4. Calcul fonctionnel continu

L'un des objectifs du chapitre est de construire un homomorphisme isométrique φ_{T} de $\mathrm{C}(\mathrm{Sp}(\mathrm{T}))$ dans $\mathcal{L}(\mathrm{H})$ lorsque T est un opérateur hermitien (borné) sur un espace de Hilbert complexe H. En réalité, le travail pourra être effectué dans une C*-algèbre A. Le gain de généralité est un peu illusoire, mais les notations sont un peu plus légères dans ce cadre abstrait.

Calcul fonctionnel polynomial

Cette section est de nature purement algébrique. On considère d'abord une algèbre unitaire A sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (quand on en viendra aux questions de spectre, on imposera $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ comme d'habitude). Soient

$$\mathrm{P} = c_0 + c_1\mathrm{X} + \cdots + c_n\mathrm{X}^n$$

un polynôme de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et $a \in \mathrm{A}$; on pose

$$\varphi_a(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(a) = c_0 1_{\mathrm{A}} + c_1 a + \cdots + c_n a^n \in \mathrm{A}.$$

Il est évident que $(\mathrm{P}+\mathrm{Q})(a) = \mathrm{P}(a)+\mathrm{Q}(a)$ et $(\lambda\mathrm{P})(a) = \lambda\mathrm{P}(a)$; l'application φ_a est donc linéaire ; si $\mathrm{Q} = \mathrm{X}^k$ on vérifie que $(\mathrm{PQ})(a) = \mathrm{P}(a)\mathrm{Q}(a)$ et on en déduit le cas général en décomposant Q en combinaison linéaire de monômes. On a obtenu :

Proposition. *Soient* A *une algèbre de Banach unitaire et* $a \in \mathrm{A}$ *; il existe un unique homomorphisme d'algèbres unitaires* φ_a *de* $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ *dans* A *tel que* $\varphi_a(\mathrm{X}) = a$ *; cet homomorphisme est donné par* $\varphi_a(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(a)$.

Remarque. Si P et Q sont deux polynômes, on a $\mathrm{P}(a)\mathrm{Q}(a) = (\mathrm{PQ})(a) = (\mathrm{QP})(a) = \mathrm{Q}(a)\mathrm{P}(a)$: tous les éléments de la forme $\mathrm{P}(a)$ commutent (pour a fixé). Si $ab = ba$, on en déduit que $\mathrm{P}(a)b = b\mathrm{P}(a)$, puis $\mathrm{P}(a)\mathrm{Q}(b) = \mathrm{Q}(b)\mathrm{P}(a)$.

Lemme. *Si* $a_1\, a_2 = a_2\, a_1$ *est inversible dans* A, *alors* a_1 *est inversible dans* A.

Preuve. Il existe un élément c tel que $c(a_1a_2) = 1_{\mathrm{A}} = (a_1a_2)c$; on voit que a_1 est inversible à gauche et à droite : $1_{\mathrm{A}} = a_1(a_2c)$ et $1_{\mathrm{A}} = c(a_1a_2) = (ca_2)a_1$; en évaluant $(ca_2)a_1(a_2c)$ de deux façons, on trouve que

$$a_2c = (ca_2a_1)(a_2c) = (ca_2)(a_1a_2c) = ca_2.$$

On en déduit que $a_2c = ca_2$ est l'inverse de a_1.

Corollaire. *Si* $\lambda, \mu_1, \ldots, \mu_k \in \mathbb{K}$ *et si l'élément* $\lambda\,(a - \mu_1 1_{\mathrm{A}}) \ldots (a - \mu_k 1_{\mathrm{A}})$ *est inversible dans* A, *alors chaque* $a - \mu_j 1_{\mathrm{A}}$ *est inversible, pour* $j = 1, \ldots, k$.

Preuve. Montrons le pour $a - \mu_1 1_{\mathrm{A}}$ pour simplifier l'écriture ; considérons le produit $a_2 = \lambda(a - \mu_2 1_{\mathrm{A}}) \ldots (a - \mu_k 1_{\mathrm{A}})$; alors $a_1 = a - \mu_1 1_{\mathrm{A}}$ et a_2 commutent, et $a_1 a_2$ est inversible, donc a_1 est inversible.

Théorème 4.1. Petit théorème spectral. *Soit* A *une algèbre de Banach unitaire* complexe *; pour tout* $a \in \mathrm{A}$ *et tout polynôme* $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$, *on a*

$$\mathrm{Sp}(\mathrm{P}(a)) = \mathrm{P}(\mathrm{Sp}(a)).$$

Preuve. Posons $\mathrm{K} = \mathrm{Sp}(a)$; il suffit de montrer que pour tout polynôme Q, l'élément $\mathrm{Q}(a)$ est inversible dans A si et seulement si $0 \notin \mathrm{Q}(\mathrm{K})$; le cas général est obtenu en considérant les polynômes $\mathrm{Q} = \mathrm{P} - \lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Supposons Q non constant (ce cas particulier est évident). Puisqu'on est sur $\mathbb{C}$, on peut factoriser le polynôme Q sous la forme

$$\mathrm{Q} = c \prod_{i=1}^{k} (\mathrm{X} - \mu_i)$$

avec c scalaire $\neq 0$ et $k = \deg \mathrm{P} \geq 1$. Supposons d'abord que $0 \notin \mathrm{Q}(\mathrm{K})$, c'est-à-dire que Q ne s'annule pas sur K ; alors les racines μ_i sont en dehors de K, donc chaque $a - \mu_i 1_{\mathrm{A}}$ est inversible, donc $\mathrm{Q}(a) = c \prod_{i=1}^{k} (a - \mu_i 1_{\mathrm{A}})$ est inversible.

Si $0 \in \mathrm{Q}(\mathrm{Sp}(a))$, c'est que l'une des racines μ_j est dans $\mathrm{Sp}(a)$, par exemple μ_1 ; alors $a - \mu_1 1_{\mathrm{A}}$ est non inversible, donc $\mathrm{Q}(a) = c \prod_{i=1}^{k} (a - \mu_i 1_{\mathrm{A}})$ est non inversible d'après le corollaire qui précède.

Exemples.

1. S'il existe une base orthonormée $(e_i)_{i \in \mathrm{I}}$ d'un Hilbert H réel ou complexe et un opérateur borné $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ tels que $\mathrm{T}(e_i) = \lambda_i e_i$ pour tout $i \in \mathrm{I}$ (l'opérateur T est *diagonal* dans la base (e_i)), il est facile de voir que pour tout polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ l'opérateur $\mathrm{P}(\mathrm{T})$ est l'opérateur diagonal dont les coefficients diagonaux sont les $\mathrm{P}(\lambda_i)$.

2. Si on considère sur $\mathrm{H} = \mathrm{L}_2(0, 1)$ l'opérateur M_f de multiplication par une fonction $f \in \mathrm{L}_\infty(0, 1)$, on voit que l'opérateur $\mathrm{P}(\mathrm{M}_f)$ est l'opérateur de multiplication par la fonction $t \in [0, 1] \to \mathrm{P}(f(t))$, c'est-à-dire la multiplication par la fonction $\widetilde{\mathrm{P}} \circ f$, où $\widetilde{\mathrm{P}}$ désigne la fonction polynomiale $z \in \mathbb{C} \to \mathrm{P}(z)$.

Remarque. On peut aussi définir un calcul fonctionnel pour les fractions rationnelles. C'est très facile à partir du cas polynomial. Si $\mathrm{Q} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ ne s'annule pas sur $\mathrm{Sp}(a)$, l'élément $\mathrm{Q}(a)$ est inversible. Si $\mathrm{F} = \mathrm{P}/\mathrm{Q}$ est une fraction rationnelle, il est raisonnable de définir $\mathrm{F}(a) = \mathrm{P}(a)\mathrm{Q}(a)^{-1} = \mathrm{Q}(a)^{-1}\mathrm{P}(a)$ (on a vu que $\mathrm{P}(a)$ et $\mathrm{Q}(a)$ commutent ; il en résulte immédiatement que $\mathrm{P}(a)$ commute avec $\mathrm{Q}(a)^{-1}$). On montre facilement que le résultat ne dépend pas de la représentation particulière de la fraction rationnelle F.

