2. Algèbres de Banach

Une *algèbre* sur $\mathbb{K}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel A, muni d'une multiplication associative $(a, b) \in \mathrm{A} \times \mathrm{A} \to ab \in \mathrm{A}$, telle que les applications $x \in \mathrm{A} \to ax$ et $x \to xa$ soit des endomorphismes de l'espace vectoriel A, pour tout $a \in \mathrm{A}$.

Une *algèbre de Banach unitaire* est un espace de Banach A, muni d'une multiplication d'algèbre possédant une unité 1_A et vérifiant

$$\forall a, b \in \mathrm{A}, \quad \|ab\| \le \|a\| \, \|b\| \,; \quad \|1_\mathrm{A}\| = 1.$$

Exercice. Adjonction d'unité ; renormage.

Exemples.

1. L'algèbre des matrices $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

2. L'algèbre des endomorphismes $\mathcal{L}(\mathrm{X})$, si X est un espace de Banach $\neq \{0\}$.

3. Les espaces C(K), K compact non vide, ou l'espace $\mathrm{L}_\infty(0, 1)$, munis du produit ponctuel des fonctions, sont des exemples d'algèbres de Banach commutatives.

4. L'espace $\mathrm{L}_1(\mathbb{R})$, muni de la convolution comme produit, est un exemple d'algèbre sans unité ; pour ajouter une unité, on peut agrandir l'algèbre en considérant l'ensemble de toutes les mesures complexes $d\mu(x) = f(x)dx + \lambda d\delta_0(x)$, avec $f \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R})$, λ scalaire et δ_0 la mesure de Dirac en 0.

5. L'algèbre de Calkin est le quotient de $\mathcal{L}(\mathrm{H})$ par l'idéal des opérateurs compacts. Elle joue un rôle intéressant dans la théorie de Fredholm.

C^*-*algèbres*

Une C^*-algèbre est une algèbre de Banach unitaire complexe A, munie d'une application continue $a \in \mathrm{A} \to a^* \in \mathrm{A}$ *antilinéaire*, telle que $(ab)^* = b^*a^*$, $(a^*)^* = a$ (involution) et surtout

$$\forall a \in \mathrm{A}, \quad \|a^*a\| = \|a\|^2.$$

Il en résulte que $\|a^*\| = \|a\|$. L'exemple fondamental est l'espace $\mathcal{L}(\mathrm{H})$ des endomorphismes d'un espace de Hilbert complexe, en prenant pour T^* l'opérateur adjoint.

Inversement, on sait montrer que toute C^*-algèbre est isomorphe à une sous-algèbre fermée d'un $\mathcal{L}(\mathrm{H})$, pour un certain espace de Hilbert H, sous-algèbre invariante par $\mathrm{T} \to \mathrm{T}^*$ et contenant l'application identique de H.

Éléments hermitiens, normaux dans une C^*-algèbre : on dit que $a \in \mathrm{A}$ est *hermitien* si $a^* = a$. Si $b \in \mathrm{A}$, l'élément $a = b^*b$ est hermitien. On dit que a est *normal* si $a^*a = aa^*$. On dit que $u \in \mathrm{A}$ est *unitaire* si $u^*u = uu^* = 1_\mathrm{A}$. Ces définitions généralisent le cas de l'algèbre $\mathcal{L}(\mathrm{H})$.

Éléments inversibles

Soit A une algèbre de Banach unitaire ; on dit que $a \in \mathrm{A}$ est *inversible dans* A s'il existe un élément $u \in \mathrm{A}$ tel que $au = ua = 1_{\mathrm{A}}$. Dans ce cas on note $a^{-1} = u$.

On va montrer que les éléments proches de 1_{A} sont inversibles ; la démonstration présente l'inverse au moyen d'une série vectorielle. Dans une algèbre de Banach, la continuité du produit permet de voir que

$$\Bigl(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\Bigr) b = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n b).$$

On fait la convention $a^0 = 1_{\mathrm{A}}$; on remarque que $\|a^n\| \le \|a\|^n$ pour tout entier $n \ge 0$.

