3. Théorie de Fredholm

Espaces de dimension et codimension finie

Lemme 3.1. Projection sur un sous-espace de dimension finie. *Si* E *est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace normé* X*, il existe un projecteur* P *continu sur* X *tel que* $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{E}$.

Preuve. On choisit une base $e_1, \ldots, e_n$ de E, et on désigne par e_j^*, $j = 1, \ldots, n$ les formes linéaires coordonnées sur E ; par le théorème de Hahn-Banach on peut prolonger ces formes linéaires sur E en formes linéaires continues $x_1^*, \ldots, x_n^*$ sur X. On pose

$$\mathrm{P}x = \sum_{j=1}^{n} x_j^*(x) e_j.$$

Il est clair que P est continue, et facile de vérifier que P est une projection de X sur E.

Corollaire. *Si* E *est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace normé* X*, il existe un sous-espace vectoriel fermé* $\mathrm{Y} \subset \mathrm{X}$ *tel que* $\mathrm{X} = \mathrm{E} \oplus \mathrm{Y}$.

Preuve. Il suffit de prendre pour Y le noyau de la projection P de X sur E donnée par le lemme précédent.

Définition. Un sous-espace vectoriel fermé $\mathrm{Y} \subset \mathrm{X}$ est *de codimension finie dans* X si le quotient X/Y est de dimension finie. La *codimension* de Y dans X est la dimension de l'espace vectoriel quotient X/Y. On la notera $\operatorname{codim}_{\mathrm{X}} \mathrm{Y}$ ou simplement $\operatorname{codim} \mathrm{Y}$ si aucune confusion n'est à craindre.

Si X/Y est de dimension finie n et si on relève une base $(\hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_n)$ du quotient en des vecteurs $(f_1, \ldots, f_n)$ de X, on obtient un système libre qui engendre un sous-espace vectoriel F de X, de dimension finie égale à $n = \operatorname{codim} \mathrm{Y}$, tel que $\mathrm{X} = \mathrm{Y} \oplus \mathrm{F}$. Il est clair que dire que $\mathrm{X} = \mathrm{Y} \oplus \mathrm{F}$, avec F de dimension finie d, équivaut à dire que Y est codimension finie égale à d. Notons π_{Y} la projection canonique de X sur X/Y, qui associe à chaque vecteur $x \in \mathrm{X}$ sa classe $\pi_{\mathrm{Y}}(x)$ modulo Y, c'est-à-dire

$$\pi_{\mathrm{Y}}(x) = \{x + y : y \in \mathrm{Y}\}.$$

On rappelle que la norme de l'espace quotient X/Y est définie par

$$\forall x \in \mathrm{X}, \quad \|\pi_{\mathrm{Y}}(x)\| = \inf\{\|x + y\| : y \in \mathrm{Y}\},$$

ce qui signifie que la norme de la classe est l'inf des normes des éléments de la classe. On va faire quelques remarques simples mais utiles.

1. *Si* $\mathrm{X} = \mathrm{Y} + \mathrm{F}$ *avec* F *de dimension finie, alors* Y *est de codimension finie et* $\operatorname{codim} \mathrm{Y} \le \dim \mathrm{F}$. *La codimension de* Y *est* $\le k$ *si et seulement s'il existe* F *de dimension* $\le k$ *tel que* $\mathrm{X} = \mathrm{Y} + \mathrm{F}$.

Si $\mathrm{X} = \mathrm{Y} + \mathrm{F}$, alors $\mathrm{X}/\mathrm{Y} = \pi_{\mathrm{Y}}(\mathrm{F})$, qui est donc un espace de dimension finie $\le \dim \mathrm{F}$.

2. *Si* $\mathrm{Y} \cap \mathrm{F} = \{0\}$ *avec* F *de dimension finie, alors* $\operatorname{codim} \mathrm{Y} \ge \dim \mathrm{F}$. *La codimension de* Y *est* $\ge k$ *si et seulement s'il existe* F *de dimension* k *tel que* $\mathrm{Y} \cap \mathrm{F} = \{0\}$.

Si $\mathrm{Y} \cap \mathrm{F} = \{0\}$, la projection π_{Y} est injective sur F, donc l'image $\pi_{\mathrm{Y}}(\mathrm{F})$ a la même dimension que F et $\dim \mathrm{X}/\mathrm{Y} \geq \dim \mathrm{F}$.

3. *Codim dans codim : si* Z *est de codimension* k *dans* Y *et* Y *de codimension* ℓ *dans* X*, alors* Z *est de codimension* $k+\ell$ *dans* X*.*

On peut écrire $\mathrm{X} = \mathrm{Y} \oplus \mathrm{E}$ et $\mathrm{Y} = \mathrm{Z} \oplus \mathrm{F}$, avec E et F de dimensions finies égales aux codimensions respectives ; alors la relation $\mathrm{X} = \mathrm{Z} \oplus (\mathrm{E} \oplus \mathrm{F})$ montre que

$$\operatorname{codim}_{\mathrm{X}} \mathrm{Z} = \operatorname{codim}_{\mathrm{Y}} \mathrm{Z} + \operatorname{codim}_{\mathrm{X}} \mathrm{Y}.$$

4. *L'intersection d'un sous-espace fermé* Z *avec un sous-espace de codimension finie* Y *est de codimension finie dans* Z*.*

L'image $\pi_{\mathrm{Y}}(\mathrm{Z})$ est de dimension finie, donc admet une base $(\hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_d)$, qu'on relève en $(f_1, \ldots, f_d)$ dans Z ; on pose $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(f_1, \ldots f_d)$, et on constate que $\mathrm{Z} = (\mathrm{Z} \cap \mathrm{Y}) + \mathrm{F}$. En effet, si $z \in \mathrm{Z}$ on écrit $\pi_{\mathrm{Y}}(z) = \sum c_j \hat{f}_j$, et on voit que $z - \sum c_j f_j$ est dans $\mathrm{Z} \cap \mathrm{Y}$.