Calcul fonctionnel continu pour les éléments hermitiens

Soient A une C^*-algèbre et $a \in \mathrm{A}$; on a $(a^k)^* = (a^*)^k$ pour tout entier $k \geq 0$. Si $\mathrm{P} = \sum_{j=0}^{n} c_j \mathrm{X}^j$ est un polynôme à coefficients complexes, on peut considérer le polynôme $\mathrm{P}^* = \sum_{j=0}^{n} \overline{c}_j\, \mathrm{X}^j$ dont les coefficients sont les complexes conjugués des coefficients de P ; alors

$$(\mathrm{P}(a))^* = \Big(\sum_{j=0}^{n} c_k a^k \Big)^* = \sum_{j=0}^{n} \overline{c}_k (a^*)^k = \mathrm{P}^*(a^*)$$

ce qui montre que l'adjoint de $\mathrm{P}(a)$ est $\mathrm{P}^*(a^*)$. On notera que la fonction polynomiale $z \in \mathbb{C} \to \mathrm{P}^*(z)$ **n'est pas** la fonction complexe conjuguée de la fonction $z \to \mathrm{P}(z)$; on a en fait $\mathrm{P}^*(\overline{z}) = \overline{\mathrm{P}(z)}$.

Si a est normal, $\mathrm{P}(a)$ est normal : en effet, a^* commute avec $\mathrm{P}(a)$ puisque a^* commute avec a, puis $\mathrm{P}^*(a^*)$ commute avec $\mathrm{P}(a)$ pour la même raison. Si a est hermitien et si P est un polynôme à coefficients réels, alors $\mathrm{P}(a)$ est hermitien. Le résultat essentiel pour la suite est le suivant. Pour essayer d'être le plus clair possible, on distinguera la fonction polynomiale $\widetilde{\mathrm{P}} : t \to \mathrm{P}(t)$ du polynôme formel P.

Lemme 4.2. *Si* A *est une* C^**-algèbre et si* $a \in \mathrm{A}$ *est normal, on a*

$$\|\mathrm{P}(a)\| = \|\widetilde{\mathrm{P}}\|_{\mathrm{C}(\mathrm{Sp}(a))} = \max\{|\mathrm{P}(\lambda)| : \lambda \in \mathrm{Sp}(a)\}$$

pour tout polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$.

Preuve. Soit $\mathrm{K} = \mathrm{Sp}(a)$; on a vu dans le théorème 4.1 que le spectre de $\mathrm{P}(a)$ est $\mathrm{P}(\mathrm{K})$. Par ailleurs $\mathrm{P}(a)$ est normal, donc

$$\|\mathrm{P}(a)\| = r(\mathrm{P}(a)) = \max\{|z| : z \in \mathrm{Sp}(\mathrm{P}(a))\} = \max\{|\mathrm{P}(\lambda)| : \lambda \in \mathrm{K}\}.$$

Remarque. Le résultat précédent est à peu près évident lorsque $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ est normal et compact. Dans ce cas, il existe une base hilbertienne $(e_i)_{i\in\mathrm{I}}$ de H telle que $\mathrm{T}(e_i) = \lambda_i e_i$ pour tout i, et de plus pour tout $\varepsilon > 0$ il n'existe qu'un nombre fini d'indices $i \in \mathrm{I}$ tels que $|\lambda_i| \geq \varepsilon$. Supposons I infini dénombrable pour fixer les idées. L'opérateur $\mathrm{P}(\mathrm{T})$ est l'opérateur diagonal dont les coefficients diagonaux sont les $\mathrm{P}(\lambda_i)$, la norme de $\mathrm{P}(\mathrm{T})$ est donc le sup des $|\mathrm{P}(\lambda_i)|$, qui est majoré par le sup de $|\mathrm{P}|$ sur le spectre K de T puisque chaque λ_i est dans le spectre. Inversement, si λ est dans le spectre de T, ou bien λ est valeur propre de T, et λ est l'un des λ_i, donc $\|\mathrm{P}(\mathrm{T})\| \geq \|\mathrm{P}(\mathrm{T})(e_i)\| = |\mathrm{P}(\lambda_i)| = |\mathrm{P}(\lambda)|$, ou bien $\lambda = 0$ est limite d'une suite de λ_i, ce qui conduit au même résultat puisque P définit une fonction continue sur K. On a donc bien $\|\mathrm{P}(\mathrm{T})\| = \|\mathrm{P}\|_{\mathrm{C}(\mathrm{K})}$.

Lemme. *Soient* K *un compact non vide ; les éléments non inversibles de* $\mathrm{C}(\mathrm{K})$ *sont exactement les dzt.*

Preuve. On la donnera dans le cas compact *métrique*. Supposons f non inversible dans $\mathrm{C}(\mathrm{K})$; on sait alors qu'il existe $s_0 \in \mathrm{K}$ tel que $f(s_0) = 0$; considérons le sous-ensemble ouvert $\mathrm{U}_n = \{s \in \mathrm{K} : |f(s)| < 2^{-n}\}$; cet ouvert contient s_0 ; soit h_n la fonction continue définie sur K par $h_n(s) = \mathrm{dist}(s, \mathrm{U}_n^c)$; cette fonction est non nulle, mais nulle en dehors de U_n ; si $g_n = \|h_n\|^{-1} h_n$, on a une fonction de norme 1 nulle en dehors de U_n, et on voit que $\|f g_n\| \leq 2^{-n}$, qui tend vers 0 ; on a montré que f est un dzt. Inversement, on sait que les dzt sont non inversibles.

Nous avons utilisé une distance pour construire une fonction continue non identiquement nulle, mais nulle en dehors d'un ouvert non vide donné : ce résultat est vrai pour tout compact, métrisable ou non.

Corollaire 4.3. *Pour tout homomorphisme isométrique* φ *de* $\mathrm{C}(\mathrm{K})$ *(complexe) dans une algèbre de Banach unitaire complexe* B*, on a*

$$\mathrm{Sp}(\varphi(f)) = \mathrm{Sp}(f) = f(\mathrm{K})$$

pour toute $f \in \mathrm{C}(\mathrm{K})$.

Passons au théorème sur le calcul fonctionnel continu. Si K est un compact de $\mathbb{C}$, on notera i_{K} la fonction $z \in \mathrm{K} \to z \in \mathbb{C}$; c'est la fonction polynomiale $\widetilde{\mathrm{P}}$ correspondant au monôme $\mathrm{P} = \mathrm{X}$.

Théorème 4.4. *Soient* A *une* C^**-algèbre,* a *un élément hermitien dans* A*, et posons* $\mathrm{K} = \mathrm{Sp}(a)$ *; il existe un et un seul homomorphisme d'algèbres de Banach unitaires complexes* $\varphi_a : \mathrm{C}(\mathrm{K}) \to \mathrm{A}$ *tel que* $\varphi_a(i_{\mathrm{K}}) = a$*.*

L'homomorphisme φ_a *est isométrique. Si on note* $f(a) = \varphi_a(f)$*, on a* $f(a)^* = \overline{f}(a)$ *et* $f(a)$ *commute avec tout élément* $b \in \mathrm{A}$ *qui commute avec* a *(donc* $f(a)$ *est normal), pour toute fonction* f *continue sur* K*. On a de plus*

$$\mathrm{Sp}(f(a)) = \mathrm{Sp}(f) = f(\mathrm{Sp}(a)).$$

Si f *est réelle continue sur* K *et* g *continue sur* $f(\mathrm{K})$*, on a* $(g \circ f)(a) = g(f(a))$*.*

Preuve. Pour chaque polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ désignons par $\widetilde{\mathrm{P}}$ la fonction de $\mathrm{C}(\mathrm{K})$ définie par $s \in \mathrm{K} \to \mathrm{P}(s)$. Désignons par $\mathcal{P}$ l'ensemble de toutes les fonctions polynomiales $\widetilde{\mathrm{P}}$, où P varie dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$. On a vu que $\mathrm{K} = \mathrm{Sp}(a)$ est contenu dans $\mathbb{R}$ quand a est hermitien ; ceci implique que les fonctions polynomiales à coefficients complexes sont uniformément denses dans l'espace $\mathrm{C}(\mathrm{K})$ d'après le théorème de Weierstrass, c'est-à-dire que $\mathcal{P}$ est dense dans $\mathrm{C}(\mathrm{K})$.

Montrons d'abord l'unicité de φ_a. Si φ est un homomorphisme d'algèbres unitaires de $\mathrm{C}(\mathrm{K})$ dans A tel que $\varphi(i_{\mathrm{K}}) = a$, on aura nécessairement par les propriétés d'homomorphisme que l'image de la fonction $\widetilde{\mathrm{P}}$ est égale à $\mathrm{P}(a)$: par définition, on a $\varphi(i_{\mathrm{K}}^0) = \varphi(1) = 1_{\mathrm{A}} = a^0$, et $\varphi(i_{\mathrm{K}}^k) = a^k$ pour tout $k \geq 1$ (la fonction i_{K}^k est la fonction monomiale $s \to s^k$) ; il en résulte puisque φ est de plus linéaire que pour toute fonction polynomiale $\widetilde{\mathrm{P}}$, on a $\varphi(\widetilde{\mathrm{P}}) = \mathrm{P}(a)$. Par conséquent, φ est uniquement déterminé sur $\mathcal{P}$. Comme un homomorphisme d'algèbres de Banach est continu par définition, et que $\mathcal{P}$ est dense dans $\mathrm{C}(\mathrm{K})$, il en résulte que φ, s'il existe, est uniquement défini sur $\mathrm{C}(\mathrm{K})$: si $(\widetilde{\mathrm{P}}_n)$ tend uniformément vers f sur K, on aura $\varphi(f) = \lim_n \varphi(\widetilde{\mathrm{P}}_n) = \lim_n \mathrm{P}_n(a)$.