Proposition 2.1. *Soient* A *une algèbre de Banach unitaire et* $a \in \mathrm{A}$ *; la série*

$$1_{\mathrm{A}} + a + a^2 + \cdots + a^n + \cdots$$

converge dans A *si et seulement si* $\lim_n a^n = 0_{\mathrm{A}}$, *et dans ce cas sa somme est l'inverse de* $1_{\mathrm{A}} - a$. *En particulier*

$$\bigl(\|a\| < 1\bigr) \Rightarrow \bigl(1_{\mathrm{A}} - a \ \ \textit{inversible dans} \ \ \mathrm{A}\bigr).$$

Preuve. Si la série ci-dessus converge, son terme général a^n doit tendre vers 0_{A} ; inversement, on aura $\|a^{n_0}\| < 1$ pour un certain n_0, et on en déduira que $\sum \|a^n\| < +\infty$ de la façon suivante : on écrit $n = n_0 q + r$ et en posant $\tau = \|a^{n_0}\|^{1/n_0} < 1$, on a

$$\|a^n\| \le \|a^{n_0 q}\| \, \|a^r\| \le \tau^{n_0 q} \|a\|^r = \tau^{n_0 q + r} \tau^{-r} \|a\|^r \le \mathrm{M} \tau^n$$

avec $\mathrm{M} = \bigl(\|a\|/\tau\bigr)^{n_0}$ (noter que $\tau \le \|a\|$) donc $\limsup \|a^n\|^{1/n} \le \tau < 1$.

Si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n$ converge dans A, désignons par s sa somme ; alors as est égal à

$$a\bigl(1_{\mathrm{A}} + a + a^2 + \cdots + a^n + \cdots\bigr) = a + a^2 + \cdots + a^{n+1} + \cdots = s - 1_{\mathrm{A}},$$

donc $as = s - 1_{\mathrm{A}}$, c'est-à-dire $(1_{\mathrm{A}} - a)s = 1_{\mathrm{A}}$; de même $s(1_{\mathrm{A}} - a) = 1_{\mathrm{A}}$.

Exercice. Montrer que $\lim_n \|a^n\|^{1/n}$ existe.

Inverse de $u - a$

Si u est inversible et si a est assez petit pour que la série ci-dessous converge dans A, l'élément

$$x = u^{-1} + u^{-1} a \, u^{-1} + u^{-1} a \, u^{-1} a \, u^{-1} + \cdots$$

vérifie

$$ux = 1_{\mathrm{A}} + a \, u^{-1} + a \, u^{-1} a \, u^{-1} + \cdots$$

de sorte que $ux - ax = 1_{\mathrm{A}}$, et de même $xu - xa = 1_{\mathrm{A}}$. On en déduit que x est l'inverse de $u - a$. Pour que la série ci-dessus converge, il suffit que son terme général, qu'on peut écrire sous la forme $u^{-1}(au^{-1})^n$, soit majoré en norme par une série géométrique convergente ; c'est le cas dès que $\|au^{-1}\| < 1$, ce qui est garanti par la condition classique et simple

$$\|a\| < \|u^{-1}\|^{-1}.$$

Cas de $\mathcal{L}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$

Si T est un isomorphisme de X sur Y, si V désigne l'inverse de T et si S est un "petit" opérateur, on aura encore

$$(\mathrm{T}-\mathrm{S})^{-1} = \mathrm{V} + \mathrm{VSV} + \mathrm{VSVSV} + \cdots$$

ce qui prouve la stabilité des isomorphismes par perturbation.

Spectre d'un élément $a \in \mathrm{A}$

On suppose que A est une algèbre de Banach unitaire *complexe*. Si a est un élément de A, on désigne par $\rho(a)$ l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $a - \lambda 1_{\mathrm{A}}$ soit inversible dans A. Par la stabilité des inversibles, on voit que $\rho(a)$ est un ouvert. On dit que $\rho(a)$ est *l'ensemble résolvant* de a. La *résolvante de* a est l'application définie sur l'ouvert $\rho(a)$, à valeurs dans A,

$$\forall \lambda \in \rho(a), \quad \mathrm{R}_\lambda(a) = (\lambda 1_{\mathrm{A}} - a)^{-1} \in \mathrm{A}.$$

Si $|\lambda| > \lim \|a^n\|^{1/n}$, on aura $\lim_n (a/\lambda)^n = 0_{\mathrm{A}}$ et $1_{\mathrm{A}} - a/\lambda$ sera inversible par la proposition 2.1, donc $a - \lambda 1_{\mathrm{A}}$ aussi et par conséquent $\lambda \in \rho(a)$. On voit que l'ensemble $\rho(a)$ contient le complémentaire du disque fermé de rayon $\lim_n \|a^n\|^{1/n}$.