5. *L'intersection* $\mathrm{Z} \cap \mathrm{Y}$ *d'un sous-espace de dimension infinie* $\mathrm{Z} \subset \mathrm{X}$ *avec un sous-espace* Y *de codimension finie dans* X *est de dimension infinie.*

On a vu que $\mathrm{Z} \cap \mathrm{Y}$ est de codimension finie dans Z, donc $\mathrm{Z} = (\mathrm{Z} \cap \mathrm{Y}) \oplus \mathrm{F}$, avec $\dim \mathrm{F} < +\infty$; il n'est pas possible que $\mathrm{Z} \cap \mathrm{Y}$ soit de dimension finie, puisque $\dim \mathrm{Z} = +\infty$.

Projection de $\mathrm{Y} + \mathrm{F}$ *sur* F

On suppose que Y est un sous-espace fermé d'un espace normé X, et F un sous-espace de dimension finie tel que $\mathrm{Y} \cap \mathrm{F} = \{0\}$. On a

$$\delta = \min\{\mathrm{dist}(f, \mathrm{Y}) : f \in \mathrm{S_F}\} > 0$$

car la sphère unité de F est compacte et disjointe du fermé Y. On en déduit par homogénéité

$$\|y + f\| \geq \delta \|f\|$$

pour tous $f \in \mathrm{F}$, $y \in \mathrm{Y}$. La projection naturelle P de Y+F sur F, définie par $\mathrm{P}(y+f) = f$, est donc de norme $\leq \delta^{-1}$, et la projection $\mathrm{Id} - \mathrm{P}$ de $\mathrm{Y} + \mathrm{F}$ sur Y est alors de norme $\leq 1 + \delta^{-1}$, c'est-à-dire que

$$\|y + f\| \geq \delta(1+\delta)^{-1} \|y\|$$

pour tous $f \in \mathrm{F}$, $y \in \mathrm{Y}$. Si π_{F} désigne la projection de X sur X/F, on a donc pour tout $y \in \mathrm{Y}$

$$(\mathrm{Q_F}) \qquad \|\pi_{\mathrm{F}}(y)\|_{\mathrm{X}/\mathrm{F}} \geq \delta(1+\delta)^{-1} \|y\|.$$

Lemme. *Si* Y *est un sous-espace fermé d'un espace normé* X *et* F *un sous-espace de dimension finie, la somme* $\mathrm{Y} + \mathrm{F}$ *est fermée dans* X*.*

Preuve. Supposons d'abord que $\mathrm{Y} \cap \mathrm{F} = \{0\}$; supposons qu'une suite $(y_n + f_n) \subset \mathrm{Y} + \mathrm{F}$ tende vers un vecteur $x \in \mathrm{X}$. Soit P la projection (continue) de $\mathrm{Y} + \mathrm{F}$ sur F ; la suite $(y_n + f_n)$ est bornée puisque convergente vers x, donc son image (f_n) par P est bornée dans F. Par Bolzano, on trouve une sous-suite (f_{n_k}) qui tend vers un $f \in \mathrm{F}$, et par différence y_n converge aussi, vers un $y \in \mathrm{Y}$ puisque Y est fermé. Finalement, $x = y + f \in \mathrm{Y} + \mathrm{F}$.

Dans le cas général, on écrit $\mathrm{F} = (\mathrm{F} \cap \mathrm{Y}) \oplus \mathrm{F}_1$ et on constate que $\mathrm{Y} + \mathrm{F} = \mathrm{Y} + \mathrm{F}_1$ avec $\mathrm{Y} \cap \mathrm{F}_1 = \{0\}$.

Plongements

À partir de maintenant il est important de supposer que les espaces X et Y considérés sont **complets**.

Définition. On dira que $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ est un *plongement* de X dans Y s'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\forall x \in \mathrm{X}, \quad \|\mathrm{T}x\| \geq c\,\|x\|.$$

Il est clair que les opérateurs proches de T vérifient encore la propriété, mais pour un $c' < c$ voisin de c : par l'inégalité triangulaire, on aura pour tout $x \in \mathrm{X}$

$$\|(\mathrm{T}+\mathrm{S})x\| \geq \|\mathrm{T}x\| - \|\mathrm{S}x\| \geq (c - \|\mathrm{S}\|)\,\|x\|$$

ce qui montre que $\mathrm{T}' = \mathrm{T} + \mathrm{S}$ est encore un plongement si $\|\mathrm{S}\| < c$.

L'image par un plongement T de tout sous-espace fermé de X est fermée dans Y (utiliser le caractère complet de Y au moyen de la remarque suivante : si T est un plongement, une suite $(\mathrm{T}x_n)$ est de Cauchy dans Y si et seulement si (x_n) est de Cauchy dans X ; si on n'avait pas supposé X complet, la propriété d'image fermée serait évidemment fausse : penser au plongement isométrique d'un espace normé non complet dans son complété).

On peut remarquer que T est un plongement si et seulement s'il n'existe pas de suite $(x_n) \subset \mathrm{X}$ de vecteurs de norme 1 telle que $\mathrm{T}x_n \to 0$: si T n'est pas un plongement, il n'existe aucune constante $c > 0$ vérifiant la définition de plongement, c'est à dire que pour tout n il existe un vecteur $x_n \in \mathrm{X}$ tel que $\|\mathrm{T}x_n\| < 2^{-n}\|x_n\|$; en multipliant x_n par un scalaire > 0, on peut se ramener à une suite $(x_n) \subset \mathrm{X}$ de vecteurs de norme 1, telle que $\mathrm{T}x_n \to 0$. L'implication inverse est évidente.

