Commentaires sur l'examen de Théorie spectrale du 21 octobre 2003

Exercice I

On considère l'espace de Hilbert complexe $\mathrm{H} = \ell_2(\mathbb{Z})$ *et l'application linéaire* T *qui associe à chaque vecteur* $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathrm{H}$ *le vecteur* $\mathrm{T}x \in \mathrm{H}$ *défini par*

$$(\mathrm{T}x)_k = 2\,x_{k-1} \text{ si } k \ge 1, \quad \text{et} \quad (\mathrm{T}x)_k = x_{k-1} \text{ si } k \le 0.$$

a. Vérifier que T *est bornée, calculer sa norme dans* $\mathcal{L}(\mathrm{H})$ *; déterminer l'adjoint* T^* *de* T *; l'opérateur* T *est-il normal ? Vérifier que* T *est inversible, et expliciter l'inverse* T^{-1}.

Cette question ne pose pas beaucoup de difficultés ; on trouve $\|\mathrm{T}\| = 2$, l'opérateur $\mathrm{T}^*\mathrm{T} - \mathrm{T}\mathrm{T}^*$ est non nul (de rang un) donc T n'est pas normal. L'inverse T^{-1} est évident à écrire.

b. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \|\mathrm{T}^n\|^{1/n}$ *et* $\lim_{n\to+\infty} \|(\mathrm{T}^{-1})^n\|^{1/n}$ *; en déduire une localisation du spectre de* T.

Ici encore c'est facile ; on trouve que $\|\mathrm{T}^n\| = 2^n$ pour tout n, donc le rayon spectral de T est 2 et le spectre est contenu dans le disque de rayon 2. On voit aussi que $\|(\mathrm{T}^{-1})^n\| = 1$ pour tout n, donc le spectre de T^{-1} est borné par 1. Comme T est inversible il en résulte que $\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id} = \mathrm{T}(\mathrm{Id} - \lambda\mathrm{T}^{-1})$ est inversible pour tout λ tel que $|\lambda| < 1$, et le spectre de T est donc contenu dans la couronne $\{1 \le |z| \le 2\}$.

c. Montrer que tout nombre complexe λ *tel que* $|\lambda| = 1$ *ou* $|\lambda| = 2$ *est valeur propre approchée de* T, *c'est-à-dire qu'il existe une suite* $(x^{(n)})$ *de vecteurs de norme* 1 *dans* H *telle que* $\mathrm{T}x^{(n)} - \lambda x^{(n)} \to 0$.

Essentiellement vu en cours : pour θ réel et n "grand", on prend une suite $x = x^{(n)}$ de la forme $x_k = n^{-1/2}\,\mathrm{e}^{ik\theta}$ pour $1 \le k \le n$ et $x_k = 0$ sinon, ou bien une suite de la forme $x_k = n^{-1/2}\,\mathrm{e}^{ik\theta}$ pour $-n \le k \le -1$ et zéro sinon.

d. Montrer que le spectre de T *contient la couronne* $\{z \in \mathbb{C} : 1 \le |z| \le 2\}$. *Déterminer le spectre de* T.

Cette question n'a pas été résolue ; il était pourtant assez facile de voir que pour tout λ tel que $1 < |\lambda| < 2$, l'opérateur adjoint T^* admet un sous-espace propre de dimension 1 pour la valeur λ. Le spectre de T est donc égal à la couronne $\{z \in \mathbb{C} : 1 \le |z| \le 2\}$.

Exercice II

On considère l'espace de Hilbert $\mathrm{H} = \mathrm{L}_2(0,1)$ *et le sous-espace vectoriel* D *de* H *formé des fonctions* $f \in \mathrm{H}^1(0,1)$ *dont la dérivée généralisée* f' *est également dans* $\mathrm{H}^1(0,1)$, *et telles que* $f(0) = f(1) = 0$, *c'est-à-dire*

$$\mathrm{D} = \{f \in \mathrm{H}^1(0,1) : f' \in \mathrm{H}^1(0,1),\ f(0) = f(1) = 0\}.$$

On définit un opérateur non borné T *sur* H, *de domaine* D, *en posant* $\mathrm{T}f = -f''$ *pour toute* $f \in \mathrm{D}$, *où* $f'' \in \mathrm{H}$ *désigne la dérivée généralisée de* f'.

a. Montrer que T *est densément défini et fermé.*

Densément défini est évident, puisque le domaine D proposé contient $\mathcal{D}(]0,1[)$ qui est dense dans $L_2(0,1)$. D'après le cours, les fonctions f du domaine vérifient

$$f'(x) - f'(0) = \int_0^x f''(t)\,dt, \quad f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\,dt,$$

pour tout $x \in (0,1)$. Si une suite (f_n, f_n'') converge dans $L_2 \times L_2$ vers un couple (f,g), on aura par la première relation que les fonctions $f_n' - f_n'(0)$ convergent vers la fonction $G : x \to \int_0^x g(t)\,dt$, uniformément sur $[0,1]$; on aura ensuite que

$$f_n(x) - f_n'(0)\,x = \int_0^x (f_n'(t) - f_n'(0))\,dt$$

converge vers $\int_0^x G(t)\,dt$, mais une sous-suite (f_{n_j}) converge simplement presque partout vers f, donc par différence $(f_{n_j}'(0))$ doit converger vers une limite a. Alors

$$f(x) - a\,x = \int_0^x G(t)\,dt$$

permet de montrer que $f \in D$ et $g = f''$.

