5. Opérateurs autoadjoints non bornés

Opérateurs non bornés

Soient X et Y deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; une *application linéaire partiellement définie* (un peu plus loin, on dira un *opérateur*) T de X dans Y est donnée par un sous-espace vectoriel dom(T) de X appelé *domaine* de T et par une application linéaire (usuelle) $\mathrm{L_T}$ de dom(T) dans Y. Autrement dit, la donnée T est celle de $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{dom}(\mathrm{T}), \mathrm{L_T})$. Dans la suite, pour tout $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$ on posera $\mathrm{T}x = \mathrm{L_T}x$ et on ne fera plus la distinction entre $\mathrm{L_T}x$ et $\mathrm{T}x$. Si T est une application linéaire partiellement définie, le *graphe* de T est le sous-espace vectoriel du produit $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ égal à

$$\mathrm{Gr}(\mathrm{T}) = \{(x, \mathrm{T}x) : x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})\}.$$

La restriction à Gr(T) de la première projection est injective. Réciproquement, appelons *graphe partiel* tout sous-espace vectoriel G de $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ tel que la restriction de la première projection à G soit injective : si $(0, y) \in \mathrm{G}$, alors $y = 0$. On voit facilement que tout graphe partiel est le graphe d'une unique application linéaire partiellement définie T. La correspondance qui à T associe son graphe est une correspondance bijective entre applications linéaires partiellement définies et graphes partiels :

soit $\mathrm{G} \subset \mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ un graphe partiel. Notons $p_1 : \mathrm{G} \to \mathrm{X}$ et $p_2 : \mathrm{G} \to \mathrm{Y}$ les projections et définissons un opérateur T en posant $\mathrm{dom}(\mathrm{T}) = p_1(\mathrm{G})$ et $\mathrm{T}(p_1 z) = p_2 z$ pour tout $z \in \mathrm{G}$. Il est clair que $\mathrm{Gr}(\mathrm{T}) = \mathrm{G}$. Comme le noyau de la première projection de $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ dans X est le sous-espace $\{0\} \times \mathrm{Y}$ de $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$, la correspondance entre opérateur et graphe partiel est bijective.

Désormais on dira *opérateur* au lieu d'application linéaire partiellement définie. On appelle *extension* d'un opérateur T tout opérateur S tel que $\mathrm{Gr}(\mathrm{T}) \subset \mathrm{Gr}(\mathrm{S})$. On écrit alors $\mathrm{T} \subset \mathrm{S}$.

Soient S et T deux opérateurs de X dans Y ; on définit l'opérateur $\mathrm{S} + \mathrm{T}$ en posant $\mathrm{dom}(\mathrm{S} + \mathrm{T}) = \mathrm{dom}(\mathrm{S}) \cap \mathrm{dom}(\mathrm{T})$ et en posant $(\mathrm{S} + \mathrm{T})(x) = \mathrm{S}x + \mathrm{T}x$ pour tout vecteur $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{S} + \mathrm{T})$.

Si S est une application linéaire usuelle de X dans Y, elle définit un opérateur de la façon la plus évidente : on pose $\mathrm{dom}(\mathrm{S}) = \mathrm{X}$ et $\mathrm{S}x \in \mathrm{Y}$ aura le sens habituel pour tout $x \in \mathrm{X}$; si T est un opérateur de X dans Y, le domaine de $\mathrm{S} + \mathrm{T}$ sera égal à celui de l'opérateur T. Cette remarque sera utilisée lorsque $\mathrm{X} = \mathrm{Y}$ et $\mathrm{S} = \lambda\, \mathrm{Id_X}$, pour introduire l'opérateur $\mathrm{T} - \lambda\, \mathrm{Id_X}$, de même domaine que T.

Soient X, Y et Z des espaces vectoriels, T un opérateur de X dans Y et S un opérateur de Y dans Z ; on définit la composition ST de ces deux opérateurs en posant d'abord $\mathrm{dom}(\mathrm{ST}) = \{x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}) : \mathrm{T}x \in \mathrm{dom}(\mathrm{S})\}$ et en posant $(\mathrm{ST})x = \mathrm{S}(\mathrm{T}x)$ pour tout $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{ST})$.

L'attitude habituelle quand on travaille avec les opérateurs bornés continus est d'essayer de les prolonger le plus vite possible à l'espace complet convenable (penser à la transformation de Fourier, qui est définie sur $L_1(\mathbb{R})$ par la formule intégrale usuelle ; on appelle aussi transformation de Fourier son extension par continuité à l'espace $L_2(\mathbb{R})$). Pour comprendre les définitions de ce paragraphe, il faut se dire qu'on adopte l'attitude radicalement opposée : ici, on ne prend **aucune** initiative de prolongement ; si T_1 est défini sur D_1 et T_2 sur D_2, la seule chose que nous sommes obligés d'admettre est que les deux sont définis sur $D_1 \cap D_2$. On ne cherche surtout pas à aller plus loin.

Définition. Soient X et Y deux espaces de Banach ; un opérateur T de X dans Y est dit *densément défini* si son domaine dom(T) est dense dans X. Un opérateur de X dans Y est dit *fermé* si son graphe est un sous-espace fermé de $X \times Y$. Un opérateur de X dans Y est dit *fermable* s'il admet une extension fermée.

Exemples.

A. On prend $X = Y = L_2(\mathbb{R})$, $\mathrm{dom}(T_0)$ est l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ des fonctions C^∞ à support compact et on pose $T_0 f = f'$ pour $f \in \mathrm{dom}(T_0)$. Cet opérateur est densément défini puisque $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $L_2(\mathbb{R})$; il est assez facile de voir qu'il n'est pas fermé. En revanche il est fermable, et on déterminera plus loin sa fermeture.

B. Considérons $X = Y = L_2(0,1)$; désignons par P l'opérateur borné de "primitive nulle en 0", défini par $(Pf)(t) = \int_0^t f(s)\,ds$, et posons $D = \mathrm{im}(P)$. On a vu que P est injectif, donc P définit une bijection de X sur D. On peut donc définir l'opérateur $T = P^{-1}$ de domaine D en posant pour tout $g \in D$

$$(Tg = f) \Leftrightarrow (Pf = g).$$

Cet opérateur T est donc injectif lui-aussi, de D dans $L_2(0,1)$. On voit facilement que im(P) est dense, donc P^{-1} est densément défini. Puisque P est continu, son graphe est fermé, donc P^{-1} est fermé puisque son graphe s'obtient à partir de celui de P par l'homéomorphisme $(x,y) \to (y,x)$ de $L_2(0,1) \times L_2(0,1)$ sur lui-même.

Intégration par parties

Supposons que deux fonctions intégrables f, g soient données sur $[a,b]$ et que l'on pose ensuite

$$F(x) = \alpha + \int_a^x f(t)\,dt, \quad G(x) = \beta + \int_a^x g(t)\,dt.$$

En utilisant le théorème de Fubini, on montre que

$$\text{(IPP)} \qquad \int_a^b F(t)g(t)\,dt = \Big[F(t)G(t)\Big]_a^b - \int_a^b f(t)G(t)\,dt.$$

En effet,

$$\int_a^b F(t)g(t)\,dt = \alpha \int_a^b g(t)\,dt + \int_a^b \Big(\int_a^t f(s)\,ds\Big) g(t)\,dt =$$

$$= \alpha(G(b)-G(a)) + \int_a^b f(s)\Big(\int_s^b g(t)\,dt\Big)\,ds = \alpha(G(b)-G(a)) + \int_a^b f(s)\big(G(b)-G(s)\big)\,ds =$$

$$= \mathrm{F}(a)(\mathrm{G}(b) - \mathrm{G}(a)) + \Big(\int_a^b f(s)\Big)\mathrm{G}(b) - \int_a^b f(s)\mathrm{G}(s)\,ds =$$

$$= \mathrm{F}(b)\mathrm{G}(b) - \mathrm{F}(a)\mathrm{G}(a) - \int_a^b f(s)\mathrm{G}(s)\,ds.$$

Un exemple de fermeture

Soit S une extension fermée de l'opérateur T ; alors Gr(S) contient Gr(T), donc son adhérence $\overline{\mathrm{Gr}(\mathrm{T})}$. Il s'ensuit qu'un opérateur T est fermable si et seulement si $\overline{\mathrm{Gr}(\mathrm{T})}$ est le graphe d'un opérateur. On appellera *fermeture* de l'opérateur T l'opérateur $\overline{\mathrm{T}}$ tel que $\mathrm{Gr}(\overline{\mathrm{T}}) = \overline{\mathrm{Gr}(\mathrm{T})}$. En particulier, pour que l'opérateur T soit fermable il faut et il suffit que l'on ait $\overline{\mathrm{Gr}(\mathrm{T})} \cap (\{0\} \times \mathrm{Y}) = \{(0,0)\}$.