En particulier, un endomorphisme $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$ est un plongement si et seulement si 0 n'est pas valeur propre approchée de T.

Stabilité de la codimension de l'image

Lemme 3.2. *Si* T *est un plongement de* X *dans* Y *et si la codimension de* T(X) *dans* Y *(finie ou infinie) est* $\geq k$*, il en est de même pour les opérateurs* T′ *voisins de* T.

Si T *est un plongement et si la codimension de* T(X) *dans* Y *est finie égale à* k*, il en est de même pour les opérateurs* T′ *voisins de* T.

Si T *est un plongement et si la codimension de* T(X) *dans* Y *est infinie, il en est de même pour les opérateurs* T′ *voisins de* T.

Preuve. Si la codimension de T(X) dans Y est $\geq k$, l'espace quotient $\mathrm{Y}/\mathrm{T}(\mathrm{X})$ est de dimension $\geq k$; on peut trouver un sous-espace de dimension k dans le quotient, le relever en $\mathrm{F} \subset \mathrm{Y}$ tel que $\mathrm{T}(\mathrm{X}) \cap \mathrm{F} = \{0\}$; alors la projection π_{F} est un plongement de T(X) sur $\mathrm{T}(\mathrm{X})/\mathrm{F}$ d'après l'inégalité $(\mathrm{Q}_{\mathrm{F}})$, ainsi que $\pi_{\mathrm{F}} \circ \mathrm{T}$ par composition évidente,

$$\|\pi_{\mathrm{F}}(\mathrm{T}x)\| \geq \delta(1+\delta)^{-1}\|\mathrm{T}x\| \geq \delta(1+\delta)^{-1}\,c\,\|x\|\,;$$

il en est de même pour les voisins T′ de T (car alors $\pi_{\mathrm{F}} \circ \mathrm{T}'$ est voisin de $\pi_{\mathrm{F}} \circ \mathrm{T}$) ; en particulier $\pi_{\mathrm{F}} \circ \mathrm{T}'$ est injectif quand T′ est voisin de T, donc $\mathrm{F} \cap \mathrm{T}'(\mathrm{X}) = \{0\}$ et par conséquent $\operatorname{codim} \mathrm{T}'(\mathrm{X}) \geq k$.

Si la codimension de $\mathrm{T}(\mathrm{X})$ dans Y est $= k$, on aura $\mathrm{Y} = \mathrm{T}(\mathrm{X}) \oplus \mathrm{F}$ et $\pi_\mathrm{F} \circ \mathrm{T}$ sera un isomorphisme de X sur Y/F ; ceci passe aux voisins T' et donne le résultat voulu.

Soit T un plongement tel que $\operatorname{codim}_\mathrm{Y} \mathrm{T}(\mathrm{X}) = +\infty$; soit B une boule ouverte dans $\mathcal{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$, centrée en T et de rayon assez petit pour que tous ses éléments soient des plongements ; pour chaque entier k, l'ensemble des opérateurs $\mathrm{S} \in \mathrm{B}$ vérifiant l'inégalité $\operatorname{codim} \mathrm{S}(\mathrm{X}) \geq k$ est ouvert dans $\mathcal{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ d'après ce qui précède, ainsi que l'ensemble des S tel que $\operatorname{codim} \mathrm{S}(\mathrm{X}) = k$. Il en résulte que l'ensemble des $\mathrm{S} \in \mathrm{B}$ tels que $\operatorname{codim} \mathrm{S}(\mathrm{X}) = k$ est aussi fermé dans B (son complémentaire est formé de l'ouvert codim $\geq k+1$ et des ouverts codim $= j$, $j < k$). Par la connexité de B, chacun de ces ensembles codim $= k$ est vide ou égal à B. Si $\operatorname{codim} \mathrm{T}(\mathrm{X})$ est infinie, aucun de ces ensembles n'est égal à B : ils sont donc tous vides, et B est entièrement formée d'opérateurs avec codim $= +\infty$.

Faute de mieux, on adoptera ici la terminologie suivante.

Définition. On dira que $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ est un *presque-plongement* de X dans Y s'il existe un sous-espace de codimension finie $\mathrm{X}_1 \subset \mathrm{X}$ et une constante $c > 0$ tels que

$$\forall x \in \mathrm{X}_1, \quad \|\mathrm{T}x\| \geq c\,\|x\|.$$

Il est clair que les opérateurs proches de T vérifient encore la propriété, avec le même sous-espace X_1 mais pour un $c' < c$ voisin de c.

Si T est un presque-plongement, l'image de tout sous-espace fermé de X est fermée dans Y : si Z est un sous-espace fermé de l'espace X_1 de la définition, il est clair que $\mathrm{T}(\mathrm{Z})$ est fermé ; en effet, toute suite de Cauchy (y_n) dans $\mathrm{T}(\mathrm{Z})$ peut s'écrire $y_n = \mathrm{T}x_n$ avec $(x_n) \subset \mathrm{Z} \subset \mathrm{X}_1$, donc

$$\|x_m - x_n\| \leq c^{-1} \|\mathrm{T}x_m - \mathrm{T}x_n\|$$

tend vers 0 avec m, n ; la suite de Cauchy (x_n) converge vers un $x \in \mathrm{Z}$ puisque Z est complet, et $y_n = \mathrm{T}x_n$ converge vers $\mathrm{T}x \in \mathrm{T}(\mathrm{Z})$. Si Z est un sous-espace fermé quelconque, on écrit $\mathrm{Z} = (\mathrm{Z} \cap \mathrm{X}_1) \oplus \mathrm{F}$ avec F de dimension finie, puis $\mathrm{T}(\mathrm{Z}) = \mathrm{T}(\mathrm{Z} \cap \mathrm{X}_1) + \mathrm{T}(\mathrm{F})$ est fermé comme somme d'un sous-espace fermé et d'un sous-espace de dimension finie.