Le spectre $\mathrm{Sp}(a)$ est le complémentaire dans $\mathbb{C}$ de $\rho(a)$. Il est fermé et borné par $\lim_n \|a^n\|^{1/n}$. Désignons par $r(a)$ le sup des modules des éléments du spectre. On a donc

$$r(a) \le \lim_n \|a^n\|^{1/n}.$$

On verra plus loin que le spectre est non vide, et que l'inégalité précédente est une égalité.

Remarque. Changement d'algèbre. Le spectre diminue quand on augmente l'algèbre (il y a plus de candidats pour être inverse d'un élément). Mais on verra que le bord du spectre initial reste dans le spectre après augmentation.

Exemple : fonctions de A(D) plongées dans $\mathrm{C}(\mathbb{T})$. L'algèbre A(D) est formée des fonctions continues sur le cercle unité de $\mathbb{C}$ qui se prolongent en fonction continue dans le disque unité fermé et holomorphe dans le disque unité ouvert. L'élément $z \to z$ n'est pas inversible dans la petite algèbre A(D), mais le devient dans la grosse $\mathrm{C}(\mathbb{T})$.

Proposition. *L'ensemble des éléments inversibles de* A *forme un sous-groupe multiplicatif ouvert* G(A).

Preuve. Sous-groupe est bien connu, ouvert résulte de ce qui précède.

Fonctions holomorphes vectorielles

Lemme. *Si* f *est une fonction définie sur le disque* $\Omega = \mathrm{D}(0,\mathrm{R})$ *du plan complexe, à valeurs dans un espace de Banach* X, *et si pour tout* $z \in \Omega$ *il existe* $\delta_z > 0$ *et des vecteurs* $(b_n(z)) \subset \mathrm{X}$ *tels que*

$$(h \in \mathbb{C}, |h| \le \delta_z) \Rightarrow f(z+h) = \sum_{n=0}^{+\infty} h^n \, b_n(z),$$

alors le développement en $z = 0$

$$f(h) = \sum_{n=0}^{+\infty} h^n \, a_n$$

(où on a posé $a_n = b_n(0)$) vérifie pour tout $r < \mathrm{R}$

$$\sup_{n \geq 0} r^n \, \|a_n\| < +\infty.$$

Il en résulte que ce développement en 0 converge dans tout le disque Ω, et que sa somme représente la fonction f dans Ω.

Preuve. On remarque d'abord que la fonction f est continue sur Ω : si $z \in \Omega$, posons $\delta = \delta_z$, $b_n = b_n(z) \in \mathrm{A}$; la série $\sum h^n b_n$ converge pour $h = \delta$, donc la suite $(\delta^n \|b_n\|)$ est bornée, disons par M. Alors

$$\|f(z+h) - f(z)\| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |h|^n \, \|b_n\| \leq \mathrm{M} \, \frac{|h|}{\delta - |h|}$$

tend vers 0 avec h.

Pour toute forme linéaire ξ continue sur X la fonction $f_\xi = \xi \circ f$ est holomorphe dans le disque Ω. Fixons $r < \mathrm{R}$; la fonction $z \to \|f(z)\|$ est continue sur le cercle de rayon r, donc bornée par un certain nombre M_r sur ce cercle. Sur le même cercle la fonction f_ξ est bornée par $\mathrm{M}_r \, \|\xi\|$, donc par les inégalités de Cauchy on a pour les dérivées en 0

$$r^n \, |f_\xi^{(n)}(0)| \leq n! \, \mathrm{M}_r \|\xi\|.$$

Le développement de Taylor de f_ξ au voisinage de 0 est donné par

$$f_\xi(h) = \xi\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} h^n \, a_n\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} h^n \, \xi(a_n)$$