Exemple. On va étudier en détail la fermeture de l'opérateur T_0 de l'exemple **A**, défini sur $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$. On va montrer que T_0 est fermable et identifier sa fermeture.

Supposons que (f, g) soit dans l'adhérence de $\mathrm{Gr}(\mathrm{T}_0)$; il existe une suite $(f_n) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $f_n \to f$ dans L_2 et $f_n' \to g$ dans L_2. Choisissons un représentant de la classe f, ce qui nous permettra de traiter f comme une vraie fonction définie partout. Quitte à passer à une sous-suite on peut supposer qu'il existe $\mathrm{E} \subset \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{R} \setminus \mathrm{E}$ soit négligeable et tel que $f_n(t)$ converge vers $f(t)$ pour tout $t \in \mathrm{E}$. En particulier, E est non vide, et il est même dense dans $\mathbb{R}$. Fixons $a \in \mathrm{E}$, et soit $t \in \mathrm{E}$; pour tout n on a

$$f_n(t) = f_n(a) + \int_a^t f_n'(s)\,ds,$$

et la convergence dans L_2 implique la convergence des intégrales sur les segments bornés, donc à la limite quand $n \to +\infty$ on obtient

$$\forall t \in \mathrm{E}, \quad f(t) = f(a) + \int_a^t g(s)\,ds.$$

On peut redéfinir f sur l'ensemble négligeable $\mathbb{R} \setminus \mathrm{E}$ par la formule $f(t) = f(a) + \int_a^t g(s)\,ds$. Il en résulte que f "est" continue, et que

$$\forall t, u \in \mathbb{R}, \quad f(u) = f(t) + \int_t^u g(s)\,ds.$$

On introduit l'ensemble

$$\mathrm{G}_1 = \{(f, g) \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{L}_2(\mathbb{R}) : \forall t < u, \quad f(u) = f(t) + \int_t^u g(s)\,ds\}$$

(pour être vraiment correct, on devrait dire : l'ensemble des couples (f, g) tels que la classe f admette un représentant $\tilde f$ pour lequel, pour tous $t < u$, on ait $\tilde f(u) = \ldots$). On vient de montrer que l'adhérence de $\mathrm{Gr}(\mathrm{T}_0)$ est contenue dans G_1 ; pour savoir que T_0 est fermable, il suffit de voir que G_1 est un graphe : c'est clairement un espace vectoriel, et si $(0, g) \in \mathrm{G}_1$, on aura $\int_t^u g = 0$ pour tous $t < u$, ce qui signifie que g est orthogonale à toutes les fonctions en escalier, qui sont denses dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$, donc $g = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

On va montrer que l'adhérence du graphe de T_0 est *égale* à G_1. On passera par un espace intermédiaire G_2. Supposons que $\varphi \in \mathrm{dom}(T_0)$ et $(f, g) \in G_1$. D'après (IPP) appliquée à un intervalle assez long pour que φ, φ' soient nulles aux bornes, puis prolongée en intégrale sur $\mathbb{R}$, on a

$$(*) \qquad \int_{\mathbb{R}} f\varphi' = -\int_{\mathbb{R}} g\varphi.$$

Désignons par G_2 l'ensemble des couples $(f, g) \in L_2(\mathbb{R}) \times L_2(\mathbb{R})$ tels que l'égalité ci-dessus soit vraie pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On vient d'indiquer que $G_1 \subset G_2$; il est clair que G_2 est fermé dans $L_2(\mathbb{R}) \times L_2(\mathbb{R})$, comme intersection de fermés. On va voir que G_2 est contenu dans l'adhérence de $\mathrm{Gr}(T_0)$, par la méthode usuelle de régularisation-troncature. Soit (θ_n) une suite de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, positives et d'intégrale 1, dont les supports tendent vers 0 ; on sait que $\theta_n * f$ tend vers f dans $L_2(\mathbb{R})$, pour toute $f \in L_2(\mathbb{R})$; de plus $\theta_n * f$ est C^∞ et sa dérivée est égale à $\theta_n' * f$. Si $(f, g) \in G_2$, on va vérifier que $\theta_n * g$ est aussi la dérivée de $\theta_n * f$. Par intégration par parties, on voit que $(*)$ implique que

$$-\int_{\mathbb{R}} (\theta_n * f)'\varphi = \int_{\mathbb{R}} (\theta_n * f)\varphi' = -\int_{\mathbb{R}} (\theta_n * g)\varphi$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Par la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $L_2(\mathbb{R})$, il en résulte que $(\theta_n * f)' = \theta_n * g$. Le couple $(\theta_n * f, \theta_n * g)$ tend vers (f, g). On peut donc trouver un couple de fonctions C^∞, de la forme (f_1, f_1') avec $f_1 = \theta_n * f$ pour un n grand, qui est proche de (f, g). Posons maintenant $\chi_n(x) = \chi(x/n)$, où $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ est égale à 1 dans un voisinage de 0. La fonction $h_n = \chi_n(x) f_1(x)$ est C^∞ à support compact, donc dans le domaine de T_0, et on va voir que le couple (h_n, h_n') tend vers (f_1, f_1'). C'est facile pour $h_n \to f_1$ (convergence dominée). Pour les dérivées, on a

$$h_n' = \frac{1}{n}\chi'(x/n) f_1(x) + \chi_n(x) f_1'(x),$$

et ça marche car $\chi_n f_1'$ tend vers f_1' dans $L_2(\mathbb{R})$ pour la même raison de convergence dominée, tandis que

$$\int_{\mathbb{R}} \Bigl|\frac{1}{n}\chi'(x/n) f_1(x)\Bigr|^2 \,dx \le \frac{1}{n^2}\,\|\chi'\|_\infty^2\,\|f_1\|_2^2 \to 0.$$

On appelle $H_1(\mathbb{R})$ (espace de Sobolev) l'espace des fonctions $f \in L_2(\mathbb{R})$ telles qu'il existe $g \in L_2(\mathbb{R})$ telle que $(f, g) \in G_1 = G_2$. On dit que g est la *dérivée généralisée* de f, et on note simplement $g = f'$. La fermeture de T_0 de l'exemple **A** est donc l'opérateur $T = \overline{T}_0$ de $L_2(\mathbb{R})$ dans lui-même dont le domaine est $H_1(\mathbb{R})$ et qui est défini par $Tf = f'$ pour $f \in H_1(\mathbb{R})$.

On définit de même l'espace $H_1([0, 1])$ des fonctions $f \in L_2([0, 1])$ (en fait f sera continue) pour lesquelles existe une fonction $g \in L_2([0, 1])$ telle que $f(t) = f(0) + \int_0^t g(s)\,ds$, pour tout $t \in [0, 1]$. Si on se rappelle l'opérateur-exemple P de $L_2([0, 1])$ dans lui-même qui associe à chaque $g \in L_2([0, 1])$ sa "primitive" nulle en zéro, on voit que $H_1([0, 1])$ est égal à $\mathrm{im}(P) + \mathbb{K}1$.

