Examen de Théorie spectrale, 21 octobre 2003 **durée : 3h**

Exercice I

On considère l'espace de Hilbert complexe $\mathrm{H} = \ell_2(\mathbb{Z})$ et l'application linéaire T qui associe à chaque vecteur $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathrm{H}$ le vecteur $\mathrm{T}x \in \mathrm{H}$ défini par

$$(\mathrm{T}x)_k = 2\,x_{k-1} \text{ si } \ k \ge 1, \quad \text{et} \quad (\mathrm{T}x)_k = x_{k-1} \text{ si } \ k \le 0.$$

a. Vérifier que T est bornée, calculer sa norme dans $\mathcal{L}(\mathrm{H})$; déterminer l'adjoint T^* de T ; l'opérateur T est-il normal ? Vérifier que T est inversible, et expliciter l'inverse T^{-1}.

b. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \|\mathrm{T}^n\|^{1/n}$ et $\lim_{n\to+\infty} \|(\mathrm{T}^{-1})^n\|^{1/n}$; en déduire une localisation du spectre de T.

c. Montrer que tout nombre complexe λ tel que $|\lambda| = 1$ ou $|\lambda| = 2$ est valeur propre approchée de T, c'est-à-dire qu'il existe une suite $(x^{(n)})$ de vecteurs de norme 1 dans H telle que $\mathrm{T}x^{(n)} - \lambda x^{(n)} \to 0$.

d. Montrer que le spectre de T contient la couronne $\{z \in \mathbb{C} : 1 \le |z| \le 2\}$. Déterminer le spectre de T.

Exercice II

On considère l'espace de Hilbert $\mathrm{H} = \mathrm{L}_2(0,1)$ et le sous-espace vectoriel D de H formé des fonctions $f \in \mathrm{H}^1(0,1)$ dont la dérivée généralisée f' est également dans $\mathrm{H}^1(0,1)$, et telles que $f(0) = f(1) = 0$, c'est-à-dire

$$\mathrm{D} = \{f \in \mathrm{H}^1(0,1) : f' \in \mathrm{H}^1(0,1),\ f(0) = f(1) = 0\}.$$

On définit un opérateur non borné T sur H, de domaine D, en posant $\mathrm{T}f = -f''$ pour toute $f \in \mathrm{D}$, où $f'' \in \mathrm{H}$ désigne la dérivée généralisée de f'.

a. Montrer que T est densément défini et fermé.

b. Montrer que pour toute fonction $g \in \mathrm{H}$, il existe une solution unique $f \in \mathrm{D}$ pour l'équation

$$\mathrm{T}f + f = g,$$

et que f peut s'exprimer au moyen de la formule

$$-2\,f(x) = \mathrm{e}^{x} \int_0^x \mathrm{e}^{-t}\, g(t)\,dt + \mathrm{e}^{-x} \int_x^1 \mathrm{e}^{t}\, g(t)\,dt + a\,\mathrm{e}^{x} + b\,\mathrm{e}^{-x},$$

où a et b sont des scalaires dépendant de g, qu'on déterminera.

c. Montrer que $\mathrm{B} = (\mathrm{T} + \mathrm{Id}_\mathrm{H})^{-1} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt et expliciter son noyau $\mathrm{K}(x,t)$.

d. Montrer que T est autoadjoint. Montrer qu'il existe une base orthonormée $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ de H, formée de vecteurs de D, et des scalaires $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ tels que $\mathrm{T}\varphi_n = \lambda_n \varphi_n$ pour tout entier $n \geq 1$. Montrer que les éléments de D sont les fonctions f de la forme

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{n^2\pi^2 + 1} \sin(n\pi x),$$

où $\sum_n |c_n|^2 < +\infty$.

e. Démontrer pour tous $x, t \in [0,1]$ l'identité

$$\mathrm{ch}(|x-t|-1) - \mathrm{ch}(x+t-1) = 2\Big(\mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}}\Big)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2\pi^2+1} \sin(n\pi x)\sin(n\pi t)\right).$$

Exercice III

On considère l'espace de Hilbert complexe $\mathrm{H} = \ell_2(\mathbb{N})$, l'idéal $\mathcal{K}(\mathrm{H})$ de $\mathcal{L}(\mathrm{H})$ formé des endomorphismes compacts, et l'algèbre de Calkin $\mathcal{C} = \mathcal{L}(\mathrm{H})/\mathcal{K}(\mathrm{H})$. Pour tout $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$, on désigne par $\mathrm{T}_{\mathcal{C}}$ l'élément de $\mathcal{C}$ égal à la classe de T modulo les opérateurs compacts. On munit $\mathcal{C}$ de la norme quotient, c'est-à-dire que $\|\mathrm{T}_{\mathcal{C}}\|_{\mathcal{C}}$ est l'inf des normes des opérateurs $\mathrm{T}+\mathrm{K}$, où K parcourt l'idéal $\mathcal{K}(\mathrm{H})$.

a. Montrer que

$$\|\mathrm{T}_{\mathcal{C}}\|_{\mathcal{C}} = \inf\{\|\mathrm{T}_{|\mathrm{Y}}\| : \mathrm{Y} \subset \mathrm{H},\ \operatorname{codim} \mathrm{Y} < +\infty\}$$

(on rappelle que si $\mathrm{K} \in \mathcal{K}(\mathrm{H})$, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un sous-espace Y de codimension finie tel que $\|\mathrm{K}_{|\mathrm{Y}}\| < \varepsilon$).

b. En déduire que $\|(\mathrm{T}^*)_{\mathcal{C}}\mathrm{T}_{\mathcal{C}}\|_{\mathcal{C}} = \|\mathrm{T}_{\mathcal{C}}\|_{\mathcal{C}}^2$; montrer que la classe $(\mathrm{T}^*)_{\mathcal{C}}$ ne dépend que de $\mathrm{T}_{\mathcal{C}}$, et que $\mathcal{C}$ est une C*-algèbre, si on pose $(\mathrm{T}_{\mathcal{C}})^* = (\mathrm{T}^*)_{\mathcal{C}}$ pour tout $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$.

c. Soit $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ le shift à droite ; montrer que son image $\mathrm{S}_{\mathcal{C}}$ est un élément unitaire de la C*-algèbre $\mathcal{C}$.

d. On rappelle que $\mathrm{Sp}(\mathrm{S}) = \mathbb{T}$, le cercle unité du plan complexe. Soit f une fonction complexe continue sur le cercle unité, qui ne s'annule en aucun point de $\mathbb{T}$; montrer que tout opérateur $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ dont l'image $\mathrm{T}_{\mathcal{C}}$ est égale à $f(\mathrm{S}_{\mathcal{C}})$ est un opérateur de Fredholm. Quel est l'indice de cet opérateur T dans le cas où $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{Z}$?

e. On verra la fonction f de la question précédente comme un chemin fermé dans $\mathbb{C}$ qui ne passe pas par 0. On suppose qu'il existe une homotopie continue $(f_t)_{t\in[0,1]}$ de $f = f_0$ vers le chemin $f_1(z) = z^n$, telle qu'aucun chemin f_t ne passe par 0. Calculer l'indice d'un opérateur $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ tel que $\mathrm{T}_{\mathcal{C}} = f(\mathrm{S}_{\mathcal{C}})$ en fonction de l'indice du chemin f par rapport à 0,

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_f \frac{dw}{w}.$$