donc $n! \, \xi(a_n) = f_\xi^{(n)}(0)$ pour tout $n \geq 0$, et on a

$$r^n \, |\xi(a_n)| \leq \mathrm{M}_r \|\xi\|.$$

Par le théorème de Hahn-Banach on en déduit

$$r^n \, \|a_n\| \leq \mathrm{M}_r.$$

Formule du rayon spectral

On considère la fonction

$$f(z) = (1_{\mathrm{A}} - za)^{-1}$$

qui est définie dans l'ouvert U de $\mathbb{C}$ formé de $z = 0$ et des $z \neq 0$ tels que $1/z \in \rho(a)$. Puisque $r(a)$ est le sup des modules des éléments du spectre, la fonction f est définie dans le disque ouvert $\mathrm{D}(0, 1/r(a))$.

Si $z \in \mathrm{U}$ et $u = 1_{\mathrm{A}} - za$, on peut considérer l'inverse v de u et en posant $b = ha$, la série

$$v + h\, vav + h^2\, vavav + \cdots$$

donne l'inverse de $u - ha = 1_{\mathrm{A}} - (z+h)a$ pour h assez petit, c'est-à-dire que $f(z+h)$ est représenté par la série précédente, qui est de la forme $\sum h^n b_n(z)$, avec $(b_n(z)) \subset \mathrm{A}$. Lorsque $z = 0$, on a $u = v = 1_{\mathrm{A}}$, et le développement de f est

$$f(h) = 1 + h\, a + h^2\, a^2 + \cdots$$

D'après le lemme précédent, on a

$$\sup_n r^n \|a^n\| < \infty$$

pour tout $r < 1/r(a)$, donc

$$\varlimsup_n \|a^n\|^{1/n} \leq r(a).$$

Mais on a vu que $r(a)$, le sup des modules des éléments du spectre, vérifie l'inégalité $r(a) \leq \varliminf_n \|a^n\|^{1/n}$. Ceci donne la formule du rayon spectral,

$$r(a) = \lim_n \|a^n\|^{1/n}.$$

Il reste à vérifier que le spectre n'est pas vide : s'il était vide, la fonction f serait définie dans $\mathbb{C}$ tout entier, a serait inversible et

$$-zf(z) = (a - z^{-1} 1_{\mathrm{A}})^{-1}$$

tendrait vers a^{-1} à l'infini, donc f tendrait vers 0. Le théorème de Liouville appliqué aux fonctions f_ξ donne le résultat.

Exemples.

1. Estimer les normes des puissances P^n de l'opérateur de primitive (sur $(0,1)$) et en déduire que $\mathrm{Sp(P)} = \{0\}$.

2. *Si a est un élément normal d'une* C^**-algèbre, on a* $r(a) = \|a\|$.

Si b est hermitien, on a $\|b^2\| = \|b^*b\| = \|b\|^2$. Ensuite b^2 est hermitien et on continue, $\|b^4\| = \|b\|^4$, etc… pour montrer que $\|b^{2^n}\| = \|b\|^{2^n}$ pour tout n, et conclure que $r(b) = \|b\|$. Si a est normal, on introduit $b = a^*a$ hermitien, et on écrit $\|a^2\|^2 = \|a^*a^*aa\| = \|a^*aa^*a\| = \|a^*a\|^2 = \|a\|^4$, etc…

3. Pour une isométrie $\mathrm{U} \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$, on a $\|\mathrm{U}^n\| = 1$ pour tout n, donc $r(\mathrm{U}) = 1$. On a de façon générale, si u est inversible dans une algèbre de Banach

$$\mathrm{Sp}(u^{-1}) = \{1/\lambda : \lambda \in \mathrm{Sp}(u)\}.$$

Si $\mathrm{U} \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$ est une isométrie surjective, donc inversible, on aura aussi $r(\mathrm{U}^{-1}) = 1$, ce qui entraîne que le spectre de U est contenu dans le cercle unité.