Revenons sur la notion de dérivée généralisée. C'est la propriété $(*)$ précédente qui permet d'étendre la définition de H^1 au cas de plusieurs dimensions. Par exemple, on dit que $f \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R}^2)$ si $f \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}^2)$ et s'il existe deux fonctions $g_1, g_2 \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}^2)$ qui seront les *dérivées partielles faibles* de f, ce qui signifie que

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x)\, dx = - \int_{\mathbb{R}^2} g_j(x) \varphi(x)\, dx$$

pour $j = 1, 2$ et pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. Les fonctions de cet espace $\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^2)$ ne sont plus nécessairement continues, ni même bornées sur les compacts de $\mathbb{R}^2$. Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, on définit de la même façon un espace $\mathrm{H}^1(\Omega)$, où f et les g_j sont dans $\mathrm{L}_2(\Omega)$ et où les fonctions test φ sont maintenant limitées à l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ des fonctions à support compact dans Ω.

Spectre des opérateurs fermés

Définition. Soient T un opérateur d'un espace de Banach complexe X dans lui même et $\lambda \in \mathbb{C}$; on dit que λ est une *valeur régulière* de T si $\mathrm{T} - \lambda \,\mathrm{Id}_\mathrm{X}$ est une application linéaire bijective de dom(T) sur X et si l'application linéaire réciproque définit une application linéaire *continue* de X dans lui même. On appelle *spectre* de T le complémentaire Sp(T) dans $\mathbb{C}$ de l'ensemble des valeurs régulières de T.

Soit T un opérateur sur un espace de Banach complexe X ; désignons par Ω_T l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ qui sont valeur régulière de T ; pour $\lambda \in \Omega_\mathrm{T}$, on pose

$$\mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T}) = (\lambda \,\mathrm{Id}_\mathrm{X} - \mathrm{T})^{-1} \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$$

et on appelle $\mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T})$ la *résolvante* de T.

Seuls les opérateurs fermés sont intéressants pour la théorie spectrale : en effet, si T admet une valeur régulière λ, l'opérateur $(\lambda \,\mathrm{Id}_\mathrm{X} - \mathrm{T})^{-1}$ est continu donc à graphe fermé ; on en déduit que son inverse $\lambda \,\mathrm{Id}_\mathrm{X} - \mathrm{T}$ est fermé, et il en résulte facilement que T lui-même est fermé. Autrement dit : si T n'est pas fermé, T n'admet aucune valeur régulière, donc on a toujours $\mathrm{Sp}(\mathrm{T}) = \mathbb{C}$.

Soit T un opérateur fermé d'un espace de Banach X dans lui-même ; remarquons que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, l'opérateur $\lambda \,\mathrm{Id}_\mathrm{X} - \mathrm{T}$ est fermé. Si $\lambda \,\mathrm{Id}_\mathrm{X} - \mathrm{T}$ est bijectif de dom(T) sur X, alors λ est une valeur régulière car $(\lambda \,\mathrm{Id}_\mathrm{X} - \mathrm{T})^{-1}$ est fermé, défini sur un espace de Banach, donc continu par le théorème du graphe fermé.

Exemples.

1. Considérons l'opérateur M de multiplication par la fonction $t \to t$ sur $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$, défini sur le domaine

$$\mathrm{D} = \{f \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} |t|^2 \, |f(t)|^2 \, dt < +\infty\},$$

qui agit sur $f \in \mathrm{D}$ par $(\mathrm{M}f)(t) = tf(t)$; on a bien alors $\mathrm{M}f \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R})$. On peut décrire l'appartenance de f au domaine D en une seule formule,

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + |t|^2) \, |f(t)|^2 \, dt < +\infty.$$

On suppose d'abord que $\lambda \in \mathbb{R}$; soit $\mathrm{B} = \mathrm{B}(\lambda, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$; on peut considérer la fonction $f = \mathbf{1}_\mathrm{B}$, qui est dans le domaine D, et qui est non nulle dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$. On a $|\lambda f - \mathrm{M}f| = |t - \lambda|\,\mathbf{1}_\mathrm{B} \le \varepsilon\,\mathbf{1}_\mathrm{B}$. Ceci montre que $\|\lambda f - \mathrm{M}f\|_2 \le \varepsilon\,\|f\|_2$; si l'inverse $\mathrm{R}_\lambda(\mathrm{M})$ de $\lambda\,\mathrm{Id} - \mathrm{M}$ existait, il devrait vérifier $\|\mathrm{R}_\lambda(\mathrm{M})\| \ge 1/\varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui est impossible. Il en résulte que $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{M})$.

On suppose inversement que $\lambda \notin \mathbb{R}$. Considérons la fonction continue g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = (\lambda - t)^{-1}$; elle est bornée par $|\operatorname{Im}\lambda|^{-1}$. La multiplication M_g est bornée sur $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$ puisque g est bornée, et on va voir que $\mathrm{M}_g = \mathrm{R}_\lambda(\mathrm{M})$. Si $f \in \mathrm{dom}(\mathrm{M})$, on voit que $\mathrm{M}_g(\lambda f - \mathrm{M}f) = g(\lambda - t)f$ est égale à f ; on a bien $\mathrm{M}_g(\lambda f - \mathrm{M}f) = f$ en tant que classe. Inversement, si $h \in \mathrm{L}_2(\mu)$, on vérifie que $\mathrm{M}_g(h) \in \mathrm{dom}(\mathrm{M})$ (en effet,

$$\int_\mathbb{R} |t|^2\,|(\mathrm{M}_g h)(t)|^2\,dt = \int_\mathbb{R} |t|^2\,|g(t)h(t)|^2\,dt = \int_\mathbb{R} |tg(t)|^2\,|h(t)|^2\,dt < +\infty$$

parce que $tg(t)$ est bornée sur $\mathbb{R}$) et ensuite $(\lambda\,\mathrm{Id} - \mathrm{M})(\mathrm{M}_g(h)) = h$. On a bien montré que $\mathrm{M}_g = \mathrm{R}_\lambda(\mathrm{M})$.

En bref, le spectre de M est exactement l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. Nous allons montrer maintenant que le spectre de l'opérateur $\mathrm{T} = \mathrm{P}^{-1}$ de l'exemple **B** est vide : évidemment, 0 est valeur régulière de T et $\mathrm{R}_0(\mathrm{T}) = -\mathrm{P}$. Pour $\lambda \ne 0$, cherchons à résoudre l'équation $\lambda x - \mathrm{T}x = y$, pour $y \in \mathrm{X}$ donné (on cherche $x \in \mathrm{D}$). Puisque T est surjectif, on peut écrire $y = \mathrm{T}z$, avec $z = \mathrm{P}y \in \mathrm{D}$. En appliquant P on trouve $\lambda \mathrm{P}x - x = z$, soit $\lambda^{-1}x - \mathrm{P}x = -\lambda^{-1}z$. On sait que λ^{-1} n'est pas dans le spectre de P (qui est réduit à $\{0\}$) donc on peut résoudre,

$$x = \mathrm{R}_{\lambda^{-1}}(\mathrm{P})(-\lambda^{-1}z) = -\lambda^{-1}\mathrm{R}_{\lambda^{-1}}(\mathrm{P})\,(\mathrm{P}y).$$

On vient donc d'identifier $\mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T}) = -\lambda^{-1}\mathrm{R}_{\lambda^{-1}}(\mathrm{P})\,\mathrm{P}$. Finalement, on constate que tout nombre complexe est valeur régulière de T, donc le spectre de $\mathrm{T} = \mathrm{P}^{-1}$ est vide.