Il est clair que le noyau N de T est de dimension finie, puisqu'il ne peut pas rencontrer le sous-espace X_1 de codimension finie ; si on choisit un supplémentaire X_2 de ce noyau, on verra que la restriction de T à X_2 est un plongement. En effet, on pourra écrire $\mathrm{X}_2 = (\mathrm{X}_2 \cap \mathrm{X}_1) \oplus \mathrm{F}$, avec F de dimension finie ; désignons par P la projection continue de la somme $(\mathrm{X}_2 \cap \mathrm{X}_1) \oplus \mathrm{F}$ sur F ; si la restriction de T à X_2 n'est pas un plongement, il existe une suite $(x_n) \subset \mathrm{X}_2$ de vecteurs de norme 1, telle que $\mathrm{T}x_n \to 0$. On peut supposer, en passant à une sous-suite, que $\mathrm{P}x_n$ converge vers un vecteur $f \in \mathrm{F}$; puisque $x_n - \mathrm{P}x_n \in \mathrm{X}_1$ et que $\mathrm{T}x_n - \mathrm{TP}x_n$ tend vers $-\mathrm{T}f$, on en déduit que $(x_n - \mathrm{P}x_n)$ est de Cauchy, donc converge vers un vecteur $z \in \mathrm{X}_2 \cap \mathrm{X}_1$, et (x_n) converge vers le vecteur $x = z + f \in \mathrm{X}_2$, tel que $\|x\| = 1$ et $\mathrm{T}x = 0$; ceci contredit $\mathrm{X}_2 \cap \mathrm{N} = \{0\}$.

Remarque. On peut voir que T est un presque-plongement si et seulement si l'image de T est fermée et le noyau de dimension finie : on vient de voir un sens ; pour le sens inverse, appliquer le théorème des isomorphismes de Banach (l'argument sera repris plus bas dans la première proposition sur les opérateurs de Fredholm).

Opérateurs de Fredholm

Définition. Soient X, Y deux espaces de Banach ; on dit que $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ est un *opérateur de Fredholm* s'il existe un sous-espace fermé $\mathrm{X}_1 \subset \mathrm{X}$ de codimension finie, tel que la restriction de T à X_1 soit un isomorphisme de X_1 sur $\mathrm{Y}_1 = \mathrm{T}(\mathrm{X}_1)$, et que $\operatorname{codim}_{\mathrm{Y}} \mathrm{T}(\mathrm{X}_1) < +\infty$. Autrement dit : on a $\operatorname{codim}_{\mathrm{X}} \mathrm{X}_1 < +\infty$, $\operatorname{codim}_{\mathrm{Y}} \mathrm{T}(\mathrm{X}_1) < +\infty$ et il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\forall x \in \mathrm{X}_1, \quad \|\mathrm{T}x\| \geq c\, \|x\|.$$

La quantité

$$\operatorname{codim}_{\mathrm{X}} \mathrm{X}_1 - \operatorname{codim}_{\mathrm{Y}} \mathrm{T}(\mathrm{X}_1)$$

ne dépend pas du choix de X_1 ; on l'appelle *l'indice* de T, qui est noté $\operatorname{ind}(\mathrm{T})$.

L'indépendance de l'indice par rapport au choix de X_1 est facile à prouver si X_2 est un autre choix avec $\mathrm{X}_2 \subset \mathrm{X}_1$; dans ce cas on peut écrire $\mathrm{X}_1 = \mathrm{X}_2 \oplus \mathrm{E}$ avec $\dim \mathrm{E} < +\infty$, et $\mathrm{T}(\mathrm{X}_1) = \mathrm{T}(\mathrm{X}_2) \oplus \mathrm{T}(\mathrm{E})$. Comme T est injectif sur X_1 et que E est contenu dans X_1, on a $\dim \mathrm{T}(\mathrm{E}) = \dim(\mathrm{E})$ et

$$\operatorname{codim}_{\mathrm{X}} \mathrm{X}_2 - \operatorname{codim}_{\mathrm{Y}} \mathrm{T}(\mathrm{X}_2) = (\operatorname{codim}_{\mathrm{X}} \mathrm{X}_1 + \dim \mathrm{E}) - (\operatorname{codim}_{\mathrm{Y}} \mathrm{T}(\mathrm{X}_1) + \dim \mathrm{T}(\mathrm{E})).$$

Dans le cas général on passera par l'intermédiaire de l'espace $\mathrm{X}_3 = \mathrm{X}_1 \cap \mathrm{X}_2$, qui est de codimension finie.

Remarque. Dans le langage du précédent paragraphe, un opérateur de Fredholm est un presque-plongement dont l'image est de codimension finie. Les opérateurs de Fredholm ont donc les propriétés des presque-plongements : le noyau est de dimension finie, tout sous-espace fermé de X a une image $\mathrm{T}(\mathrm{X})$ fermée dans Y.

Proposition. *Un opérateur* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ *est de Fredholm si et seulement si son noyau est de dimension finie et son image fermée de codimension finie. On a dans ce cas*

$$\operatorname{ind}(\mathrm{T}) = \dim \ker(\mathrm{T}) - \operatorname{codim}_{\mathrm{Y}} \mathrm{T}(\mathrm{X}).$$

Preuve. Supposons que T soit Fredholm au sens de la définition ci-dessus ; puisque T est un presque-plongement, on sait que $\dim \ker \mathrm{T}$ est finie, et on sait que l'image $\mathrm{T}(\mathrm{X})$ est fermée ; de plus, $\mathrm{T}(\mathrm{X})$ est de codimension finie dans Y puisque $\mathrm{T}(\mathrm{X}_1)$ est déjà de codimension finie.