4. Application classique : corps de Banach ; idéaux maximaux. Si dans une algèbre de Banach unitaire complexe A tout élément non nul est inversible, alors $\mathrm{A} = \mathbb{C}1_\mathrm{A}$ (l'ensemble des multiples scalaires de l'unité) ; si B est une algèbre de Banach unitaire complexe et I un idéal maximal, il résulte que le quotient $\mathrm{A} = \mathrm{B}/\mathrm{I}$ vérifie la conclusion précédente, ce qui signifie que I est un hyperplan de B.

Diviseurs de zéros topologiques

Proposition. *Si $a \in \partial\mathrm{G}(\mathrm{A})$, il existe une suite (u_n) d'éléments inversibles de norme* 1 *telle que*

$$a\,u_n \to 0, \quad u_n\,a \to 0.$$

Preuve. On commence par faire la remarque suivante :

si $a \in \partial\mathrm{G}(\mathrm{A})$ et si une suite $(v_n) \subset \mathrm{G}(\mathrm{A})$ tend vers a, alors $\|v_n^{-1}\| \to +\infty$.

En cas contraire, on peut trouver une suite $(v_n) \subset \mathrm{G}(\mathrm{A})$ qui tend vers a et telle que $\|v_n^{-1}\|$ reste borné. Alors

$$b_n := 1_\mathrm{A} - v_n^{-1}a = v_n^{-1}v_n - v_n^{-1}a = v_n^{-1}(v_n - x)$$

tend vers 0, donc $1_\mathrm{A} - b_n = 1_\mathrm{A} - (1_\mathrm{A} - v_n^{-1}a) = v_n^{-1}a$ est inversible pour n grand, donc $a = v_n(v_n^{-1}a)$ est inversible aussi. Mais si a est au bord de G(A), il n'est pas dans G(A) puisque G(A) est ouvert. On a donc obtenu une contradiction.

Pour conclure, on pose $u_n = \|v_n^{-1}\|^{-1}v_n^{-1}$ qui est une suite d'éléments inversibles de norme 1, et on reprend le calcul précédent,

$$\|v_n^{-1}\|^{-1}1_\mathrm{A} - u_na = u_nv_n - u_na = u_n(v_n - a) \to 0\,;$$

on ajoute l'information

$$\|v_n^{-1}\|^{-1}1_\mathrm{A} \to 0$$

pour trouver $\lim_n u_na = 0$; le même calcul marche de l'autre côté aussi, et $\lim_n au_n = 0$.

Définition. On dira que a est un diviseur de zéro approché dans A ou bien *diviseur de zéro topologique dans* A (en abrégé : dzt) s'il existe une suite $(u_n) \subset \mathrm{A}$ d'éléments de norme 1 telle que au_n tende vers 0.

On a privilégié un côté ; on aurait pu utiliser l'autre côté, ou bien une définition bilatère, mais la précédente conviendra à nos besoins.

Remarque. *Tout dzt $a \in \mathrm{A}$ est non inversible dans* A.

Si a^{-1} existe et si au_n tend vers 0, alors $a^{-1}(au_n) = u_n$ tend vers 0, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse $\|u_n\| = 1$ pour tout n.

Remarque. *L'image d'un dzt $a \in \mathrm{A}$ par un homomorphisme d'algèbres de Banach unitaires* isométrique $\varphi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ *reste dzt dans* B.

En effet $\varphi(au_n) = \varphi(a)\varphi(u_n)$ tend vers 0, et $\|\varphi(u_n)\| = 1$ pour tout n.

Corollaire. *Pour tout homomorphisme* $\varphi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ *d'algèbres de Banach unitaires* isométrique, *les éléments de* $\partial\mathrm{G}(\mathrm{A})$ *ont une image non inversible, et* $\varphi(\partial\mathrm{G}(\mathrm{A})) \subset \partial\mathrm{G}(\mathrm{B})$. *Si* A *est complexe et si* $a \in \mathrm{A}$, *le bord du spectre de* a *reste dans le spectre de l'image,*

$$\partial\,\mathrm{Sp}(a) \subset \partial\,\mathrm{Sp}(\varphi(a)).$$

Cas où $\mathrm{A} = \mathcal{L}(\mathrm{X})$: si T est un dzt dans $\mathcal{L}(\mathrm{X})$, il existe une suite $(\mathrm{U}_n) \subset \mathcal{L}(\mathrm{X})$ d'opérateurs de norme 1 telle que TU_n tende vers 0 en norme d'opérateur. Puisque $\|\mathrm{U}_n\| = 1$, on peut trouver $y_n \in \mathrm{X}$ tel que $\|y_n\| \le 2$ et $\|\mathrm{U}_n y_n\| = 1$. La suite $x_n = \mathrm{U}_n y_n$ est alors une suite de vecteurs de norme 1 telle que $\mathrm{T}x_n \to 0$. On peut dire que 0 est une valeur propre approchée pour l'opérateur T.