3. Opérateur diagonal. Pour toute suite scalaire $(\mu_n)_{n\ge 0}$, on définit un opérateur (en général non borné) sur $\ell_2(\mathbb{N})$ dont le domaine est

$$\mathrm{D} = \{x \in \ell_2 : \sum |\mu_n x_n|^2 < +\infty\}$$

et qui est défini pour $x \in \mathrm{D}$ par $(\mathrm{T}x)_n = \mu_n x_n$. Le spectre de T est l'adhérence dans $\mathbb{C}$ de l'ensemble des valeurs $(\mu_n)_{n\ge 0}$. Comme toute partie fermée non vide F de $\mathbb{C}$ admet une suite dense, on trouve que pour toute partie fermée non vide F de $\mathbb{C}$, on peut construire un opérateur T d'un espace de Hilbert H dont le spectre Sp(T) soit égal à F. L'opérateur $\mathrm{T} = \mathrm{P}^{-1}$ fournit un cas où $\mathrm{Sp}(\mathrm{T}) = \emptyset$.

Le raisonnement utilisé dans l'exemple 2 précédent montre que

Lemme. *Soient* T *un opérateur injectif fermé d'un espace de Banach* X *dans lui même et* λ *une valeur régulière de* T *non nulle ; alors* λ^{-1} *est une valeur régulière de* T^{-1} *et on a*

$$\mathrm{R}_{\lambda^{-1}}(\mathrm{T}^{-1}) = -\lambda \mathrm{T}\,\mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T}) = \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{X} - \lambda^2 \mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T}).$$

Preuve. On veut résoudre pour tout $y \in \mathrm{X}$ l'équation $(\lambda^{-1}\,\mathrm{Id}_\mathrm{X} - \mathrm{T}^{-1})x = y$ (on cherche $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}^{-1}) = \mathrm{im}(\mathrm{T})$). Puisque λ est régulière pour T, on peut écrire $y = (\lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{X} - \mathrm{T})z$, avec $z = \mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T})y$. On sait alors que $z \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}) = \mathrm{im}(\mathrm{T}^{-1})$, donc il existe $u \in \mathrm{im}(\mathrm{T})$ tel que $z = \mathrm{T}^{-1}u$. L'équation proposée est donc

$$\lambda^{-1}x - \mathrm{T}^{-1}x = y = (\lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{X} - \mathrm{T})(\mathrm{T}^{-1}u) = \lambda\mathrm{T}^{-1}u - u = \lambda^{-1}(-\lambda u) - \mathrm{T}^{-1}(-\lambda u).$$

Il en résulte que $x_0 = -\lambda u$ convient. Par ailleurs, $\lambda^{-1}\,\mathrm{Id}_\mathrm{X} - \mathrm{T}^{-1}$ est injectif (donc la solution x_0 est unique) : si $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}^{-1})$ et $\lambda^{-1}x - \mathrm{T}^{-1}x = 0$, alors $x = \lambda\mathrm{T}^{-1}x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$ et $\mathrm{T}x = \lambda x$ implique $x = 0$ puisque λ est régulière pour T. Si $\mathrm{R}_{\lambda^{-1}}(\mathrm{T}^{-1})$ existe, on a donc

$$x = \mathrm{R}_{\lambda^{-1}}(\mathrm{T}^{-1})y = -\lambda u = -\lambda\mathrm{T}z = -\lambda\mathrm{T}\,\mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T})y.$$

Il reste à expliquer pourquoi l'opérateur $\mathrm{T}\,\mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T})$ est borné. Cela provient de l'égalité $(\lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{X} - \mathrm{T})\mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T}) = \mathrm{Id}_\mathrm{X}$, qui donne $\mathrm{T}\,\mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T}) = \lambda\mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T}) - \mathrm{Id}_\mathrm{X}$, qui est bien continu.

Proposition. *Le spectre d'un opérateur fermé* T *d'un espace de Banach complexe* X *dans lui même est une partie fermée de* $\mathbb{C}$, *et l'application* $\lambda \to \mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T})$ *est continue du complémentaire du spectre dans* $\mathcal{L}(\mathrm{X})$.

Preuve. Désignons par Ω_T l'ensemble des valeurs régulières pour T, et montrons que cet ensemble est ouvert. Si Ω_T est vide, il est ouvert ; sinon, supposons que $\lambda_0 \in \Omega_\mathrm{T}$, et montrons que les valeurs voisines de λ_0 sont elles aussi régulières et que $\lambda \to \mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T})$ est continue dans ce voisinage. En introduisant $\mathrm{T}_0 = \mathrm{T} - \lambda_0\,\mathrm{Id}_\mathrm{X}$ on se ramène à étudier la situation au voisinage de 0. On supposera donc que $\mathrm{T}_0 = \mathrm{T}_0 - 0\,\mathrm{Id}_\mathrm{X}$ est une bijection de dom(T) sur X, d'inverse $\mathrm{B} = -\mathrm{R}_0(\mathrm{T}_0) = -\mathrm{R}_{\lambda_0}(\mathrm{T})$ continu ; on veut alors montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que λ soit valeur régulière de T_0 quand $|\lambda| < \varepsilon$.

Pour faire les choses de façon précise, introduisons l'application j de D dans X définie par $j(x) = x$, et l'application b de X dans D définie par $by = \mathrm{B}y \in \mathrm{D}$. On a $\mathrm{B} = jb$. Étant donné $y \in \mathrm{X}$ quelconque, on veut résoudre en $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$, et avec solution unique, l'équation

$$\mathrm{T}_0x - \lambda jx = y.$$

Posons $z = \mathrm{T}_0x$, ce qui équivaut à $x = bz$ ou $jx = \mathrm{B}z$. L'équation précédente devient alors $z - \lambda\mathrm{B}z = y$, ou encore $(\mathrm{Id}_\mathrm{X} - \lambda jb)z = y$. Lorsque $|\lambda| < \|jb\|^{-1}$, on sait que $\mathrm{Id}_\mathrm{X} - \lambda jb$ est inversible,

$$\lambda^{-1}\mathrm{R}_{\lambda^{-1}}(\mathrm{B}) = \lambda^{-1}(\lambda^{-1}\,\mathrm{Id}_\mathrm{X} - \mathrm{B})^{-1} = (\mathrm{Id}_\mathrm{X} - \lambda jb)^{-1} = \mathrm{Id}_\mathrm{X} + \lambda jb + \lambda^2 jbjb + \cdots$$

donc $x = bz$ est uniquement défini par

$$x = (b + \lambda bjb + \lambda^2 bjbjb + \cdots)y.$$

Ceci montre que $-\mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T}_0) = \lambda^{-1}\mathrm{B}\,\mathrm{R}_{\lambda^{-1}}(\mathrm{B})$ existe et est borné, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| < \|\mathrm{B}\|^{-1}$, et

$$(*) \qquad -\mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T}_0) = b + \lambda bjb + \lambda^2 bjbjb + \cdots$$

L'écriture $(*)$ montre que $\lambda \to \mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T}_0)$ est continue au voisinage de 0, c'est-à-dire que $\lambda \to \mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T})$ est continue au voisinage d'un point λ_0 quelconque de Ω_T.

Adjoint hilbertien

Soient X et Y deux espaces de Banach et T un opérateur densément défini de X dans Y ; on définit *le transposé* de T, qui est un opérateur de Y^* dans X^*, de la façon suivante : le domaine de ${}^t\mathrm{T}$ est défini comme étant l'ensemble des $y^* \in \mathrm{Y}^*$ telles que la forme linéaire $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}) \to y^*(\mathrm{T}x)$ soit continue (en ayant muni l'espace vectoriel dom(T) de la norme induite par celle de X). Dans le cas où $y^* \in \mathrm{dom}({}^t\mathrm{T})$, cette forme linéaire continue, définie sur le sous-espace dense $\mathrm{dom}(\mathrm{T}) \subset \mathrm{X}$, se prolonge de façon unique en une forme linéaire $x^* \in \mathrm{X}^*$ continue sur X. On pose alors ${}^t\mathrm{T}y^* = x^*$. On a donc

$$({}^t\mathrm{T})(y^*)(x) = y^*(\mathrm{T}x)$$

pour tous $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$ et $y^* \in \mathrm{dom}({}^t\mathrm{T})$.