Inversement, supposons $\ker \mathrm{T}$ de dimension finie et $\mathrm{T}(\mathrm{X})$ fermé de codimension finie. D'après le lemme 3.1, on peut trouver X_1 fermé tel que $\mathrm{X} = \mathrm{X}_1 \oplus \ker \mathrm{T}$; alors $\mathrm{T}(\mathrm{X}_1) = \mathrm{T}(\mathrm{X})$ est un espace de Banach, et $\mathrm{T}_{|\mathrm{X}_1} \in \mathcal{L}(\mathrm{X}_1, \mathrm{T}(\mathrm{X}))$ est une bijection continue. D'après le théorème des isomorphismes de Banach, la bijection inverse est continue, donc T_1 est un isomorphisme de X_1 sur $\mathrm{T}(\mathrm{X}_1)$. L'indice calculé avec ce choix de X_1 est égal à

$$\operatorname{codim}_{\mathrm{X}} \mathrm{X}_1 - \operatorname{codim}_{\mathrm{Y}} \mathrm{T}(\mathrm{X}_1) = \dim \ker(\mathrm{T}) - \operatorname{codim}_{\mathrm{Y}} \mathrm{T}(\mathrm{X}).$$

Exemples.

1. Le shift $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\ell_2(\mathbb{N}))$ est une isométrie dont l'image est l'hyperplan fermé de $\ell_2(\mathbb{N})$ constitué des vecteurs $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que $x_0 = 0$. On voit que S est un opérateur de Fredholm, et $\mathrm{ind}(\mathrm{S}) = 0 - 1 = -1$.

L'adjoint S^* a un noyau de dimension 1, et il est surjectif ; son indice est $1 = -\,\mathrm{ind}(\mathrm{S})$. C'est un fait général : si $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2)$ est de Fredholm, son adjoint est de Fredholm et $\mathrm{ind}(\mathrm{T}^*) = -\,\mathrm{ind}(\mathrm{T})$.

2. L'opérateur $f \to f''$ est un opérateur de Fredholm de $\mathrm{C}^2(0,1)$ dans $\mathrm{C}(0,1)$. Il est clairement surjectif et son noyau est de dimension 2 (fonctions affines).

Pour un presque-plongement général, l'image est fermée dans Y mais elle peut être de codimension infinie. On dit dans ce cas que T est *semi-Fredholm*, d'indice généralisé égal à $-\infty$. On a aussi des semi-Fredholm d'indice $+\infty$, dont l'image est fermée de codimension finie, mais le noyau de dimension infinie.

Si T est Fredholm ou semi-Fredholm d'indice $-\infty$, cela signifie exactement que T est un presque-plongement ; il existe un sous-espace fermé X_1 de codimension finie tel que la restriction de T à X_1 soit un plongement ; on sait que les voisins T' de T sont aussi des plongements sur X_1, et $\mathrm{codim}_\mathrm{Y}\,\mathrm{T}'(\mathrm{X}_1) = \mathrm{codim}_\mathrm{Y}\,\mathrm{T}(\mathrm{X}_1)$ d'après le lemme 3.2. Les voisins de T ont donc le même indice (généralisé) que T.

Perturbations des opérateurs de Fredholm

Proposition 3.3. *Si $t \in [0,1] \to \mathrm{T}_t \in \mathcal{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ est un chemin continu de $[0,1]$ dans l'espace normé $\mathcal{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$, et si chaque T_t est semi-Fredholm, alors l'indice est constant.*

Preuve. C'est clair puisque l'indice généralisé (qui est partout défini sur $[0,1]$ d'après l'hypothèse) est localement constant.

Lemme. *Pour tout opérateur compact $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-espace X_1 de codimension finie tel que $\|\mathrm{T}_{|\mathrm{X}_1}\| \le \varepsilon$.*

Preuve. Considérons le compact $\mathrm{K} = \overline{\mathrm{T}(\mathrm{B}_\mathrm{X})})$. Pour chaque $y \in \mathrm{K}$, on trouve par Hahn-Banach une forme linéaire continue $\xi_y \in \mathrm{Y}^*$ telle que $\|y\| = |\xi_y(y)|$; l'ensemble des $y' \in \mathrm{K}$ tels que $\|y'\| < \varepsilon + |\xi_y(y')|$ est un voisinage ouvert de y. Par compacité, on peut recouvrir K par un nombre fini de tels ouverts. On peut sélectionner ainsi un ensemble fini de formes linéaires y_j^*, $j = 1, \ldots, \mathrm{N}$ tel que

$$\forall y \in \mathrm{K}, \quad \|y\| \le \varepsilon + \max_{1\le j\le \mathrm{N}} |y_j^*(y)|.$$

On choisit pour X_1 l'intersection finie des noyaux des formes linéaires $y_j^* \circ \mathrm{T}$. Pour tout $x \in \mathrm{B}_{\mathrm{X}_1}$, on aura $\mathrm{T}x \in \mathrm{K}$ et $y_j^*(\mathrm{T}x) = 0$ pour $j = 1, \ldots, \mathrm{N}$, donc

$$\|\mathrm{T}x\| \le \varepsilon + \max_{1\le j\le \mathrm{N}} |y_j^*(\mathrm{T}x)| = \varepsilon.$$

Lemme. *Si* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ *est un presque-plongement et si* $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ *est compact, la somme* $\mathrm{T}+\mathrm{S}$ *est un presque-plongement.*

Preuve. On a un sous-espace X_1 de codimension finie sur lequel T est un plongement, c'est-à-dire qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\forall x \in \mathrm{X}_1, \quad \|\mathrm{T}x\| \geq c\,\|x\|,$$

et on a un sous-espace X_2 de codimension finie sur lequel S est de norme $< c/2$; par l'inégalité triangulaire, $\mathrm{T}+\mathrm{S}$ est un plongement de constante $c/2$ sur $\mathrm{X}_1 \cap \mathrm{X}_2$, qui est de codimension finie dans X.

