]{\text{cont}} K$

~~L'inclusion~~ Le foncteur $Top \to Cond(Set)$, $X \mapsto \underline{X}$ admet ~~...~~

un adjoint à gauche $Cond(Set) \longrightarrow Top$

$F \longmapsto X = F(*)$

muni topo quotient de $\coprod_{S \text{ profini}, x \in F(S)}$ ie $x : \underline{S} \to$ à détailler

⚠ paradoxe de Russell, faut borner

et $\underline{X}(*) \overset{homeo}{\simeq} X$ ~~ssi~~ X est compactement engendré

ie $f : X \to ?^{\in Top}$ cont ssi elle

Retour au site proétale des schémas

) $\forall f : Y \to X$ morph de schémas

$\exists f^* : Shv(X_{proét}) \to Shv(Y_{proét})$

Cf exposé, c'est général sur $X_{ét}$, X_{Zar}, X_{fpqc}

et si $Y = Spec(k^{sep\, clos}) \xrightarrow{f} X$ d'image $x \in X$

on dit $f^*(\mathcal{F})$ est la fibre de $\mathcal{F}$ en x

Donc $\mathcal{F}_x := f^*(\mathcal{F}) \in Shv(Spec(k)_{proét}) = Cond(Set)$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & F \\ & & \downarrow \\ Top & & F(*) \end{array}$$

Donc on a un espace topo fibre

toujours l'idée initiale, le site pro-ét permet de mettre de la topo au niveau des faisceaux

$\forall f : X \to Spec(k)$ k sep clos

marcherait pour $f : X \to Y$

$\exists f_* : Shv(X_{proét}) \to Shv(Spec(k)_{proét}) = Cond(Set)$

$\mathcal{F} \longmapsto (S \mapsto \mathcal{F}(X \times S \xrightarrow{proj} X))$

et $\underbrace{(f_* \mathcal{F})(*)}_{\text{sections globales de l'ens condensé}} = \underbrace{\mathcal{F}(X)}_{\text{sections globales}}$

, si $\mathcal{F}$ en grp ab, $\forall i \geq 0$ $\exists R^i f_*(\mathcal{F}) \in Cond\, Ab$

- $R^i f_*(\mathcal{F}) \in Cond(Ab)$ est le faisceautisé de $S \longmapsto H^i(X \times S, \mathcal{F})$