Lorsque X et Y sont deux espaces de Hilbert et T un opérateur densément défini de X dans Y, on définit un opérateur T^* de Y dans X de la façon suivante : on définit $\mathrm{T}^*(y) = x$ si la forme linéaire ℓ_y associée à $y \in \mathrm{H}$ est dans $\mathrm{dom}({}^t\mathrm{T})$, et si $\ell_x = x^* = {}^t\mathrm{T}(\ell_y)$. Le vecteur y est donc dans le domaine de T^* si et seulement si la forme linéaire $\ell : u \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}) \to \langle \mathrm{T}u, y\rangle$ est continue sur dom(T) (muni de la norme de X), et le couple $(y, x) \in \mathrm{Y} \times \mathrm{X}$ est dans le graphe de T^* si et seulement si

$$(*) \qquad \langle \mathrm{T}u, y\rangle = \langle u, x\rangle$$

pour tout $u \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$, ce qui signifie que x représente la forme linéaire ℓ (et son prolongement continu à X). On a donc

$$\mathrm{Gr}(\mathrm{T}^*) = \{(y, x) \in \mathrm{Y} \times \mathrm{X} : \forall z \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}),\ \langle x, z\rangle = \langle y, \mathrm{T}z\rangle\}.$$

En effet, la forme linéaire $u \to \langle \mathrm{T}u, y\rangle$ est alors continue puisqu'elle est égale à $u \to \langle u, x\rangle$ et dans ce cas on a $x = \mathrm{T}^*(y)$ par définition de l'adjoint. Il est clair que la condition $(*)$ définit un ensemble fermé de couples (y, x), ce qui montre que T^* est toujours un opérateur fermé.

Redisons les choses d'une autre façon, qui sera très utile plus loin. Sur l'espace $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ on introduit le produit scalaire

$$\langle (x, y), (x', y')\rangle = \langle x, x'\rangle + \langle y, y'\rangle$$

et on procède de même sur $\mathrm{Y} \times \mathrm{X}$. Soit $\mathrm{U}_0 \in \mathcal{L}(\mathrm{Y} \times \mathrm{X}, \mathrm{X} \times \mathrm{Y})$ l'opérateur unitaire qui à $(y, x) \in \mathrm{Y} \times \mathrm{X}$ associe $(x, -y)$; l'adjoint $\mathrm{U}_0^* = \mathrm{U}_0^{-1}$ vérifie $\mathrm{U}_0^*(x, y) = (-y, x)$.

Le graphe $\mathrm{Gr}(\mathrm{T}^*)$ *de* T^* *est l'orthogonal de* $\mathrm{U}_0^*(\mathrm{Gr}(\mathrm{T}))$ *dans l'espace de Hilbert* $\mathrm{Y} \times \mathrm{X}$*,*

donc $\mathrm{Gr}(\mathrm{T}^*)$ est fermé. Bien entendu il revient au même de dire que $\mathrm{U}_0(\mathrm{Gr}(\mathrm{T}^*))$ est l'orthogonal dans l'espace de Hilbert $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ de $\mathrm{Gr}(\mathrm{T})$.

On dit que T (densément défini sur un Hilbert) est *symétrique* si

$$\langle x, \mathrm{T}y\rangle = \langle \mathrm{T}x, y\rangle$$

pour tous $x, y \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$. Cela revient à dire que $\mathrm{T} \subset \mathrm{T}^*$. Un opérateur T de X dans lui même est dit *autoadjoint* si $\mathrm{T} = \mathrm{T}^*$. Tout autoadjoint est symétrique mais l'inverse n'est pas vrai.

Exemples.

1. On va vérifier que l'opérateur M est autoadjoint. On voit facilement que D est dense dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$ (parce que D contient toutes les fonctions de $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$ à support borné). Il est à peu près évident que M est symétrique,

$$\langle \mathrm{M}f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} \bigl(tf(t)\bigr)\,\overline{g(t)}\,dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)\,\overline{tg(t)}\,dt = \langle f, \mathrm{M}g\rangle.$$

On en déduit $\mathrm{dom}(\mathrm{M}) \subset \mathrm{dom}(\mathrm{M}^*)$. Inversement, supposons que $g \in \mathrm{dom}(\mathrm{M}^*)$, et considérons pour tout $n \ge 0$ la fonction $f_n \in \mathrm{dom}(\mathrm{M})$ définie par $f_n(t) = t\mathbf{1}_{[-n,n]}(t)g(t)$; puisque $g \in \mathrm{dom}(\mathrm{M}^*)$, il existe une constante C telle que pour tout $n \ge 0$, on ait $|\langle \mathrm{M}f_n, g\rangle| \le \mathrm{C}\,\|f_n\|_2$, ce qui donne

$$\int_{-n}^{n} t^2|g(t)|^2\,dt \le \mathrm{C}\,\Bigl(\int_{-n}^{n} t^2|g(t)|^2\,dt\Bigr)^{1/2}$$

d'où résulte que $\int_{\mathbb{R}} t^2|g(t)|^2\,dt \le \mathrm{C}^2 < +\infty$, soit $g \in \mathrm{dom}(\mathrm{M})$. La vérification est finie.

2. On définit trois opérateurs T_0, T_1 T_2 qui sont des petites variations du même exemple. On posera $\mathrm{D}_2 = \mathrm{H}^1(0,1)$, puis

$$\mathrm{D}_0 = \{f \in \mathrm{H}^1([0,1]) : f(0) = f(1) = 0\}$$

et

$$\mathrm{D}_1 = \{f \in \mathrm{H}^1([0,1]) : f(0) = f(1)\}.$$

On définit ensuite $\mathrm{T}_j f = f'$ pour $j = 0,1,2$ et pour f dans les domaines correspondants. On va montrer que $i\mathrm{T}_1$ est autoadjoint.

Avant tout on vérifie que D_0 est dense dans X : c'est clair puisque D_0 contient $\mathcal{D}(]0,1[)$, qui est dense dans $\mathrm{L}_2(0,1)$; les autres domaines D_1, D_2 sont denses aussi puisque plus grands. Commençons par T_0^* ; on note que si $f_2 \in \mathrm{D}_2$, $f_0 \in \mathrm{D}_0$, on a en utilisant l'intégration par parties dans $\mathrm{H}^1([0,1])$

$$\langle f_2, \mathrm{T}_0 f_0\rangle = \int_0^1 f_2\,\overline{f_0'} = \bigl[f_2\,\overline{f_0}\bigr]_0^1 - \int_0^1 f_2'\,\overline{f_0} = \int_0^1 f_2'\,\overline{f}_0 = \langle \mathrm{T}_2 f_2, f_0\rangle$$

(le terme $\bigl[\,.\,\bigr]_0^1$ est nul parce que f_0 est nulle aux bornes par définition de D_0). On a ainsi montré que le domaine de T_0^* contient D_2. Inversement, supposons que $g \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}_0^*)$. Dire que (g,h) est dans le graphe de T_0^* signifie que $h = \mathrm{T}_0^* g \in \mathrm{X}$ vérifie

$$\langle f, h\rangle = \langle \mathrm{T}_0 f, g\rangle$$

pour toute fonction $f \in \mathrm{D}_0$. On a donc si $(g,h) \in \mathrm{Gr}(\mathrm{T}_0^*)$

$$(+) \qquad \int_0^1 f\,\overline{h} = -\int_0^1 f'\,\overline{g}$$

pour toute $f \in \mathrm{D}_0$. Posons $\mathrm{H}(t) = \int_0^t h(s)\,ds$. On obtient par intégration par parties

$$\int_0^1 f\,\overline{h} = \bigl[f\,\overline{\mathrm{H}}\bigr]_0^1 - \int_0^1 f'\,\overline{\mathrm{H}} = -\int_0^1 f'\,\overline{\mathrm{H}},$$