Théorème. *Si* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ *est Fredholm et* $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ *compact, la somme* $\mathrm{T}+\mathrm{S}$ *est Fredholm, de même indice que* T.

Preuve. On passe de T à $\mathrm{T}+\mathrm{S}$ en suivant le chemin continu $u \to \mathrm{T}+u\mathrm{S}$, $u \in [0,1]$. Tous les éléments sont semi-Fredholm par le lemme précédent, et on conclut par la proposition 3.3.

Illustration.

1. Si φ est une fonction continue ≥ 0 sur $[0,1]$, l'opérateur $\mathrm{T} : f \to f'' - \varphi f$ est surjectif de l'espace X formé des fonctions de classe C^2 sur $[0,1]$, nulles en 0 et en 1, sur l'espace $\mathrm{Y} = \mathrm{C}([0,1])$.

On voit que $f \to f''$ est un isomorphisme de X sur Y, donc Fredholm d'indice 0 ; on montre que l'injection de X dans Y est compacte par le théorème d'Ascoli (les éléments de la boule unité de X vérifient $|f''| \leq 1$ et $|f'| \leq 1$ sur $[0,1]$), donc $f \to \varphi f$ est compact de X dans Y. L'opérateur T proposé est donc Fredholm d'indice 0. Mais T est injectif car

$$\int_0^1 (\mathrm{T}f)(t)\overline{f(t)}\,dt = \int_0^1 \big(f''(t) - \varphi(t)f(t)\big)\overline{f(t)}\,dt = -\int_0^1 \big(|f'(t)|^2 + \varphi(t)|f(t)|^2\big)\,dt$$

ne peut être nul que si $f = 0$. Il en résulte que T est surjectif.

2. On va généraliser en deux dimensions. Considérons l'espace H_2 des fonctions f de deux variables de la forme

$$f(x,y) \sim \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} c_{m,n}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}ny}$$

pour lesquelles on suppose que

$$\|f\|^2 = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} (1+m^2+n^2)^2 |c_{m,n}|^2 < +\infty\,;$$

la fonction $f \to \|f\|$ définit une norme d'espace de Hilbert sur H_2. L'opérateur $\mathrm{L} : u \to -\Delta u + \varepsilon u$, avec $\varepsilon > 0$, agit sur les polynômes trigonométriques par

$$\sum_{m,n} c_{m,n} e_m \otimes e_n \to \sum_{m,n} (\varepsilon + m^2 + n^2)\, c_{m,n} e_m \otimes e_n.$$

D'après la définition de la norme de H_2, il est clair que cet opérateur est borné de H_2 à valeurs dans $\mathrm{H}_0 = \mathrm{L}_2([0,2\pi]^2)$; en fait il est facile de vérifier qu'il se prolonge en un isomorphisme T de H_2 sur H_0, donc T est Fredholm d'indice 0.

Considérons une fonction continue périodique $\varphi(x,y)$ telle que $\varphi(x,y) \ge \varepsilon > 0$ en tout point, et posons

$$(\mathrm{S}u)(x,y) = (\varphi(x,y) - \varepsilon)\, u(x,y).$$

Cet opérateur est compact de H_2 dans H_0 : on voit d'abord que l'injection $u \to u$ est compacte de H_2 dans H_0 (utiliser les coefficients dans la base hilbertienne $(e_m \otimes e_n)_{m,n\in\mathbb{Z}}$), et on compose avec l'opérateur borné de H_0 dans H_0 donné par la multiplication par la fonction bornée $\varphi - \varepsilon$. On sait alors que $\mathrm{T}+\mathrm{S}$ est Fredholm d'indice 0 ; mais $\mathrm{T}+\mathrm{S}$ est injectif car

$$\langle(\mathrm{T}+\mathrm{S})u, u\rangle = \int_{[0,2\pi]^2} (-\Delta u + \varphi u)\, \overline{u}\, dx\, dy = \int_{[0,2\pi]^2} \big(|\nabla u|^2 + \varphi |u|^2\big)\, dx\, dy$$

ne peut être nul que si u est nulle. On en déduit que cet opérateur est surjectif : pour toute fonction $g \in \mathrm{H}_0$, il existe $u \in \mathrm{H}_2$ telle que

$$-\Delta u + \varphi\, u = g.$$

Formulation classique de l'alternative de Fredholm

A l'époque de l'article de Fredholm (1903), il n'y avait pas plus d'espaces de Banach que de théorie des opérateurs compacts. Fredholm s'intéressait à la résolution d'équations intégrales de la forme suivante : étant donnée une fonction continue g sur $[0,1]$, peut-on trouver f continue sur $[0,1]$ qui vérifie l'équation intégrale

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = \int_0^1 \mathrm{K}(x,y) f(y)\, dy + g(x).$$

Si le noyau K est continu sur le carré, il résulte du théorème d'Ascoli que l'opérateur intégral est compact de $\mathrm{C}([0,1])$ dans lui-même, et on est en train d'essayer de résoudre une équation de la forme $(\mathrm{Id} - \mathrm{T}_\mathrm{K})f = g$. Fredholm découvre dans le langage de l'époque que l'indice de $\mathrm{Id} - \mathrm{T}_\mathrm{K}$ est nul, ce qui le conduit à formuler ce qui est resté connu sous le nom *d'alternative de Fredholm*.