Montrons maintenant l'existence, en commençant par la définition d'un homomorphisme ψ sur $\mathcal{P}$: pour toute $f \in \mathcal{P}$ l'élément $\psi(f)$ peut être défini de façon unique puisque si $f = \widetilde{\mathrm{P}}_1 = \widetilde{\mathrm{P}}_2$, on a

$$\|\mathrm{P}_1(a) - \mathrm{P}_2(a)\| = \|(\mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_2)(a)\| = \|\widetilde{\mathrm{P}}_1 - \widetilde{\mathrm{P}}_2\|_{\mathrm{C}(\mathrm{K})} = 0$$

d'après le lemme 4.2 (si le spectre K est un ensemble infini, la vérification précédente est inutile, puisque le polynôme formel $\mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_2$ sera nul s'il a une infinité de racines ; mais le spectre de a peut être un ensemble fini). On posera donc $\psi(f) = \mathrm{P}(a)$, où P est n'importe quel polynôme qui représente la fonction f sur K. De plus, on a $\|\psi(f)\| = \|f\|_{\mathrm{C}(\mathrm{K})}$.

L'ensemble $\mathcal{P}$ est dense dans $\mathrm{C}(\mathrm{K})$, et on a un homomorphisme isométrique ψ de $\mathcal{P}$ dans A ; il existe un prolongement unique φ_a de ψ en application linéaire continue de $\mathrm{C}(\mathrm{K})$ dans A. Posons $f(a) = \varphi_a(f)$ pour toute $f \in \mathrm{C}(\mathrm{K})$. Pour toute suite $(\widetilde{\mathrm{P}}_n)$ de fonctions polynomiales qui converge uniformément sur K vers la fonction f, la suite $(\mathrm{P}_n(a))$ tend en norme dans A vers $f(a)$, puisque φ_a est continu. Il en résulte par continuité de la norme que

$$\|f(a)\| = \lim_n \|\mathrm{P}_n(a)\| = \lim_n \|\widetilde{\mathrm{P}}_n\|_{\mathrm{C}(\mathrm{K})} = \|f\|_{\mathrm{C}(\mathrm{K})},$$

ce qui montre que l'application $\varphi_a : f \in \mathrm{C}(\mathrm{K}) \to f(a) \in \mathrm{A}$ est isométrique.

Par construction on a $\varphi_a(i_{\mathrm{K}}) = a$ puisque la fonction i_{K} correspond au monôme X dont l'image est a en calcul polynomial. Il reste à voir que φ_a est un homomorphisme. Si $(\widetilde{\mathrm{P}}_n)$ converge uniformément vers f sur K et $(\widetilde{\mathrm{Q}}_n)$ converge uniformément vers g sur K, alors $f(a)g(a) = \lim_n(\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n)(a) = (fg)(a)$ (utiliser la continuité du produit par rapport au couple de variables), donc φ_a est un homomorphisme d'algèbres de Banach unitaires complexes, isométrique. Il en résulte que $\operatorname{Sp} f(a) = f(\mathrm{K})$, d'après un principe général sur $\mathrm{C}(\mathrm{K})$ (corollaire 4.3).

Si $ba = ab$, on en déduit que $b\mathrm{P}_n(a) = \mathrm{P}_n(a)b$ pour tout n, donc $bf(a) = f(a)b$ par continuité du produit par b, à droite et à gauche. Ainsi $f(a)$ commute avec tout élément b qui commute avec a.

Posons $\chi(f) = \overline{f}(a)^*$ pour toute $f \in \mathrm{C}(\mathrm{K})$. On vérifie que χ est un homomorphisme d'algèbres de Banach unitaires de $\mathrm{C}(\mathrm{K})$ dans A, et $\chi(i_{\mathrm{K}}) = i_{\mathrm{K}}(a)$ (parce que $\mathrm{K} \subset \mathbb{R}$, on a $\overline{i_{\mathrm{K}}} = i_{\mathrm{K}}$) donc $\chi(i_{\mathrm{K}}) = a^* = a$ parce que a est hermitien. D'après l'unicité, on déduit $\chi = \varphi_a$, ce qui signifie que $\overline{f}(a) = f(a)^*$ pour toute $f \in \mathrm{C}(\mathrm{K})$. Il en résulte que $f(a)^*f(a) = (\overline{f}f)(a) = (f\overline{f})(a) = f(a)f(a)^*$ donc $f(a)$ est normal.

Supposons que f soit une fonction réelle continue sur $\mathrm{K} = \mathrm{Sp}(a)$. Alors $f(a)$ est hermitien puisque $f(a)^* = \overline{f}(a) = f(a)$, ce qui permet d'appliquer à $f(a)$ le calcul fonctionnel défini précédemment. L'ensemble $\mathrm{L} = f(\mathrm{K}) \subset \mathbb{R}$ est compact, et c'est le spectre de $f(a)$. L'application $g \in \mathrm{C}(\mathrm{L}) \to g \circ f \in \mathrm{C}(\mathrm{K})$ est un homomorphisme χ d'algèbres de $\mathrm{C}(\mathrm{L})$ dans $\mathrm{C}(\mathrm{K})$, qui transforme i_{L} en $f(a)$; d'après l'unicité, la composition $\varphi_a \circ \chi$ est égale à l'homomorphisme $\varphi_{f(a)}$ associé à l'opérateur hermitien $f(a)$. On a donc $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ pour toute fonction continue g sur L.

Exemples.

1. Supposons que T soit diagonal dans une base orthonormée, avec coefficients diagonaux (λ_n) réels ; l'opérateur T est alors hermitien. Pour toute fonction continue f définie sur $\mathbb{R}$, l'opérateur $f(\mathrm{T})$ est l'opérateur diagonal de coefficients $(f(\lambda_n))$; démonstration : passer à la limite à partir du cas polynomial.

2. Supposons que T soit l'opérateur $\mathrm{M}_\varphi : \mathrm{L}_2(0,1) \to \mathrm{L}_2(0,1)$ de multiplication par une fonction φ réelle continue. On voit que pour tout polynôme P l'opérateur $\mathrm{P}(\mathrm{M}_\varphi)$ est l'opérateur de multiplication par la fonction $s \in [0,1] \to \mathrm{P}(\varphi(t))$, donc à la limite $f(\mathrm{M}_\varphi)$ est l'opérateur de multiplication par $s \to f(\varphi(s))$, c'est-à-dire que $f(\mathrm{M}_\varphi) = \mathrm{M}_{f\circ\varphi}$. On peut aussi raisonner en disant que $f \to \mathrm{M}_{f\circ\varphi}$ est bien l'unique homomorphisme décrit dans le théorème 4.4.

Application aux hermitiens positifs. La racine carrée

Lemme 4.5. *Soient* A *une algèbre de Banach et* $a \in \mathrm{A}$ *un élément hermitien ; si le spectre de* a *est contenu dans* $[0,+\infty[$*, l'élément* a *peut s'écrire comme le carré d'un élément hermitien* b *à spectre positif*

$$a = b^2, \quad b^* = b, \quad \mathrm{Sp}(b) \subset [0,+\infty[.$$

Réciproquement, si $a = b^2$ *avec* b *hermitien, alors* a *est hermitien et* $\mathrm{Sp}(a) \subset [0,+\infty[$.

Preuve. Supposons que a soit hermitien et que son spectre $\mathrm{K} = \mathrm{Sp}(a)$ soit contenu dans $[0,+\infty[$; notons $f \in \mathrm{C}(\mathrm{K})$ l'application $t \to \sqrt{t}$; par le théorème 4.4, on a $b = f(a) = f(a)^*$, donc b est hermitien ; de plus $f^2 = i_{\mathrm{K}}$, donc $b^2 = f(a)^2 = a$. Inversement, on voit que b^2 est hermitien quand b est hermitien, et b^2 a un spectre positif (par calcul fonctionnel, ou calcul polynomial, qui se réduit ici à observer que

$$b^2 + s^2 1_{\mathrm{A}} = (b - \mathrm{i}s1_{\mathrm{A}})(b + \mathrm{i}s1_{\mathrm{A}})$$

est inversible quand s est réel).