ce qui donne

$$\int_0^1 f'\,\overline{g} = \int_0^1 f'\,\overline{\mathrm{H}},$$

pour toute $f \in \mathrm{D}_0$. On remarque que l'ensemble des f', lorsque $f \in \mathrm{D}_0$, est exactement l'ensemble de toutes les fonctions k de $\mathrm{X} = \mathrm{L}_2(0,1)$ qui sont d'intégrale nulle sur $[0,1]$. Cet ensemble des fonctions d'intégrale nulle est égal à $(\mathbb{C}1)^\perp$, et l'équation précédente indique que $\mathrm{H} - g$ est orthogonale à $(\mathbb{C}1)^\perp$, donc $\mathrm{H} - g \in (\mathbb{C}1)^{\perp\perp} = \mathbb{C}1$. On obtient que $\mathrm{H} - g$ est une fonction constante, donc $g = \mathrm{H} + \mathrm{C}te$; comme H est une fonction de $\mathrm{H}^1([0,1])$, il en résulte que $g \in \mathrm{D}_2$. On a déjà vu que $\mathrm{D}_2 \subset \mathrm{dom}(\mathrm{T}_0^*)$, et on a maintenant $\mathrm{dom}(\mathrm{T}_0^*) \subset \mathrm{D}_2$, donc $\mathrm{dom}(\mathrm{T}_0^*) = \mathrm{D}_2$ et pour $g \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}_0^*)$ on a $\mathrm{T}_0^* g = -g' = -\mathrm{T}_2 g$, ce qui montre que $\mathrm{T}_0^* = -\mathrm{T}_2$.

Si $f_1, g_1 \in \mathrm{D}_1$, on aura

$$\langle f_1, \mathrm{T}_1 g_1\rangle = \int_0^1 f_1\,\overline{g_1'} = \big[f_1\,\overline{g_1}\big]_0^1 - \int_0^1 f_1'\,\overline{g_1} = \int_0^1 f_1'\,\overline{g}_1 = \langle \mathrm{T}_1 f_1, g_1\rangle$$

(le terme $\big[\,.\,\big]_0^1$ est nul parce que f_1, g_1 prennent les mêmes valeurs aux deux bords par définition de D_1). On a ainsi montré que le domaine de T_1^* contient D_1 et que $\mathrm{T}_1^* f_1 = -\mathrm{T}_1 f_1$ quand $f_1 \in \mathrm{D}_1$; si on pose $\mathrm{S}_1 = i\mathrm{T}_1$, ceci montre que l'opérateur S_1 est symétrique.

Inversement soit (g,h) un élément du graphe de T_1^* ; il vérifiera en particulier les équations $(+)$ pour toute $f \in \mathrm{D}_0$, donc $g \in \mathrm{D}_2$ par ce qui précède. De plus,

$$\int_0^1 f_1\,\overline{h} = \langle f_1, h\rangle = \langle \mathrm{T}_1 f_1, g\rangle = \int_0^1 f_1'\,\overline{g} = \big[f_1\,\overline{g}\big]_0^1 - \int_0^1 f_1\,\overline{g}'$$

montre par différence que $f_1 \in \mathrm{D}_1 \to \big[f_1\,\overline{g}\big]_0^1 = f_1(1)\overline{(g(1)-g(0))}$ doit être L_2-continu : ceci n'est possible que si $g(1) - g(0) = 0$, c'est-à-dire si $g \in \mathrm{D}_1$. Ainsi, $\mathrm{dom}(\mathrm{T}_1^*) = \mathrm{D}_1$ et $\mathrm{S}_1^* = \mathrm{S}_1$ est autoadjoint.

Proposition. *Soient* X *et* Y *deux espaces de Hilbert et* T *un opérateur densément défini de* X *dans* Y *; si* T *est fermé, alors* T^* *est densément défini. Dans ce cas, on a la décomposition orthogonale*

$$\mathrm{X} \times \mathrm{Y} = \mathrm{Gr}(\mathrm{T}) \otimes \mathrm{U}_0(\mathrm{Gr}(\mathrm{T}^*))$$

et $\mathrm{T} = (\mathrm{T}^*)^*$.

Preuve. Supposons T fermé. Pour montrer que T^* est densément défini, on va montrer que $y = 0_\mathrm{Y}$ est le seul vecteur de Y orthogonal à $\mathrm{dom}(\mathrm{T}^*)$. Dans ce cas le couple $(y, 0_\mathrm{X})$ est orthogonal à $\mathrm{Gr}(\mathrm{T}^*)$, donc $\mathrm{U}_0(y, 0_\mathrm{X}) = (0_\mathrm{X}, -y)$ est orthogonal à $\mathrm{U}_0(\mathrm{Gr}(\mathrm{T}^*)) = \mathrm{Gr}(\mathrm{T})^\perp$; puisque T est fermé, $\mathrm{Gr}(\mathrm{T}))^{\perp\perp} = \mathrm{Gr}(\mathrm{T})$, et on obtient $(0_\mathrm{X}, -y) \in \mathrm{Gr}(\mathrm{T})$, d'où $y = -\mathrm{T}(0_\mathrm{X}) = 0_\mathrm{Y}$.

On sait qu'en général $\mathrm{U}_0(\mathrm{Gr}(\mathrm{T}^*))$ est l'orthogonal de $\mathrm{Gr}(\mathrm{T})$; si $\mathrm{Gr}(\mathrm{T})$ est fermé, on aura donc la décomposition orthogonale $\mathrm{H} = \mathrm{Z} \oplus \mathrm{Z}^\perp$, vraie pour tout sous-espace fermé Z d'un espace de Hilbert H. À partir de la décomposition de l'énoncé il est clair que $(\mathrm{T}^*)^* = \mathrm{T}$.

Proposition. *Soit* T *un opérateur densément défini d'un espace de Hilbert* X *dans un espace de Hilbert* Y *; alors* $\ker(\mathrm{T}^*) = \mathrm{im}(\mathrm{T})^\perp$*.*

Preuve. Soit $y \in \mathrm{Y}$; on a $y \in \ker(\mathrm{T}^*)$ si et seulement si, pour tout $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$, on a $\langle 0, x\rangle = \langle y, \mathrm{T}x\rangle$; cela a lieu si et seulement si $y \in \mathrm{im}(\mathrm{T})^\perp$.

Proposition. *Soient* H *un espace de Hilbert et* B *un opérateur borné, hermitien et injectif ; alors* B^{-1} *est autoadjoint.*

Preuve. Le domaine de $\mathrm{T} = \mathrm{B}^{-1}$ est l'image $\mathrm{D} = \mathrm{im}(\mathrm{B})$ de B ; comme B est hermitien injectif, cette image est dense ; en effet, si z est orthogonal à D, on a

$$0 = \langle \mathrm{B}y, z\rangle = \langle y, \mathrm{B}z\rangle$$

pour tout $y \in \mathrm{H}$ donc $\mathrm{B}z = 0$, donc $z = 0$ puisque B est injectif. Il est évident que T est symétrique : si $x_1, x_2 \in \mathrm{D}$, on peut écrire $x_j = \mathrm{B}y_j$, $j = 1, 2$ et

$$\langle \mathrm{T}x_1, x_2\rangle = \langle y_1, \mathrm{B}y_2\rangle = \langle \mathrm{B}y_1, y_2\rangle = \langle x_1, \mathrm{T}x_2\rangle.$$

Il reste à montrer que le domaine de T^* n'est pas plus grand que D ; si u est dans le domaine de T^*, il existe un vecteur v tel que

$$\langle \mathrm{T}x, u\rangle = \langle x, v\rangle$$

pour tout $x = \mathrm{B}y$ dans D, donc puisque $\mathrm{T}x = y$

$$\langle y, u\rangle = \langle \mathrm{B}y, v\rangle = \langle y, \mathrm{B}v\rangle$$

pour tout $y \in \mathrm{H}$, ce qui donne $u = \mathrm{B}v$, donc $u \in \mathrm{D}$.