Quelques années après, sous l'influence de F. Riesz, on est arrivé à peu de chose près à la formulation "classique" suivante : soit S un opérateur compact sur X ; on sait que la transposée ${}^t\mathrm{S}$ est compacte de X^* dans X^*. On a *l'alternative* suivante :

– ou bien les deux équations $x - \mathrm{S}(x) = y$, $x^* - {}^t\mathrm{S}(x^*) = y^*$ admettent pour tous seconds membres $y \in \mathrm{X}$, $y^* \in \mathrm{X}^*$ une solution unique $x \in \mathrm{X}$, $x^* \in \mathrm{X}^*$,

– ou bien les équations homogènes $x - \mathrm{S}(x) = 0$, $x^* - {}^t\mathrm{S}(x^*) = 0$ admettent un même nombre fini $k > 0$ de solutions indépendantes, $x_1, \ldots, x_k$ et $x_1^*, \ldots, x_k^*$. Dans ce cas, pour que l'équation $x - \mathrm{S}(x) = y$ admette une solution $x \in \mathrm{X}$, il faut et il suffit que $x_1^*(y) = x_2^*(y) = \cdots = x_k^*(y) = 0$, et pour que l'équation $x^* - {}^t\mathrm{S}(x^*) = y^*$ admette une solution $x^* \in \mathrm{X}^*$, il faut et il suffit que $y^*(x_1) = y^*(x_2) = \cdots = y^*(x_k) = 0$.

Pour ce point de vue classique, on pourra consulter le livre de F. Riesz, *Leçons d'Analyse Fonctionnelle*.

Lemme. *Si* T *est un presque-plongement de* X*, l'intersection* Y *des images* $\mathrm{T}^n(\mathrm{X})$ *est fermée et* $\mathrm{T}(\mathrm{Y}) = \mathrm{Y}$*.*

Preuve. Sous l'hypothèse de presque-plongement, on voit par récurrence que l'image $\mathrm{T}^{n+1}(\mathrm{X}) = \mathrm{T}(\mathrm{T}^n(\mathrm{X}))$ du sous-espace fermé $\mathrm{T}^n(\mathrm{X})$ est fermée, donc

$$\mathrm{Y} = \bigcap_{n \geq 0} \mathrm{T}^n(\mathrm{X})$$

est un sous-espace vectoriel fermé ; il est clair que $\mathrm{T}(\mathrm{Y}) \subset \mathrm{Y}$. De plus, le noyau N de T est de dimension finie, donc la suite décroissante de sous-espaces vectoriels $\mathrm{N} \cap \mathrm{T}^n(\mathrm{X})$ est stationnaire à partir d'un certain entier $k \geq 0$, d'où résulte que $\mathrm{N} \cap \mathrm{Y} = \mathrm{N} \cap \mathrm{T}^k(\mathrm{X})$. On en déduit que $\mathrm{N} \cap \mathrm{T}^k(\mathrm{X}) \subset \mathrm{Y}$. Si $y \in \mathrm{Y}$, on pourra écrire $y = \mathrm{T}^{k+n+1} x_n$ pour tout entier $n \geq 0$; posons $z_n = \mathrm{T}^{k+n} x_n$; alors $\mathrm{T} z_n = y$ pour tout $n \geq 0$, et $z_n \in \mathrm{T}^{k+n}(\mathrm{X})$; on a pour tout $p > 0$ que $z_0, z_p \in \mathrm{T}^k(\mathrm{X})$ et $z_0 - z_p \in \mathrm{N}$, donc $z_0 - z_p \in \mathrm{Y}$; on en déduit que $z_0 \in z_p + \mathrm{Y} \subset \mathrm{T}^{k+p}(\mathrm{X})$ pour tout p, donc $z_0 \in \mathrm{Y}$ et $y = \mathrm{T} z_0 \in \mathrm{T}(\mathrm{Y})$.

Exercice. Si T_1 et T_2 sont Fredholm, $\mathrm{T}_2 \circ \mathrm{T}_1$ est Fredholm et

$$\mathrm{ind}(\mathrm{T}_2 \circ \mathrm{T}_1) = \mathrm{ind}(\mathrm{T}_2) + \mathrm{ind}(\mathrm{T}_1).$$

Indication. Si $\mathrm{T}_1 \in \mathcal{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ est un plongement sur $\mathrm{X}_1 \subset \mathrm{X}$ et $\mathrm{T}_2 \in \mathcal{L}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ un plongement sur $\mathrm{Y}_1 \subset \mathrm{Y}$, considérer le sous-espace $\mathrm{Y}_2 = \mathrm{T}_1(\mathrm{X}_1) \cap \mathrm{Y}_1$ de Y, ainsi que son image inverse X_2 par T_1 ; compter les dimensions.

Lemme. *Soient* X *un espace de Banach complexe et* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$ *un opérateur de Fredholm ; si* 0 *appartient au bord du spectre de* T*, les noyaux et les images de* T^n *se stabilisent : il existe un entier* $k \geq 1$ *tel que* $\ker \mathrm{T}^k = \ker \mathrm{T}^{k+1}$, $\mathrm{T}^k(\mathrm{X}) = \mathrm{T}^{k+1}(\mathrm{X})$ *; de plus,*

$$\mathrm{X} = \ker \mathrm{T}^k \oplus \mathrm{T}^k(\mathrm{X}),$$

ces deux espaces étant stables par T*, et* $\dim \ker \mathrm{T}^k < +\infty$*. La valeur* 0 *est valeur propre de* T*, et elle est isolée dans le spectre de* T*.*