Un élément hermitien de A dont le spectre est contenu dans $[0, +\infty[$ est appelé *positif*. Dans le cas particulier de la C*-algèbre $\mathcal{L}(\mathrm{H})$ des opérateurs sur un espace de Hilbert complexe H, la notion d'élément hermitien positif peut se décrire de plusieurs autres façons, dont une seule fait appel aux vecteurs de H, l'équivalence des trois autres étant valable dans toute C*-algèbre. Cependant, le passage du point (*ii*) ci-dessous aux autres points n'est pas évident dans le cas abstrait, et il est repoussé en appendice.

Théorème. *Soient* H *un espace de Hilbert complexe et* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *; les conditions suivantes sont équivalentes :*

(*i*) *l'opérateur* T *est hermitien et* $\langle \mathrm{T}(x), x\rangle$ *est réel* ≥ 0 *pour tout* $x \in \mathrm{H}$ *;*
(*ii*) *il existe* $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *tel que* $\mathrm{T} = \mathrm{S}^*\mathrm{S}$ *;*
(*iii*) *il existe* $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *tel que* $\mathrm{S} = \mathrm{S}^*$ *et* $\mathrm{T} = \mathrm{S}^2$ *;*
(*iv*) *l'opérateur* T *est hermitien et* $\mathrm{Sp}(\mathrm{T}) \subset [0, +\infty[$.

Preuve. On a vu au lemme 4.5 que l'équivalence de (*iii*) et (*iv*) est un fait général. L'implication (*iii*) $\Rightarrow$ (*ii*) est évidente. Supposons (*ii*) vérifiée ; l'opérateur $\mathrm{T} = \mathrm{S}^*\mathrm{S}$ est hermitien et on a

$$\langle \mathrm{S}^*\mathrm{S}(x), x\rangle = \langle \mathrm{S}(x), \mathrm{S}(x)\rangle \ge 0$$

pour tout $x \in \mathrm{H}$, donc (*ii*) $\Rightarrow$ (*i*). Enfin, on voit que (*i*) implique que $\mathrm{Sp}(\mathrm{T}) \subset [0, +\infty[$: tout élément λ du spectre de T est dans le bord de ce spectre, donc il existe une suite $(x_n) \subset \mathrm{H}$ de vecteurs de norme 1 telle que $\mathrm{T}x_n - \lambda x_n \to 0$, ce qui donne par produit scalaire

$$\langle \mathrm{T}x_n, x_n\rangle - \lambda\langle x_n, x_n\rangle = \langle \mathrm{T}x_n, x_n\rangle - \lambda \to 0,$$

donc $\lambda = \lim_n \langle \mathrm{T}x_n, x_n\rangle$ est ≥ 0.

On note $\mathcal{L}(\mathrm{H})_+$ l'ensemble des éléments positifs de $\mathcal{L}(\mathrm{H})$. Pour $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})_+$ et $\alpha > 0$, on pose $\mathrm{T}^\alpha = f(\mathrm{T})$, où $f \in \mathrm{C}_{\mathbb{R}}(\mathrm{Sp}(\mathrm{T}))$ est l'application $t \to t^\alpha$. Pour $\alpha, \beta > 0$ on a $\mathrm{T}^{\alpha+\beta} = \mathrm{T}^\alpha\mathrm{T}^\beta$ et, par la dernière partie du théorème 4.4, on a $(\mathrm{T}^\alpha)^\beta = \mathrm{T}^{\alpha\beta}$. Le cas le plus important de cette construction est le cas $\alpha = 1/2$, mais l'unicité démontrée ci-dessous pour la racine carrée se généralise.

Proposition. *Pour* $a \in \mathrm{A}$ *hermitien et positif, il existe un et seul* $b \in \mathrm{A}$ *hermitien et positif tel que* $b^2 = a$.

Preuve. On a déjà vu au lemme 4.5 l'existence d'une racine hermitienne positive, passons maintenant à la démonstration de l'unicité. Soit b un élément hermitien positif tel que $b^2 = a$; considérons le spectre $\mathrm{K} = \mathrm{Sp}(b) \subset [0, +\infty[$, et considérons sur K la fonction $f : s \to s^2$, puis sur $\mathrm{L} = f(\mathrm{K}) \subset [0, +\infty[$ la fonction g définie par $g(t) = \sqrt{t}$. On notera que $\mathrm{L} = \mathrm{Sp}\, f(b) = \mathrm{Sp}(a)$ par le théorème spectral. Du fait que $\mathrm{K} \subset [0, +\infty[$, on vérifie que $g(f(s)) = \sqrt{s^2} = s$ pour tout $s \in \mathrm{K}$, donc le résultat de composition nous donne, puisque $g \circ f = i_{\mathrm{K}}$

$$b = (g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(b^2) = g(a) = \sqrt{a}.$$

Bien entendu il n'y a pas unicité si on ne demande pas que la racine soit positive : il suffit de considérer $-\sqrt{a}$ pour avoir une autre racine hermitienne.

Exemple. L'opérateur $\mathrm{P}^*\mathrm{P}$ est hermitien positif, et il associe à toute fonction f une fonction $g = \mathrm{P}^*\mathrm{P}f$ telle que $g'' = -g$; l'action de $\mathrm{P}^*\mathrm{P}$ est donc une double intégration (au signe près). Il existe un opérateur T sur $\mathrm{L}_2(0,1)$ qui est la racine carrée de $\mathrm{P}^*\mathrm{P}$; on peut imaginer que son action ressemble à *une* intégration, mais ce n'est en tout cas pas l'action de primitive ordinaire. De plus cet opérateur n'est pas évident à expliciter, par exemple sous la forme d'un opérateur à noyau ; on sait pourtant que $\sqrt{\mathrm{P}^*\mathrm{P}}$ est de Hilbert-Schmidt, car ses valeurs propres, racines de celles de $\mathrm{P}^*\mathrm{P}$, sont de carré sommable (mais pas sommables, elles décroissent en $1/n$).

Certains exemples se décrivent avec la transformation de Fourier ; sur $\mathbb{R}$, l'opérateur qui associe à une fonction φ de classe C^∞ et à support compact la fonction $\mathrm{T}\varphi = -\varphi''+\varphi$ se décrit du côté Fourier par

$$\widehat{(\mathrm{T}\varphi)}(t) = (1+|t|^2)\,\widehat{\varphi}(t).$$

Cet opérateur n'est pas défini sur $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$, mais il est facile de concevoir un inverse borné S pour T, agissant par

$$\widehat{(\mathrm{S}f)}(t) = (1+|t|^2)^{-1}\widehat{f}(t)$$

de $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$. Il est facile de voir que S est hermitien positif, et sa racine agit sur $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$ par

$$\widehat{(\sqrt{\mathrm{S}}\,f)}(t) = (1+|t|^2)^{-1/2}\widehat{f}(t).$$

Décomposition polaire

Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H}_1,\mathrm{H}_2)$; on appelle *module* de T et on note $|\mathrm{T}|$ l'unique $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\mathrm{H}_1)_+$ tel que $\mathrm{S}^2 = \mathrm{T}^*\mathrm{T}$, c'est-à-dire que $|\mathrm{T}| = \sqrt{\mathrm{T}^*\mathrm{T}}$.

Proposition. *Soient* H_1 *et* H_2 *deux espaces de Hilbert et* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H}_1,\mathrm{H}_2)$ *; il existe un et un seul* $u \in \mathcal{L}(\mathrm{H}_1,\mathrm{H}_2)$, *nul sur* $\ker(\mathrm{T})$ *tel que* $\mathrm{T} = u\,|\mathrm{T}|$.

Preuve. Pour tout $x \in \mathrm{H}_1$ on a

$$\|\mathrm{T}(x)\|^2 = \langle \mathrm{T}^*\mathrm{T}(x), x\rangle = \langle |\mathrm{T}|^2(x), x\rangle = \big\|\,|\mathrm{T}|\,(x)\big\|^2\,;$$

en particulier, $\ker(\mathrm{T}) = \ker(|\mathrm{T}|)$; l'adhérence G de l'image de $|\mathrm{T}|$ est l'orthogonal de $\ker(\mathrm{T})$, et on a $\mathrm{H}_1 = \mathrm{G}\oplus\ker(\mathrm{T})$, somme directe orthogonale. On va expliquer la construction de u_0, restriction de u au morceau G. Tout d'abord, si $y = |\mathrm{T}|(x) \in \mathrm{im}(|\mathrm{T}|)$, nous devons nécessairement poser $u_0(y) = \mathrm{T}(x)$ pour réaliser la factorisation voulue. Notons que si $y = |\mathrm{T}|(x')$ est une autre représentation de y, on aura $x' - x \in \ker(|\mathrm{T}|) = \ker(\mathrm{T})$, donc $\mathrm{T}(x') = \mathrm{T}(x)$. Cela montre que l'on peut légitimement poser $u_0(y) = \mathrm{T}(x)$, pour tout y dans l'image de $|\mathrm{T}|$, où x est n'importe quel vecteur tel que $|\mathrm{T}|(x) = y$.