Proposition. *Soient* H_1 *et* H_2 *deux espaces de Hilbert et* T *un opérateur fermé densément défini de* H_1 *dans* H_2 *; l'opérateur* $(\mathrm{Id}_{\mathrm{H}_1} + \mathrm{T}^*\mathrm{T})$ *est injectif, son image est égale à* H_1 *et* $(\mathrm{Id}_{\mathrm{H}_1} + \mathrm{T}^*\mathrm{T})^{-1}$ *est un élément positif de* $\mathcal{L}(\mathrm{H}_1)$*. L'opérateur* $\mathrm{T}^*\mathrm{T}$ *est autoadjoint et son spectre est contenu dans* $[0, +\infty[$*.*

Preuve. Soit $x \in \mathrm{H}_1$; comme T est densément défini et fermé on a

$$\mathrm{H}_1 \times \mathrm{H}_2 = \mathrm{Gr}(\mathrm{T}) \oplus \mathrm{U}_0(\mathrm{Gr}(\mathrm{T}^*)),$$

donc il existe deux vecteurs $\xi \in \mathrm{Gr}(\mathrm{T})$ et $\eta \in \mathrm{Gr}(\mathrm{T}^*)$ tels que $(x, 0) = \xi + \mathrm{U}_0(\eta)$; en d'autres termes, il existe $z \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$ et $y \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}^*)$ tels que

$$(x, 0) = (z, \mathrm{T}z) + (\mathrm{T}^*y, -y).$$

Alors $y = \mathrm{T}z$, donc $z \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}^*\mathrm{T})$ et $x = (\mathrm{Id}_{\mathrm{H}_1} + \mathrm{T}^*\mathrm{T})\, z$, ce qui montre que $(\mathrm{Id}_{\mathrm{H}_1} + \mathrm{T}^*\mathrm{T})$ est surjectif. Soit $z \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}^*\mathrm{T})$; comme $z \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$ et $\mathrm{T}z \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}^*)$, on a

$$\langle (\mathrm{Id}_{\mathrm{H}_1} + \mathrm{T}^*\mathrm{T})\, z, z\rangle = \langle z + \mathrm{T}^*\mathrm{T}\, z, z\rangle = \langle z, z\rangle + \langle \mathrm{T}^*\mathrm{T}\, z, z\rangle = \|z\|^2 + \|\mathrm{T}z\|^2.$$

Alors

$$\|z\|^2 \le \|z\|^2 + \|\mathrm{T}z\|^2 = \langle (\mathrm{Id}_{\mathrm{H}_1} + \mathrm{T}^*\mathrm{T})\, z, z\rangle \le \|z\|\, \|(\mathrm{Id}_{\mathrm{H}_1} + \mathrm{T}^*\mathrm{T})\, z\|,$$

donc $\|z\| \leq \|(\mathrm{Id}_{\mathrm{H}_1} + \mathrm{T}^*\mathrm{T})\, z\|$; il en résulte que $\mathrm{Id}_{\mathrm{H}_1} + \mathrm{T}^*\mathrm{T}$ est injectif, que l'inverse $\mathrm{B} = (\mathrm{Id}_{\mathrm{H}_1} + \mathrm{T}^*\mathrm{T})^{-1}$ est continu et que $\|\mathrm{B}\| \leq 1$. Enfin, considérons $x_1 = \mathrm{B}y_1$, $x_2 = \mathrm{B}y_2$, avec $y_1, y_2 \in \mathrm{H}_1$; on a $x_1, x_2 \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}^*\mathrm{T})$ et

$$\langle y_1, \mathrm{B}y_2 \rangle = \langle (\mathrm{Id}_{\mathrm{H}_1} + \mathrm{T}^*\mathrm{T})\, x_1, x_2 \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle + \langle \mathrm{T}x_1, \mathrm{T}x_2 \rangle = \langle \mathrm{B}y_1, y_2 \rangle,$$

donc B est hermitien ; de plus les égalités précédentes montrent que

$$\langle y_1, \mathrm{B}y_1 \rangle = \langle x_1, x_1 \rangle + \langle \mathrm{T}x_1, \mathrm{T}x_1 \rangle \geq 0$$

donc B est un élément positif de $\mathcal{L}(\mathrm{H}_1)$. Par la proposition précédente, l'opérateur $\mathrm{Id}_{\mathrm{H}_1} + \mathrm{T}^*\mathrm{T}$ est autoadjoint, donc $\mathrm{T}^*\mathrm{T}$ est autoadjoint. Comme l'opérateur B est positif de norme ≤ 1, on a $\mathrm{Sp}(\mathrm{B}) \subset [0, 1]$; il en résulte que $\mathrm{Sp}(\mathrm{Id}_{\mathrm{H}_1} + \mathrm{T}^*\mathrm{T}) \subset [1, +\infty[$ et $\mathrm{Sp}(\mathrm{T}^*\mathrm{T}) \subset [0, +\infty[$.

L'espace $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$

On peut généraliser l'exemple **A** dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$; on considère l'opérateur T_0 défini sur $\mathcal{D}(\Omega)$ par

$$\mathrm{T}_0(\varphi) = (\mathrm{D}_1\varphi, \ldots, \mathrm{D}_d\varphi) \in \mathrm{L}_2(\Omega)^d$$

où D_j désigne la $j$ème dérivée partielle de φ. La fermeture de T_0 est l'opérateur T dont le domaine est l'espace vectoriel $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ formé des fonctions $f \in \mathrm{L}_2(\Omega)$ qui sont limite dans L_2 d'une suite $(\varphi_n) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\mathrm{D}_j\varphi_n$ converge dans L_2 vers une fonction g_j pour $j = 1, \ldots, d$. Ces fonctions g_j auront la propriété

$$\int_\Omega f \mathrm{D}_j \psi = -\int_\Omega g_j \psi$$

pour toute $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$; ce sont les dérivées distribution de f, qui seront encore notées $\mathrm{D}_j f$; l'opérateur T défini sur $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ agit par

$$\mathrm{T}_0(f) = (\mathrm{D}_1 f, \ldots, \mathrm{D}_d f) = \nabla f \in \mathrm{L}_2(\Omega)^d.$$

On munit $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ de la norme du graphe,

$$\|f\|^2_{\mathrm{H}^1} = \int_\Omega |f|^2 + \int_\Omega \sum_j (\mathrm{D}_j f)^2 = \int_\Omega \bigl(|f|^2 + |\nabla f|^2\bigr).$$

Muni de cette norme H^1_0 est complet, et c'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_{\mathrm{H}^1} = \int_\Omega \bigl(f\overline{g} + \nabla f \cdot \overline{\nabla g}\bigr).$$

Injection de $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ *dans* $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$

Si φ est une fonction de $\mathcal{D}(\Omega)$, on la prolongera en une fonction $\mathrm{E}(\varphi)$ définie sur $\mathbb{R}^d$ en posant simplement $\mathrm{E}(\varphi)(x) = \varphi(x)$ si $x \in \Omega$ et $\mathrm{E}(\varphi)(x) = 0$ si $x \notin \Omega$. Il est clair que $\mathrm{E}(\varphi)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^d$. On a

$$(*) \qquad \int_{\mathbb{R}^d} |\mathrm{E}(\varphi)(x)|^2 \, dx = \int_\Omega |\varphi(x)|^2 \, dx \le \|\varphi\|_{\mathrm{H}^1}^2$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Il est clair en particulier que l'application E définie sur $\mathcal{D}(\Omega)$ est continue de la norme $\mathrm{H}^1(\Omega)$ vers $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$; comme l'espace $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ est précisément défini comme adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathrm{H}^1(\Omega)$, il en résulte que l'application E se prolonge en application continue de $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$. Il s'agit moralement de l'injection canonique du premier espace dans le second. On a alors

Théorème. *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *un ouvert* **borné** *; l'injection* E *est un opérateur compact de* $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ *dans* $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$*.*

Preuve. On va appliquer le théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov sur la relative compacité dans $\mathrm{L}_p(\mathbb{R}^d)$ d'un ensemble de fonctions A, ici avec $p = 2$, et

$$\mathrm{A} = \{\mathrm{E}(\varphi) : \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \ \|\varphi\|_{\mathrm{H}_1} \le 1\}.$$

Ce théorème comprend trois clauses dont deux sont évidentes ici. Tout d'abord, A est borné dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$ d'après $(*)$; ensuite, toutes les fonctions $\mathrm{E}(\varphi)$ sont à support dans le compact fixé $\mathrm{K} = \overline{\Omega}$ (c'est ici qu'intervient l'hypothèse Ω *borné*). Il reste à voir la clause sur l'équicontinuité des translations.