Preuve. Puisque 0 est dans le bord du spectre, T est limite d'opérateurs inversibles, qui sont Fredholm d'indice nul, donc $\mathrm{ind}(\mathrm{T}) = 0$. Le noyau de T n'est pas nul, sinon T serait un isomorphisme. On sait que T est un presque-plongement ; l'espace Y du lemme précédent est invariant par T, et la restriction V_0 de T à Y est Fredholm, d'indice ≥ 0 : en effet son noyau $\mathrm{Y} \cap \ker \mathrm{T}$ est de dimension finie, et V_0 est surjectif par le lemme précédent ; pour λ proche de 0, l'opérateur $\mathrm{V}_\lambda = \mathrm{V}_0 - \lambda \, \mathrm{Id}_\mathrm{Y}$ est Fredholm, et d'indice ≤ 0 quand $\lambda \in \rho(\mathrm{T})$ (V_λ est injectif car $\mathrm{T} - \lambda \, \mathrm{Id}$ est inversible). Pour $\lambda = 0$ il est d'indice ≥ 0, donc V_λ est d'indice nul dans un voisinage de 0 ; il en résulte que V_0 est injectif, c'est-à-dire que $\mathrm{N} \cap \mathrm{Y} = \{0\}$, donc $\mathrm{N} \cap \mathrm{T}^k(\mathrm{X}) = \{0\}$ pour un certain k. On en déduit que la suite des noyaux est stationnaire : si $\mathrm{T}^{k+1} x = 0$, $\mathrm{T}^k x$ est à la fois dans N et dans $\mathrm{T}^k(\mathrm{X})$, donc $\mathrm{T}^k x = 0$. Comme chaque T^k est Fredholm d'indice 0 par l'exercice ci-dessus, les images se stabilisent au même moment, donc $\mathrm{Y} = \mathrm{T}^k(\mathrm{X})$.

L'espace X se décompose en $\mathrm{Y} = \mathrm{T}^k(\mathrm{X})$ et l'espace de dimension finie $\ker \mathrm{T}^k$: en effet, on peut considérer $\mathrm{Q} = \mathrm{W}^k \mathrm{T}^k$ où W est l'inverse de la restriction de T à Y, considérée comme application de Y dans X ; alors Q projette sur Y et son noyau est $\ker \mathrm{T}^k$. Il est clair que $\ker \mathrm{T}^k$ et $\mathrm{T}^k(\mathrm{X})$ sont stables par T, et la restriction T_2 de T au deuxième facteur $\mathrm{T}^k(\mathrm{X}) = \mathrm{Y}$ est un isomorphisme de Y sur Y ; il existe donc $\varepsilon_2 > 0$ tel que $\mathrm{T}_2 + \varepsilon \, \mathrm{Id}_\mathrm{Y}$ reste un isomorphisme de Y quand $|\varepsilon| < \varepsilon_2$. La restriction T_1 au premier facteur est un opérateur en dimension finie ; dans ce cas, il est toujours vrai qu'il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que $\mathrm{T}_1 + \varepsilon \, \mathrm{Id}$ soit inversible dès que $|\varepsilon| < \varepsilon_1$ **et** $\varepsilon \neq 0$. Il en résulte que $\mathrm{T} + \varepsilon \, \mathrm{Id}_\mathrm{X}$ est inversible quand $|\varepsilon| < \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ **et** $\varepsilon \neq 0$, ce qui montre que la valeur spectrale 0 est isolée dans $\mathrm{Sp}(\mathrm{T})$.

Théorème. *Soient* X *un espace de Banach complexe et* $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$ *un opérateur compact ; le spectre de* S *est fini, ou bien peut être rangé dans une suite* (λ_n) *tendant vers* 0. *Chaque valeur spectrale* $\lambda \neq 0$ *est une valeur propre de multiplicité finie, ce qui veut dire que l'opérateur* $\mathrm{T} = \lambda \, \mathrm{Id}_\mathrm{X} - \mathrm{S}$ *admet la décomposition du lemme précédent.*

Preuve. Si $\mathrm{Sp}(\mathrm{S}) = \{0\}$ il n'y a rien à démontrer. Sinon, soit $\lambda \neq 0$ un point frontière du spectre de S ; alors $\mathrm{T} = \lambda \, \mathrm{Id}_\mathrm{X} - \mathrm{S}$ est Fredholm, et $0 \in \partial \, \mathrm{Sp}(\mathrm{T})$. D'après le lemme précédent, λ est isolé dans le spectre de S. Puisque tous les points frontière non nuls sont isolés, il en résulte que tous les points non nuls du spectre de S sont isolés (voir plus loin). Le spectre de S n'a donc qu'un nombre fini de points dans toute couronne compacte $\{r \le |z| \le \mathrm{R}\}$ telle que $r > 0$, ce qui permet de les ranger s'il y a lieu dans une suite qui tend vers 0. Les propriétés de chaque valeur spectrale sont données par le lemme précédent, appliqué à $\mathrm{T} = \lambda \, \mathrm{Id}_\mathrm{X} - \mathrm{S}$.

Justifions l'affirmation topologique précédente : les points non isolés du spectre forment un compact $\mathrm{K} \subset \mathrm{Sp}(\mathrm{S})$; si K est vide, il n'y a rien à montrer, sinon soit μ un point de K de module maximal ; le point μ ne peut pas être intérieur au spectre, sinon tout un voisinage de μ dans $\mathbb{C}$ serait formé de points du spectre, donc des points non isolés, et il existerait parmi eux des $\mu_1 \in \mathrm{K}$ de module plus grand que $|\mu|$. Ainsi $\mu \in \partial \, \mathrm{Sp}(\mathrm{S})$, et donc $\mu = 0$, sinon μ serait isolé d'après l'argument du paragraphe précédent. Puisque $\mu = 0$, on a bien montré que tous les $\lambda \neq 0$ du spectre de S sont isolés dans le spectre.