Réciproquement, supposons qu'il existe une suite $(x_n) \subset \mathrm{X}$ de vecteurs de norme 1 telle que $\lim \mathrm{T}x_n = 0$; soit ξ_n une forme linéaire de norme 1 telle que $\xi_n(x_n) = 1$. L'opérateur $\mathrm{V}_n(y) = \xi_n(y)x_n$ est de norme un et TV_n tend vers 0.

Exercice. Spectre des opérateurs de multiplication par $a \in \mathrm{A}$.

Exemple. Le nombre complexe 1 est valeur propre approchée pour le shift S sur $\ell_2(\mathbb{N})$, car

$$x^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{e}_j \in \ell_2(\mathbb{N})$$

vérifie $\|x^{(n)}\| = 1$ et $\|\mathrm{S}x^{(n)} - x^{(n)}\|^2 = 2/n$, qui tend vers 0. En modifiant cet exemple, on vérifie que tout complexe de module un est valeur propre approchée pour le shift S.

Corollaire. *Si* A *est complexe et si le spectre de* $a \in \mathrm{A}$ *est d'intérieur vide dans* $\mathbb{C}$, *le spectre de* a *est préservé par tout plongement de* A *dans une algèbre* B.

Spectre des éléments hermitiens d'une C*-*algèbre*

Si a est un élément hermitien d'une C*-algèbre A, considérons un point limite λ du spectre de a ; il existe des éléments $u \in \mathrm{A}$ de norme 1 tels que $\|(a - \lambda 1_\mathrm{A})u\| < \varepsilon/2$; en multipliant par u^* on obtient $\|u^*(a - \lambda 1_\mathrm{A})u\| < \varepsilon/2$; comme $\|v^*\| = \|v\|$ pour tout v, on a aussi $\|u^*(a - \overline{\lambda} 1_\mathrm{A})u\| < \varepsilon/2$ en prenant l'adjoint, puis par différence on voit que

$$|\lambda - \overline{\lambda}| = |\lambda - \overline{\lambda}|\,\|u^*u\| < \varepsilon,$$

ce qui prouve que λ est réel.

Le bord du spectre étant contenu dans la droite réelle, il en résulte que tout le spectre est réel. En effet, il existe $\lambda_0 \in \mathrm{Sp}(a)$ tel que $\lambda_0 = \sigma_0 + \mathrm{i}\tau_0$ avec $|\tau_0|$ maximal parmi tous les éléments du spectre. Alors $\sigma_0 + \mathrm{i}(1+\varepsilon)\tau_0$ ne peut pas être dans $\mathrm{Sp}(a)$ pour $\varepsilon > 0$, donc λ_0 est dans le bord du spectre, donc réel, donc $\tau_0 = 0$; ceci montre que tout le spectre est réel.

Premiers rudiments de calcul fonctionnel holomorphe

Dans tout le paragraphe qui suit, a désigne un élément d'une algèbre de Banach unitaire complexe, $\mathrm{U} = \mathrm{D}(0, \mathrm{R})$ est un disque ouvert qui contient le disque spectral fermé $\overline{\mathrm{D}(0, r(a))}$, c'est-à-dire que $r(a) < \mathrm{R}$. Supposons que f soit holomorphe dans U. On sait que f est représentée dans le disque ouvert de rayon R par sa série de Taylor, qui est absolument convergente en tout point de $\mathrm{D}(0, \mathrm{R})$,

$$\forall z \in \mathrm{D}(0, \mathrm{R}), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