On remarque ensuite que $\|u_0(y)\| = \|\mathrm{T}(x)\| = \|\,|\mathrm{T}|(x)\,\| = \|y\|$, c'est-à-dire que u_0 est une isométrie de $\mathrm{im}(|\mathrm{T}|)$ dans H_1. Puisque H_1 est complet, cette isométrie se prolonge en isométrie $\overline{u}_0$ de l'adhérence G, à valeurs dans H_1. Posons pour finir, si $x = y+z$, avec $y \in \mathrm{G}$ et $z \in \ker(\mathrm{T})$

$$u(x) = \overline{u}_0(y)$$

c'est-à-dire $u = \overline{u}_0 \circ \mathrm{P}_\mathrm{G}$. On vérifie que $u \circ |\mathrm{T}| = \mathrm{T}$, u nulle sur $\ker(\mathrm{T})$ et que $\|u\| \le 1$.

Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$; on appelle *phase* de T l'unique $u \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ nul sur $\ker(T)$ tel que $T = u\,|T|$. La décomposition $T = u\,|T|$ s'appelle *décomposition polaire* de T.

Remarque. *Si* T *est injectif,* u *est isométrique. Si* T *est injectif à image dense,* u *est unitaire.*
En effet, G est égal à H_1 lorsque $\ker(|T|) = \ker(T) = \{0\}$, donc $u = \overline{u}_0$ dans ce cas. De plus, l'image de u contient l'image de T d'après la factorisation ; si T est injectif à image dense, u est une isométrie à image dense, donc surjective, donc unitaire.

Proposition. *Soient* H_1 *et* H_2 *deux espaces de Hilbert et soit* $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ *; notons* $T = u\,|T|$ *sa décomposition polaire.*

(*i*) *On a* $u^*\,T = |T|$ *; de plus,* u^*u *et* uu^* *sont les projecteurs orthogonaux sur l'orthogonal du noyau de* T *et sur l'adhérence de l'image de* T *respectivement.*

(*ii*) *Le module de* T^* *est* $u\,|T|\,u^* = u\,T^* = T\,u^*$ *; sa phase est* u^*.

Preuve. Puisque u est nul sur $\ker(T)$, on en déduit que $\mathrm{im}(u^*)$ est orthogonale à $\ker(T)$, c'est-à-dire $\mathrm{im}(u^*) \subset G$, où G est l'adhérence de $\mathrm{im}(|T|)$. On a vu que u est isométrique sur G ; il en résulte que $\langle u^*u(y), y\rangle = \|u(y)\|^2 = \langle y, y\rangle$ pour tout $y \in G$; par polarisation, on obtient $\langle u^*u(y_1), y_2\rangle = \langle y_1, y_2\rangle$ pour tous $y_1, y_2 \in G$, et comme $u^*u(y_1) \in G$ on en déduit que $u^*u_{|G} = \mathrm{Id}_G$; puisque u^*u est nul sur l'orthogonal de G, on en déduit que $u^*u = \pi_G$.

On a en particulier $u^*u|T| = |T|$, donc $u^*T = |T|$ et

$$TT^* = u|T|\,|T|u^* = (u|T|u^*)(u|T|u^*).$$

L'opérateur $u|T|u^*$ est hermitien positif et son carré est TT^* : il est donc égal à $|T^*|$. De plus, la relation $u^*|T^*| = u^*u|T|u^* = |T|u^* = T^*$ montre que u^* est la phase de T^*. En appliquant à T^* ce qu'on a vu pour T, on voit que uu^* est la projection orthogonale sur l'orthogonal du noyau de T^*, c'est-à-dire la projection orthogonale sur l'adhérence de l'image de T.

Remarque. On déduit aisément des calculs ci-dessus les identités suivantes :

$$T = u|T| = |T^*|u = uT^*u, \quad |T| = u^*T = T^*u = u^*|T^*|u,$$

$$T^* = u^*|T^*| = |T|u^* = u^*Tu^*, \quad |T^*| = u|T|u^* = Tu^* = uT^*.$$

En particulier T^* et $|T|$ ont même image et u est un isomorphisme de l'image de T^* sur celle de T.

Le cas général : opérateurs normaux

Il n'y a pas de raison de s'arrêter aux opérateurs hermitiens pour le calcul fonctionnel continu. Ce n'est qu'un cas particulier des opérateurs normaux, et la théorie du calcul fonctionnel continu se généralise dans son bon cadre à ces opérateurs. Il y a cependant des difficultés supplémentaires.

Dans deux cas particuliers de calcul fonctionnel, l'opérateur adjoint a^* est directement une fonction de a : trivialement dans le cas hermitien, puisqu'alors $a^* = a$, mais aussi dans le cas unitaire où $a^* = a^{-1}$. Notons comme d'habitude $K = \mathrm{Sp}(a)$; on voit clairement de quelle fonction de $\mathrm{C(K)}$ l'opérateur a^* doit être l'image par φ_a dans ces deux cas : c'est $i_\mathrm{K} = \overline{i_\mathrm{K}}$ dans le cas hermitien et $i_\mathrm{K}^{-1} = \overline{i_\mathrm{K}}$ dans le cas unitaire. Cela ne sera plus si clair dans le cas général d'un opérateur normal, et on demandera explicitement que l'homomorphisme φ_a envoie la fonction $\overline{i_\mathrm{K}}$ sur a^*. On doit noter que dans le cas normal, le spectre K peut être n'importe quel compact non vide du plan complexe.

Il faut aussi généraliser les fonctions polynomiales : si la fonction i_K est envoyée sur a et la fonction $\overline{i_\mathrm{K}}$ sur a^*, alors l'image de $i_\mathrm{K}\overline{i_\mathrm{K}}$ doit être aa^* ; dans le cas hermitien ou unitaire, la fonction $i_\mathrm{K}\overline{i_\mathrm{K}}$ s'exprime à partir d'un polynôme en i_K (i_K^2 dans le cas hermitien et 1 dans le cas unitaire) ; ceci n'est plus vrai maintenant, et la fonction $i_\mathrm{K}\overline{i_\mathrm{K}}$ est une nouvelle fonction qui doit être gardée dans notre algèbre de “polynômes” ; bien sûr le problème ne s'arrête pas là, et nous devons considérer $i_\mathrm{K}^p\,\overline{i_\mathrm{K}}^q$ pour tous les entiers $p, q \ge 0$. Nous allons donc considérer l'algèbre $\mathbb{C}[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]$ des polynômes en deux variables, puis prendre l'ensemble des fonctions sur $\mathrm{K} = \mathrm{Sp}(a)$ obtenues en remplaçant X par i_K et Y par $\overline{i_\mathrm{K}}$. Notre algèbre de base $\mathcal{P}_2$ qui remplacera l'algèbre $\mathcal{P}$ des fonctions polynomiales d'une variable sera l'algèbre de toutes les fonctions f sur K de la forme

$$\forall z \in \mathrm{K}, \quad f(z) = \sum_{p,q=0}^{\mathrm{N}} c_{p,q} z^p\, \overline{z}^q = \mathrm{P}(z, \overline{z})$$

avec $c_{p,q} \in \mathbb{C}$, où N varie dans $\mathbb{N}$, et où $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]$ est le polynôme de deux variables

$$\mathrm{P} = \sum_{p,q=0}^{\mathrm{N}} c_{p,q} \mathrm{X}^p\, \mathrm{Y}^q.$$

On a envie de poser ensuite

$$f(a) = \sum_{p,q=0}^{\mathrm{N}} c_{p,q} a^p\, (a^*)^q,$$

mais on n'est pas encore sûr que l'opérateur ainsi écrit ne dépend que de la fonction f sur K. La stratégie de démonstration sera toujours la même : l'algèbre $\mathcal{P}_2$ considérée est dense dans $\mathrm{C(K)}$ par Stone-Weierstrass (facile), et l'application que nous avons en tête sera isométrique. On va commencer par rassembler quelques faits assez faciles.