On montre que $\|f_v - f\|_2 \le |v|$ pour toute fonction $f \in \mathrm{A}$ et tout vecteur $v \in \mathbb{R}^d$, où $f_v(x) = f(x+v)$. Pour cela on écrit

$$f(x+v) - f(x) = \int_0^1 (\nabla f)(x+sv) \,.\, v \, ds,$$

puis avec Cauchy-Schwarz suivi de Jensen

$$\big(f(x+v) - f(x)\big)^2 = \Big(\int_0^1 (\nabla f)(x+sv) \,.\, v \, ds\Big)^2 \le$$

$$(*) \qquad \Big(\int_0^1 |(\nabla f)(x+sv)| \, |v| \, ds\Big)^2 \le |v|^2 \int_0^1 |(\nabla f)(x+sv)|^2 \, ds.$$

Par Fubini on obtiendra

$$\|f_v - f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^d} \big(f(x+v) - f(x)\big)^2 \, dx \le |v|^2 \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} |(\nabla f)(x+sv)|^2 \, dx \, ds =$$

$$|v|^2 \int_0^1 \big\| \, |\nabla f| \, \big\|_{\mathrm{L}_2}^2 \, ds = |v|^2 \, \big\| \, |\nabla f| \, \big\|_2^2 \le \|v\|^2.$$

On a ainsi montré l'équicontinuité des translations sur l'ensemble A, ce qui permet de conclure.

Inégalité de Poincaré

On désigne encore par Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$. Reprenons le contenu de l'inégalité $(*)$, en prenant pour $v_0 = v$ un vecteur assez grand pour que $\Omega + v_0$ soit disjoint de Ω ; pour $x \in \Omega$, on a alors $f(x + v_0) = 0$. On aura donc

$$\forall x \in \Omega, \quad |f(x)|^2 \le |v_0|^2 \int_0^1 |(\nabla f)(x + s v_0)|^2 \, ds,$$

donc en intégrant en x, en utilisant Fubini puis l'invariance de la mesure de Lebesgue par translation,

$$\int_\Omega |f(x)|^2 \, dx \le |v_0|^2 \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} |(\nabla f)(x + sv)|^2 \, dx ds = |v_0|^2 \int_\Omega |(\nabla f)(x)|^2 \, dx,$$

ce qui constitue *l'inégalité de Poincaré* : si Ω est un ouvert borné, il existe une constante M telle que

$$\int_\Omega |f(x)|^2 \, dx \le \mathrm{M}^2 \int_\Omega |(\nabla f)(x)|^2 \, dx,$$

pour toute fonction de $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$. On vient d'obtenir l'inégalité lorsque $f \in \mathcal{D}(\Omega)$, et elle se prolonge par continuité à toute $f \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ par définition de $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$.

La démonstration précédente montre que la condition Ω borné n'est pas nécessaire, puisque nous avons simplement utilisé l'existence d'un vecteur v_0 tel que $\Omega + v_0$ soit disjoint de Ω ; cela serait encore vrai pour une bande de largeur finie. L'inégalité de Poincaré montre que dans le cas d'un ouvert borné, la quantité

$$\Bigl(\int_\Omega |(\nabla f)(x)|^2 \, dx \Bigr)^{1/2}$$

définit une norme équivalente sur l'espace $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$.

Opérateur laplacien

Gardons un ouvert Ω borné pour simplifier ce qui suit. On va voir que l'image de l'opérateur T défini sur $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ par $\mathrm{T}f = \nabla f$ est fermée dans $\mathrm{L}_2(\Omega)^d$, ce qui permettra de considérer que T est un opérateur fermé densément défini de $\mathrm{H}_1 = \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ dans $\mathrm{H}_2 = \mathrm{im}(\mathrm{T})$. Si une suite $(\mathrm{D}_1 f_k, \ldots, \mathrm{D}_d f_k)$ converge vers $h = (h_1, \ldots, h_d)$, l'inégalité de Poincaré montre que la suite (f_k) est de Cauchy dans L_2, donc converge vers $f \in \mathrm{L}_2(\Omega)$, ce qui montre que (f, h) est dans l'adhérence du graphe de T, qui est fermé, donc $h = \mathrm{T}f = \nabla f$.

Cherchons le domaine de T^* ; une fonction vectorielle $h \in \mathrm{H}_2$ est dans $\mathrm{dom}(\mathrm{T}^*)$ si

$$f \to \int_\Omega \nabla f \cdot \overline{h}$$

est L_2 continue ; mais $h = \nabla g$ pour une certaine $g \in \mathrm{H}_1$, donc

$$\int_\Omega \nabla f \cdot \overline{h} = \int_\Omega \nabla f \cdot \overline{\nabla g} = -(\Delta(\overline{g}), f)$$

où Δ désigne le laplacien au sens des distributions ; dire que cette forme linéaire est bornée signifie que la distribution $\Delta(g)$ "est" une fonction de L_2, donc

$$\mathrm{dom}(T^*) = \{\nabla g : g \in H_1,\ \Delta g \in L_2(\Omega)\}.$$

On a donc

$$\mathrm{dom}(T^*T) = \{f \in H_1,\ \Delta f \in L_2(\Omega)\}.$$

Si Ω est un ouvert régulier, on peut montrer que toutes les dérivées partielles secondes de f sont dans $L_2(\Omega)$ (voir le livre de Brézis par exemple).

D'après la théorie générale, $\mathrm{Id} + T^*T$ est une bijection de H_1 sur $L_2(\Omega)$, d'inverse B borné et hermitien. On va voir que B est de plus compact. Supposons que $h \in L_2(\Omega)$, $f = Bh \in \mathrm{dom}(T^*T)$; on a

$$\langle (\mathrm{Id} + T^*T) f, f\rangle = \|f\|_2^2 + \|\nabla f\|_2^2 = \langle h, f\rangle.$$

On peut faire parler cette relation, de façon plus ou moins précise. Tout d'abord,

$$\|f\|_{H^1}^2 = \|f\|_2^2 + \|\nabla f\|_2^2 = \langle h, f\rangle \le \|h\|_2 \|f\|_2 \le \|h\|_2 \|f\|_{H^1}$$

montre que $\|Bh\|_{H^1} = \|f\|_{H^1} \le \|h\|_2$, ce qui montre que B envoie la boule unité de $L_2(\Omega)$ dans celle de $H_1 = H_0^1(\Omega)$, qui est compacte dans $L_2(\Omega)$; l'opérateur B est donc un endomorphisme compact de $L_2(\Omega)$. Comme tel, il admet une diagonalisation dans une base orthonormée.

Remarquons que 1 n'est pas valeur propre de B : si $Bh = h$, les relations précédentes donnent

$$\|h\|_2^2 + \|\nabla h\|_2^2 = \langle h, h\rangle = \|h\|_2^2,$$

donc $\nabla h = 0$ et h est constante. Mais $h = Bh \in H_0^1(\Omega)$ implique que $h = 0$.

L'opérateur B est hermitien positif injectif, de norme 1 et 1 n'est pas valeur propre : on peut ranger ses valeurs propres dans une suite $\mu_1 \ge \mu_2 \ldots$ qui tend vers 0 par valeurs positives, et $\mu_1 < 1$. Les fonctions propres φ_n vérifient

$$\varphi_n - \Delta\varphi_n = \frac{1}{\mu_n}\,\varphi_n,$$

soit

$$-\Delta\varphi_n = \frac{1-\mu_n}{\mu_n}\,\varphi_n.$$

On obtient pour $-\Delta$ une suite croissante (λ_n) de valeurs propres > 0, qui tend vers $+\infty$.