b. Montrer que pour toute fonction $g \in H$, *il existe une solution unique* $f \in D$ *pour l'équation*

$$Tf + f = g,$$

et que f *peut s'exprimer au moyen de la formule*

$$-2\,f(x) = e^x \int_0^x e^{-t}\,g(t)\,dt + e^{-x} \int_x^1 e^t\,g(t)\,dt + a\,e^x + b\,e^{-x},$$

où a *et* b *sont des scalaires dépendant de* g, *qu'on déterminera.*

Il est facile de vérifier que la formule proposée donne une fonction $f \in D$, qui est telle que $-f'' + f = g$. Si on sait calculer on trouve facilement les valeurs qu'il faut donner à a et à b. Pour l'unicité : on doit vérifier que si $-f'' + f = 0$ avec $f \in D$, alors $f = 0$; on note d'abord que f est continue car elle est dans H^1, et $f'' = f$ implique que f est de classe C^2, puis C^∞ ; il ne reste qu'à vérifier que les solutions classiques de cette équation, qui vérifient en plus $f(0) = f(1) = 0$, sont nulles.

c. Montrer que $B = (T + \mathrm{Id}_H)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ *est un opérateur de Hilbert-Schmidt et expliciter son noyau* $K(x,t)$.

On interprète l'écriture de f à la question précédente sous la forme

$$f(x) = (Bg)(x) = (T + \mathrm{Id})^{-1} g(x) = \int_0^1 K(x,t) g(t)\,dt,$$

et en explicitant un peu on voit que K est une fonction mesurable bornée, donc de carré intégrable sur $[0,1]^2$, donc B est bien d'un opérateur de Hilbert-Schmidt.

d. Montrer que T *est autoadjoint. Montrer qu'il existe une base orthonormée* $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ *de* H*, formée de vecteurs de* D*, et des scalaires* $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ *tels que* $\mathrm{T}\varphi_n = \lambda_n \varphi_n$ *pour tout entier* $n \geq 1$*. Montrer que les éléments de* D *sont les fonctions* f *de la forme*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{n^2\pi^2+1} \sin(n\pi x),$$

où $\sum_n |c_n|^2 < +\infty$.

Si on a été courageux on a pu constater que le noyau $\mathrm{K}(x,y)$ de la question précédente est réel symétrique, donc B est hermitien, et il est injectif ; on a vu en cours que son inverse (non borné) $\mathrm{T} + \mathrm{Id}$ est alors autoadjoint. Il en résulte que T est autoadjoint lui aussi.

Puisque B est hermitien compact injectif, il existe une base hilbertienne de H formée de vecteurs φ_n tels que $\mathrm{B}\varphi_n = \mu_n \varphi_n$, μ_n réel $\neq 0$. Puisque B est à valeurs dans D par définition, ces vecteurs sont dans D. Par le même raisonnement qu'avant, on voit que si $\mathrm{B}\varphi = \mu\varphi$ avec $\mu \neq 0$, $\varphi \neq 0$, la fonction φ vérifie l'équation différentielle classique

$$\mu(-\varphi'' + \varphi) = \varphi, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \varphi'' = (1-\mu^{-1})\varphi.$$

Si $\mu = 1$, $\varphi'' = 0$, donc φ est affine, donc nulle puisqu'elle est nulle aux deux bords, donc $\mu = 1$ ne convient pas pour trouver un vecteur propre. Dans les autres cas, on voit qu'on ne peut trouver que les fonctions $\sin(n\pi x)$, $n \geq 1$. On trouvera donc les μ_n de la forme $(1+n^2\pi^2)^{-1}$, $n \geq 1$, et la base hilbertienne des $\varphi_n(x) = \sqrt{2}\,\sin(n\pi x)$, $n \geq 1$.

Pour finir l'ensemble D est exactement l'image de H par l'opérateur B ; à toute fonction $g = \sum_{n\geq 1} c_n \varphi_n$ de H, où $\sum |c_n|^2 < +\infty$ correspond l'image par B

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{n^2\pi^2+1} \sin(n\pi x).$$

e. Démontrer pour tous $x, t \in [0,1]$ *l'identité*

$$\mathrm{ch}(|x-t|-1) - \mathrm{ch}(x+t-1) = 2\Big(\mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}}\Big)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2\pi^2+1} \sin(n\pi x)\sin(n\pi t)\right).$$

Si on a bien calculé le noyau $\mathrm{K}(x,y)$ il ne reste plus qu'à dire que

$$\mathrm{K} = \sum_{n\geq 1} \mu_n\, \varphi_n \otimes \varphi_n = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{1+n^2\pi^2}\, \varphi_n \otimes \varphi_n$$

au sens de L_2, et à remarquer que l'égalité est aussi vraie partout (convergence normale : type de raisonnement vu en cours).