Lemme 4.6. *Soit* A *une* C^**-algèbre ; pour tous* $a, x \in \mathrm{A}$ *on a*

$$\|ax\| \le \|x\|^{1/2} \|a^*ax\|^{1/2}.$$

En conséquence, on a $\|ax\|^2 \le \|a^*ax\|$ *si* x *est de norme* ≤ 1*. Si* $a \in \mathrm{A}$ *est normal on a*

$$\|ax\| = \|a^*x\|$$

pour tout $x \in \mathrm{A}$*. En conséquence,* $\|ax - \lambda x\| = \|a^*x - \overline{\lambda}x\|$ *quand* a *est normal.*

Preuve. On a toujours

$$\|ax\|^2 = \|x^*a^*ax\| \le \|x^*\|\, \|a^*ax\| = \|x\|\, \|a^*ax\|,$$

et quand a est de plus normal,

$$\|ax\|^2 = \|x^*a^*ax\| = \|x^*aa^*x\| = \|a^*x\|^2.$$

Corollaire. *Si a est normal et $\lambda \in \mathrm{Sp}(a)$, il existe une suite $(x_n) \subset \mathrm{A}$ d'éléments de norme* 1 *telle que*

$$ax_n - \lambda x_n \to 0, \quad a^* x_n - \overline{\lambda} x_n \to 0.$$

Preuve. Il suffit de le faire pour $\lambda = 0$, et d'appliquer ensuite le résultat à $a - \lambda 1_{\mathrm{A}}$. Si $0 \in \mathrm{Sp}(a)$, a n'est pas inversible, donc $b = a^* a = aa^*$ n'est pas inversible. On a donc $0 \in \mathrm{Sp}(b)$ et $\mathrm{Sp}(b) \subset \mathbb{R}$ puisque b est hermitien. Par conséquent $0 \in \partial\, \mathrm{Sp}(b)$ et il existe une suite (x_n) d'éléments de norme un telle que $\|a^* a x_n\| = \|b x_n\| \to 0$. D'après le lemme 4.6, on a aussi $\|a x_n\| \to 0$.

Lemme 4.7. *Soit c un élément hermitien non inversible d'une* C^**-algèbre* A *; pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un diviseur de zéro* algébrique *de la forme $f(c)$, tel que $\|f(c) - c\| \le \varepsilon$.*

Preuve. Soit g une fonction réelle continue sur $\mathbb{R}$ telle que $g(0) = 1$ et $g = 0$ en dehors de l'intervalle $[-\varepsilon, \varepsilon]$; posons $\mathrm{K} = \mathrm{Sp}(c) \subset \mathbb{R}$; puisque c n'est pas inversible, on a $0 \in \mathrm{K}$, donc $\|g\|_{\mathrm{C}(\mathrm{K})} \ge 1$. Soit ensuite f une fonction réelle continue sur $\mathbb{R}$, qui soit égale à 0 sur l'intervalle $[-\varepsilon, \varepsilon]$ et telle que $|f(t) - t| \le \varepsilon$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (par exemple, $f(t) = t - \varepsilon$ quand $t > \varepsilon$ et $f(t) = t + \varepsilon$ quand $t < -\varepsilon$) ; on a $f\,g = 0$, $\|f - i_{\mathrm{K}}\|_{\mathrm{C}(\mathrm{K})} \le \varepsilon$ et $\|g\|_{\mathrm{C}(\mathrm{K})} \ge 1$. En utilisant l'homomorphisme φ_c on voit que

$$f(c) g(c) = 0, \quad g(c) \ne 0, \quad \|f(c) - c\| \le \varepsilon.$$

Lemme 4.8. *Soient a, b deux éléments qui commutent, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ et (x_n) une suite d'éléments de norme* 1*, tels que*

$$ax_n - \lambda x_n \to 0, \quad bx_n - \mu x_n \to 0.$$

Alors

$$\mathrm{P}(a, b)\, x_n - \mathrm{P}(\lambda, \mu)\, x_n \to 0$$

pour tout polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]$.

Preuve. On voit d'abord que

$$abx_n - \lambda\mu x_n = b(a - \lambda x_n) + \lambda(bx_n - \mu x_n)$$

tend vers zéro ; on en déduit par itération que

$$a^k b^\ell x_n - \lambda^k \mu^\ell x_n \to 0$$

pour tous $k, \ell \in \mathbb{N}$; le résultat en découle immédiatement.

Supposons que a soit normal et $\lambda \in \mathrm{Sp}(a)$; on sait par le corollaire du lemme 4.6 qu'il existe une suite (x_n) d'éléments de norme 1 telle que

$$ax_n - \lambda x_n \to 0, \quad a^* x_n - \overline{\lambda} x_n \to 0.$$

Il en résulte que

$$\mathrm{P}(a, a^*)\, x_n - \mathrm{P}(\lambda, \overline{\lambda})\, x_n \to 0$$

ce qui montre que $\mathrm{P}(\lambda, \overline{\lambda})$ est dans le spectre de $\mathrm{P}(a, a^*)$,

$$\{\mathrm{P}(\lambda, \overline{\lambda}) : \lambda \in \mathrm{Sp}(a)\} \subset \mathrm{Sp}(\mathrm{P}(a, a^*)).$$

On en fait égalité de ces deux ensembles, comme on va le prouver maintenant.

Proposition 4.9. *Soient a un élément normal d'une* C^**-algèbre* A *et* P *un polynôme de deux variables ; on a*

$$\mathrm{Sp}(\mathrm{P}(a, a^*)) = \{\mathrm{P}(\lambda, \overline{\lambda}) : \lambda \in \mathrm{Sp}(a)\}.$$

Preuve. Posons $b = \mathrm{P}(a, a^*)$; il nous reste à montrer que tout élément $\mu \in \mathrm{Sp}(b)$ est de la forme $\mathrm{P}(\lambda, \overline{\lambda})$ pour un $\lambda \in \mathrm{Sp}(a)$. Expliquons d'abord l'idée de la preuve dans le cas de l'algèbre $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$: dans ce cas μ est une valeur propre de la matrice b, l'espace $\mathrm{X} = \ker(b - \mu\,\mathrm{Id}) \subset \mathbb{C}^n$ est différent de 0 et il est stable par a parce que $ab = ba$. La restriction de a à X admet un vecteur propre $x \in \mathrm{X}$, pour un certain $\lambda \in \mathrm{Sp}(a)$. On a donc $bx = \mu x$ et $ax = \lambda x$, $a^* x = \overline{\lambda} x$. Il en résulte que $bx = \mathrm{P}(a, a^*)\, x = \mathrm{P}(\lambda, \overline{\lambda})\, x$, donc $\mu = \mathrm{P}(\lambda, \overline{\lambda})$ puisque x est un vecteur non nul.

On voit que le point clé est de trouver un vecteur propre commun. Dans le cas général on essaiera de trouver des *presque-vecteurs propres* communs à a et b ; posons $c = (b^* - \overline{\mu} 1_{\mathrm{A}})(b - \mu 1_{\mathrm{A}})$; cet élément est hermitien non inversible ; d'après le lemme 4.7, il existe $f(c)$ proche de c, disons $\|f(c) - c\| \le \varepsilon^2$, tel que le sous-espace vectoriel fermé

$$\mathrm{X} = \{x \in \mathrm{A} : f(c)\, x = 0\}$$

soit différent de $\{0\}$, car $f(c)$ est diviseur de zéro. Puisque a commute avec c, il commute avec $f(c)$ et l'espace X est invariant par l'opérateur $\mathrm{M}_a \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$ de multiplication par a. Le spectre de M_a est non vide, donc on peut trouver $\lambda \in \partial\, \mathrm{Sp}(\mathrm{M}_a)$ et une suite (x_n) de vecteurs de norme un dans X telle que $ax_n - \lambda x_n \to 0$; on note que $\lambda \in \mathrm{Sp}(a)$. Alors

$$ax_n - \lambda x_n \to 0, \quad a^* x_n - \overline{\lambda} x_n \to 0,$$

donc

$$bx_n - \mathrm{P}(\lambda, \overline{\lambda})\, x_n = \mathrm{P}(a, a^*)\, x_n - \mathrm{P}(\lambda, \overline{\lambda})\, x_n \to 0.$$

Comme $\|c - f(c)\| \le \varepsilon^2$ et $f(c)x_n = 0$, on a aussi $\|cx_n\| \le \varepsilon^2$, donc $\|bx_n - \mu x_n\| \le \varepsilon$ par le lemme 4.6, et $|\mu - \mathrm{P}(\lambda, \overline{\lambda})| \le \varepsilon$ puisque x_n est de norme 1. Ceci prouve que la distance de μ au compact formé de tous les $\mathrm{P}(\lambda, \overline{\lambda})$, $\lambda \in \mathrm{Sp}(a)$, est nulle.

Avec cette proposition, on peut construire le calcul fonctionnel comme on l'a fait dans le cas hermitien.