Choisissons r tel que $r(a) < r < \mathrm{R}$. On sait que $\sum |b_n| r^n < +\infty$. Considérons la série vectorielle

$$(*) \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n a^n.$$

Puisque $\lim \|a^n\|^{1/n} < r$, on aura $\|a^n\| \le r^n$ pour n assez grand, ce qui montre que la série $(*)$ est normalement convergente, donc convergente dans l'espace complet A. Il est raisonnable de poser

$$f(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n a^n \in \mathrm{A}.$$

On peut ainsi définir e^a pour tout élément $a \in \mathrm{A}$. On a aussi la formule de Cauchy, écrite de façon incorrecte mais suggestive,

$$f(a) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - a} \, dz$$

où γ_r désigne le cercle de rayon r, parcouru dans le sens direct, ou de façon correcte comme

$$f(a) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_r} f(z)(z 1_{\mathrm{A}} - a)^{-1} \, dz = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_r} f(z) \, \mathrm{R}_z(a) \, dz.$$

En effet, lorsque $|z| = r$, $a - z1_{\mathrm{A}}$ est inversible et on peut écrire

$$(z1_{\mathrm{A}} - a)^{-1} = z^{-1}(1_{\mathrm{A}} - z^{-1}a)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n-1} a^n,$$

où la série est normalement convergente sur le cercle. On a donc

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_r} f(z)(z1_{\mathrm{A}} - a)^{-1} \, dz = \sum_{n=0}^{+\infty} \Bigl(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_r} z^{-n-1} f(z) \, dz \Bigr) a^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n a^n.$$

Corollaire. *Si une suite* (f_n) *de fonctions holomorphes dans* U *tend uniformément vers* f *sur tout compact de* U, *alors*

$$f(a) = \lim_n f_n(a).$$

Preuve. La fonction $z \to (z1_{\mathrm{A}} - a)^{-1}$ est continue sur le cercle de rayon r, donc bornée en norme par un certain M. On peut majorer la norme de la différence des deux intégrales représentant $f_n(a)$ et $f(a)$ par $\mathrm{M}r\|f - f_n\|_{\infty,\gamma_r}$, qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Corollaire. *Si* f *et* g *sont holomorphes dans* U *on a*

$$(fg)(a) = f(a)g(a).$$

Preuve. On peut trouver deux suites de polynômes (P_n) et (Q_n) qui tendent respectivement vers f et g, uniformément sur tout compact de U (il suffit de prendre les sommes partielles des séries de Taylor). Pour des polynômes il est facile de voir que $(\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n)(a) = \mathrm{P}_n(a)\mathrm{Q}_n(a)$. On obtient le résultat en passant à la limite.

Exemple. On a $\mathrm{e}^{sa}\,\mathrm{e}^{ta} = \mathrm{e}^{(s+t)a}$; si a est hermitien, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}$ est unitaire.

Corollaire. *Si* f *est holomorphe dans* U *on a*

$$(\mathrm{e}^f)(a) = \mathrm{e}^{f(a)}\,.$$

Preuve. On trouve une suite de polynômes (P_n) qui tend vers la fonction exponentielle, uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$. Pour un polynôme P_n, il résulte du corollaire précédent que

$$(\mathrm{P}_n(f))(a) = \mathrm{P}_n(f(a)).$$

La suite $(\mathrm{P}_n(f))$ tend uniformément vers e^f sur tout compact de U, donc $(\mathrm{P}_n(f))(a)$ tend vers $(\mathrm{e}^f)(a)$; de l'autre côté, $\mathrm{P}_n(f(a))$ tend vers $\mathrm{e}^{f(a)}$.

Proposition. *Tout élément* $b \in \mathrm{A}$ *tel que* $\|b - 1_{\mathrm{A}}\| < 1$ *peut s'écrire* e^c *pour un certain* $c \in \mathrm{A}$.

Preuve. On applique ce qui précède avec $\mathrm{U} = \mathrm{D}(0,1)$, $f(z) = \ln(1-z)$. Posons $a = 1_{\mathrm{A}} - b$; si $\|a\| < 1$, on aura $r(a) < 1$, ce qui nous met dans le cadre voulu. On obtient

$$\mathrm{e}^{f(a)} = (\mathrm{e}^f)(a) = 1_{\mathrm{A}} - a = b.$$