Théorème 4.10. *Soit a un élément normal d'une* C^**-algèbre* A *; posons* $\mathrm{K} = \mathrm{Sp}(a)$ *; il existe un et un seul homomorphisme d'algèbres de Banach unitaires complexes* $\varphi_a : \mathrm{C}(\mathrm{K}) \to \mathrm{A}$ *tel que* $\varphi_a(i_{\mathrm{K}}) = a$ *et* $\varphi_a(\overline{i_{\mathrm{K}}}) = a^*$.

L'homomorphisme φ_a est isométrique. Si on note $f(a) = \varphi_a(f)$, on a $f(a)^* = \overline{f}(a)$ (donc $f(a)$ est normal) et $f(a)$ commute avec tout élément b qui commute avec a **et** *avec a^*. On a pour toute fonction f continue sur* $\mathrm{Sp}(a)$

$$\mathrm{Sp}(f(a)) = \mathrm{Sp}(f) = f(\mathrm{Sp}(a)).$$

Pour toute fonction continue f sur K *et toute fonction continue g sur $f(\mathrm{K})$, on a $g(f(a)) = (g \circ f)(a)$.*

Preuve. La démonstration est très semblable à celle du cas hermitien. Pour chaque polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]$, désignons par $\widetilde{\mathrm{P}}_{\mathrm{K}}$ la fonction $z \in \mathrm{K} \to \mathrm{P}(z, \overline{z})$, et désignons par $\mathcal{P}_2$ l'algèbre de toutes les fonctions sur K de la forme $\widetilde{\mathrm{P}}_{\mathrm{K}}$, lorsque P varie dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]$. On note tout d'abord que la nouvelle algèbre $\mathcal{P}_2$ formée de toutes ces fonctions $\widetilde{\mathrm{P}}_{\mathrm{K}}$ est dense dans C(K), par le théorème de Stone-Weierstrass.

Pour montrer d'abord l'unicité, considérons un homomorphisme d'algèbres φ qui ait les propriétés exigées ci-dessus. Comme on impose $\varphi(i_{\mathrm{K}}) = a$ et $\varphi(\overline{i_{\mathrm{K}}}) = a^*$, on aura $\varphi(i_{\mathrm{K}}^k \overline{i_{\mathrm{K}}}^\ell) = a^k (a^*)^\ell$, pour tous entiers $k, \ell \geq 0$ et comme toute fonction $\widetilde{\mathrm{P}}_{\mathrm{K}}$ est combinaison linéaire de fonctions $i_{\mathrm{K}}^k \overline{i_{\mathrm{K}}}^\ell$, on voit facilement que

$$\varphi(\widetilde{\mathrm{P}}) = \mathrm{P}(a, a^*)$$

pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]$, ce qui détermine complètement φ, à cause de la densité de $\mathcal{P}_2$ dans C(K).

Passons à l'existence ; on posera naturellement $\varphi_a(\widetilde{\mathrm{P}}_{\mathrm{K}}) = \mathrm{P}(a, a^*)$. Cette définition est correcte, car la proposition 4.9 montre que $\mathrm{P}(a, a^*)$ ne dépend que de la fonction $\widetilde{\mathrm{P}}_{\mathrm{K}} \in \mathrm{C}(\mathrm{K})$; on vérifie que φ_a est un homomorphisme d'algèbres sur $\mathcal{P}_2$. On applique la densité de la nouvelle algèbre $\mathcal{P}_2$ dans C(K), qui permet d'étendre la correspondance de $\mathcal{P}_2$ à C(K) ; on vérifie comme avant la propriété d'homomorphisme du prolongement. Expliquons la formule de composition. Posons $\mathrm{L} = f(\mathrm{K}) \subset \mathbb{C}$; on a un homomorphisme d'algèbres de Banach ψ de C(L) dans C(K) défini par $\psi(g) = g \circ f$ pour toute $g \in \mathrm{C}(\mathrm{L})$. Considérons l'homomorphisme $\varphi = \psi \circ \varphi_{\mathrm{T}}$, et cherchons les images de i_{L} et $\overline{i}_{\mathrm{L}}$. On voit que $\psi(i_{\mathrm{L}})(t) = i_{\mathrm{L}}(f(t)) = f(t)$ pour tout $t \in \mathrm{K}$, donc $\psi(i_{\mathrm{L}}) = f$, et $\psi(\overline{i}_{\mathrm{L}})(t) = \overline{f(t)}$, donc $\psi(\overline{i}_{\mathrm{L}}) = \overline{f}$. On a donc $\varphi(i_{\mathrm{L}}) = f(\mathrm{T})$ et $\varphi(\overline{i}_{\mathrm{L}}) = \overline{f}(\mathrm{T}) = (f(\mathrm{T}))^*$; d'après l'unicité, on en déduit que $\varphi = \varphi_{f(\mathrm{T})}$. On obtient donc $g(f(\mathrm{T})) = (g \circ f)(\mathrm{T})$.

Corollaire. *Soient* A *une* C^**-algèbre,* $a \in \mathrm{A}$ *un élément normal et* f *une fonction complexe continue sur* $\mathrm{Sp}(a)$ *; alors, si* $f(\mathrm{Sp}(a)) \subset \mathbb{R}$*,* $f(a)$ *est hermitien ; si de plus* $f(\mathrm{Sp}(a)) \subset \mathbb{R}_+$*,* $f(a)$ *est hermitien positif ; si* $f(\mathrm{Sp}(a)) \subset \mathbb{T}$*, alors* $f(a)$ *est unitaire.*

Preuve. Si $f = \overline{f}$, la fonction f est réelle sur $\mathrm{Sp}(a)$, on peut écrire $f(a)^* = \overline{f}(a) = f(a)$, qui est donc hermitien. Si de plus $f \geq 0$ sur K, on peut considérer $g(s) = \sqrt{f(s)}$ qui est une fonction réelle continue sur K ; alors $b = g(a)$ est hermitien et $f(a) = (g(a))^2$ est le carré d'un hermitien. Pour finir, supposons que $|f| = 1$ sur K et posons $u = f(a)$; on a $u^* u = \overline{f}(a) f(a) = (\overline{f} f)(a) = \varphi_a(\mathbf{1}) = 1_{\mathrm{A}}$, et le même calcul donne $u u^* = 1_{\mathrm{A}}$, donc u est unitaire.

Remarque. Les réciproques sont vraies par le théorème spectral : si $f(a)$ est hermitien, son spectre, égal à $f(\mathrm{Sp}(a))$, est réel, c'est-à-dire que f est réelle sur K, etc…

Exemples.

1. Supposons que u soit un élément unitaire de A tel que $-1 \notin \mathrm{Sp}(u)$. La fonction $f(z) = \mathrm{i}(z-1)/(z+1)$ est alors définie et continue sur $\mathrm{Sp}(u)$, et à valeurs réelles. Il en résulte que $f(u)$ est hermitien. L'élément $f(u)$ est égal à $\mathrm{i}(u - 1_{\mathrm{A}})(u + 1_{\mathrm{A}})^{-1}$.

Inversement, si a est hermitien, on peut considérer la fonction $g(t) = (\mathrm{i} + t)/(\mathrm{i} - t)$ qui envoie $\mathbb{R}$ dans le cercle unité de $\mathbb{C}$. L'élément $g(a) = (\mathrm{i} + a)(\mathrm{i} - a)^{-1}$ est unitaire.

2. Pour tout $s \in \mathbb{R}$ considérons la fonction f_s définie sur $\mathbb{R}$ par $f_s(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}st}$. Si $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ est hermitien, on peut considérer pour tout s l'opérateur $\mathrm{U}_s = f_s(\mathrm{T}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}s\mathrm{T}}$.

C'est un opérateur unitaire puisque f_s est à valeurs dans $\mathbb{T}$. De plus $f_{s_1} f_{s_2} = f_{s_1+s_2}$ pour tous s_1, s_2, donc $\mathrm{U}_{s_1} \mathrm{U}_{s_2} = \mathrm{U}_{s_1+s_2}$. On dit qu'on a un *groupe* d'opérateurs unitaires.

On peut montrer (théorème de Stone) une réciproque de ce fait, mais elle demande de considérer des opérateurs autoadjoints *non bornés*.

3. Soient T un opérateur normal sur H et F un sous-espace fermé de H, stable par T et par T^* ; alors la projection orthogonale $\mathrm{P_F}$ commute avec T et T^*, donc avec tout opérateur $f(\mathrm{T})$. Si S désigne la restriction de T à F, alors S est un opérateur normal sur F, et $\mathrm{Sp(S)} \subset \mathrm{Sp(T)}$; pour toute fonction continue f sur le spectre de T l'opérateur $f(\mathrm{S})$ est la restriction de $f(\mathrm{T})$ à F.

4. Soit T un opérateur normal sur H ; supposons que le spectre de T puisse être découpé en deux compacts de $\mathbb{C}$ disjoints, disons $\mathrm{Sp(T)} = \mathrm{K}_1 \cup \mathrm{K}_2$. Dans ce cas, la fonction f_1 qui est égale à 1 sur K_1 et à 0 sur K_2 est une fonction réelle continue sur Sp(T). Il en résulte que $\mathrm{P}_1 = f_1(\mathrm{T})$ est hermitien, et $\mathrm{P}_1^2 = \mathrm{P}_1$ puisque $f_1^2 = f_1$, donc P_1 est un projecteur orthogonal, qui commute avec T et avec T^*. On peut décomposer H en somme directe orthogonale $\mathrm{H}_1 \oplus \mathrm{H}_2$, où $\mathrm{H}_1 = \mathrm{P}_1(\mathrm{H})$; la restriction de T_1 à H_1 est un opérateur normal T_1 sur H_1 dont le spectre est égal à K_1 : si $\lambda \notin \mathrm{K}_1$, la fonction g définie par $g(z) = z - \lambda$ en tout point $z \in \mathrm{K}_1$ et $g(z) = 1$ pour tout $z \in \mathrm{K}_2$ est une fonction de C(Sp(T)), inversible dans cette algèbre, donc son image est un opérateur inversible dans $\mathcal{L}(\mathrm{H})$. L'image est l'opérateur égal à $\mathrm{T}_1 - \lambda \,\mathrm{Id}_{\mathrm{H}_1}$ sur H_1 et à $\mathrm{Id}_{\mathrm{H}_2}$ sur H_2. Il en résulte que $\mathrm{T}_1 - \lambda \,\mathrm{Id}_{\mathrm{H}_1}$ est inversible pour tout $\lambda \notin \mathrm{K}_1$. On a donc $\mathrm{Sp(T_1)} \subset \mathrm{K}_1$ et de la même façon $\mathrm{Sp(T_2)} \subset \mathrm{K}_2$. Inversement si $\lambda \in \mathrm{K}_1$, on sait que $\mathrm{T}_2 - \lambda \,\mathrm{Id}_{\mathrm{H}_2}$ est inversible ; alors $\mathrm{T}_1 - \lambda \,\mathrm{Id}_{\mathrm{H}_1}$ ne peut pas être inversible, sinon $\mathrm{T} - \lambda \,\mathrm{Id_H}$ le serait aussi.

Vecteurs propres approchés communs à deux endomorphismes qui commutent

Lemme. *On suppose que* $\mathrm{S}, \mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$, *avec* X *espace de Banach complexe, que* $\mathrm{TS} = \mathrm{ST}$, *et qu'il existe une suite* $(x_k) \subset \mathrm{X}$ *de vecteurs de norme* 1 *telle que* $\mathrm{S}x_k \to 0$ *; on peut trouver* $\lambda \in \mathbb{C}$ *et une suite* $(v_n) \subset \mathrm{X}$ *de vecteurs de norme* 1 *telle que*

$$\mathrm{S}v_n \to 0\,; \quad \mathrm{T}v_n - \lambda v_n \to 0.$$

Preuve. Quand on a un vecteur $x \neq 0$ tel que $\mathrm{S}x = 0$, on peut raisonner sur le sous-espace non nul $\mathrm{Y} = \ker \mathrm{S}$, qui est stable par T, et utiliser le spectre de la restriction de T à ce sous-espace. L'idée ici est de considérer l'objet global (x_k) comme un vecteur ξ d'un espace normé Y à construire, vecteur qui vérifie moralement $\mathrm{S}\xi = 0$; mais il faudra aussi introduire les images morales par T de ce vecteur, à savoir $\mathrm{T}\xi$, $\mathrm{T}^2\xi$, etc… et plus généralement tous les $\mathrm{P(T)}\xi$ pour tous les polynômes $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$. On va en fait assimiler ces "vecteurs moraux" aux polynômes P eux-mêmes, et définir un espace Y qui sera le complété de l'espace des polynômes pour une norme qui reflètera le comportement des suites $(\mathrm{P(T)}\, x_k)$. Par un argument d'extraction de suite diagonale, on peut supposer que la suite (x_k) de l'énoncé du lemme est telle que la limite

$$\lim_k \|\mathrm{P(T)}\, x_k\|$$

existe pour tout P appartenant à l'ensemble dénombrable des polynômes à coefficients $c_j = a_j + \mathrm{i} b_j$ avec a_j, b_j rationnels. Par prolongement par continuité, la limite existera pour tous les polynômes $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$. On définit une semi-norme sur l'espace $\mathrm{Y}_0 := \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ par

$$\|\mathrm{P}\| = \lim_k \|\mathrm{P}(\mathrm{T})\, x_k\|.$$

On notera $\mathbf{e}_j$ le monôme X^j, pour tout $j \geq 0$. Ainsi $\|\mathbf{e}_0\| = \lim_k \|\mathrm{T}^0 x_k\| = 1$. On définit ensuite une application linéaire τ sur Y_0, qui doit être le reflet de T, en posant $\tau(\mathrm{P}) = \mathrm{XP}$ (le produit de P par le monôme X) pour tout $\mathrm{P} \in \mathrm{Y}_0$. On voit que τ agit comme un opérateur de décalage sur la base $(\mathbf{e}_j)_{j\geq 0}$ de l'espace des polynômes. On a

$$\|\tau\,\mathrm{P}\| = \|\mathrm{XP}\| = \lim_k \|\mathrm{TP}(\mathrm{T})\, x_k\| \leq \|\mathrm{T}\| \, \lim_k \|\mathrm{P}(\mathrm{T})\, x_k\| = \|\mathrm{T}\|\, \|\mathrm{P}\|,$$

donc $\|\tau\| \leq \|\mathrm{T}\|$. Supposons d'abord que la semi-norme sur Y_0 ne soit pas une norme. Soit P un polynôme non nul de degré minimal d tel que $\|\mathrm{P}\| = 0$; on ne peut pas avoir $d = 0$ car $\|\mathbf{e}_0\| = 1$. Puisque $d \geq 1$, on peut factoriser P sous la forme $\mathrm{P} = (\mathrm{X} - \lambda)\mathrm{Q}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, et on aura

$$0 = \|\mathrm{P}\| = \|(\mathrm{X} - \lambda)\mathrm{Q}\| = \lim_k \|(\mathrm{T} - \lambda\, \mathrm{Id})\mathrm{Q}(\mathrm{T})\, x_k\|$$

et $\lim_k \|\mathrm{Q}(\mathrm{T})\, x_k\| \neq 0$ par la minimalité de d ; la suite $v_k = \|\mathrm{Q}(\mathrm{T})\, x_k\|^{-1}\mathrm{Q}(\mathrm{T})\, x_k$ vérifie les conclusions voulues.

Si la semi-norme est une norme sur Y_0, désignons par Y le complété de l'espace normé Y_0 ; l'opérateur τ se prolonge par continuité en un endomorphisme de Y. Il existe par conséquent une valeur propre approchée λ pour τ, donc pour tout n il existe un vecteur $y_n \in \mathrm{Y}$ de norme 1, que l'on peut choisir de la forme $y_n = \mathrm{P}_n \in \mathrm{Y}_0$ à cause de la densité de Y_0, tel que $\|\tau\,\mathrm{P}_n - \lambda \mathrm{P}_n\| < 2^{-n}$, c'est-à-dire que

$$\|\mathrm{TP}_n(\mathrm{T})\, x_k - \lambda \mathrm{P}_n(\mathrm{T})\, x_k\| < 2^{-n}$$

pour k assez grand ; posons $u_{k,n} = \mathrm{P}_n(\mathrm{T})\, x_k$. On voit que $\mathrm{S}\, u_{k,n} = \mathrm{SP}_n(\mathrm{T})\, x_k = \mathrm{P}_n(\mathrm{T})\mathrm{S}\, x_k$ tend vers 0 quand $k \to +\infty$. On pose $v_n = \|u_{k,n}\|^{-1} u_{k,n}$, où k est choisi assez grand pour que $\|\mathrm{S}\, u_{k,n}\| < 2^{-n}$, $\|\mathrm{T}\, u_{k,n} - \lambda u_{k,n}\| < 2^{-n}$ et $\|u_{k,n}\| > 1/2$, de sorte que $\|\mathrm{S}\, v_n\| < 2^{-n+1}$ et $\|\mathrm{T}\, v_n - \lambda v_n\| < 2^{-n+1}$.

À partir de ce lemme on peut court-circuiter le calcul fonctionnel des éléments hermitiens et attaquer d'emblée le cas des éléments normaux.