Exercice III

On considère l'espace de Hilbert complexe $\mathrm{H} = \ell_2(\mathbb{N})$*, l'idéal* $\mathcal{K}(\mathrm{H})$ *de* $\mathcal{L}(\mathrm{H})$ *formé des endomorphismes compacts, et l'algèbre de Calkin* $\mathcal{C} = \mathcal{L}(\mathrm{H})/\mathcal{K}(\mathrm{H})$*. Pour tout* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$*, on désigne par* $\mathrm{T}_\mathcal{C}$ *l'élément de* $\mathcal{C}$ *égal à la classe de* T *modulo les opérateurs compacts. On munit* $\mathcal{C}$ *de la norme quotient, c'est-à-dire que* $\|\mathrm{T}_\mathcal{C}\|_\mathcal{C}$ *est l'inf des normes des opérateurs* $\mathrm{T}+\mathrm{K}$*, où* K *parcourt l'idéal* $\mathcal{K}(\mathrm{H})$.

a. Montrer que

$$\|\mathrm{T}_\mathcal{C}\|_\mathcal{C} = \inf\{\|\mathrm{T}_{|\mathrm{Y}}\| : \mathrm{Y} \subset \mathrm{H},\ \operatorname{codim} \mathrm{Y} < +\infty\}$$

(on rappelle que si $\mathrm{K} \in \mathcal{K}(\mathrm{H})$*, il existe pour tout* $\varepsilon > 0$ *un sous-espace* Y *de codimension finie tel que* $\|\mathrm{K}_{|\mathrm{Y}}\| < \varepsilon$*).*

Il y a eu un petit malentendu sans conséquence : plusieurs ont interprété $\mathrm{T}_{|\mathrm{Y}}$ comme l'endomorphisme $\mathrm{T} \circ \mathrm{P}_\mathrm{Y}$ de H obtenu en projetant d'abord sur Y, puis en faisant opérer T, alors que je pensais à la restriction, opérant de Y dans H.

De toutes façons : si on choisit K compact tel que $\|\mathrm{T}+\mathrm{K}\| < \|\mathrm{T}\|_\mathcal{C} + \varepsilon/2$ et si on choisit Y de codimension finie tel que $\|\mathrm{K}_{|\mathrm{Y}}\| < \varepsilon/2$, on aura

$$\|\mathrm{T}_{|\mathrm{Y}}\| \le \|(\mathrm{T}+\mathrm{K})_{|\mathrm{Y}}\| + \|\mathrm{K}_{|\mathrm{Y}}\| < \|\mathrm{T}\|_\mathcal{C} + \varepsilon.$$

Inversement, si on a $\|\mathrm{T}_{|\mathrm{Y}}\| < t$ avec $\operatorname{codim} \mathrm{Y} < +\infty$, on a bien $\|\mathrm{T} \circ \mathrm{P}_\mathrm{Y}\| = \|\mathrm{T}_{|\mathrm{Y}}\| < t$, et $\mathrm{T} \circ \mathrm{P}_\mathrm{Y}$ est une perturbation de rang fini de T, donc

$$\|\mathrm{T}_\mathcal{C}\|_\mathcal{C} \le \|\mathrm{T} \circ \mathrm{P}_\mathrm{Y}\| < t.$$

b. En déduire que $\|(\mathrm{T}^*)_\mathcal{C}\mathrm{T}_\mathcal{C}\|_\mathcal{C} = \|\mathrm{T}_\mathcal{C}\|^2_\mathcal{C}$ *; montrer que la classe* $(\mathrm{T}^*)_\mathcal{C}$ *ne dépend que de* $\mathrm{T}_\mathcal{C}$*, et que* $\mathcal{C}$ *est une* C^**-algèbre, si on pose* $(\mathrm{T}_\mathcal{C})^* = (\mathrm{T}^*)_\mathcal{C}$ *pour tout* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$.

Pour montrer tout ce qu'il faut, on a besoin de savoir que K^* est compact quand K est compact, ce que je n'ai jamais eu l'occasion de dire en cours ; on pouvait passer par le fait que sur un Hilbert, un opérateur est compact si et seulement s'il est limite d'opérateurs de rang fini.

Cela étant, il en résulte que la classe de l'adjoint est bien définie, et il est facile de voir que si on l'appelle $(\mathrm{T}_\mathcal{C})^*$, on a bien l'antilinéarité, l'involution. Il ne reste que la condition de norme $\|(\mathrm{T}^*)_\mathcal{C}\mathrm{T}_\mathcal{C}\|_\mathcal{C} = \|\mathrm{T}_\mathcal{C}\|^2_\mathcal{C}$.

L'inégalité $\|(\mathrm{T}^*)_\mathcal{C}\mathrm{T}_\mathcal{C}\|_\mathcal{C} \le \|\mathrm{T}_\mathcal{C}\|^2_\mathcal{C}$ est facile. Comme $(\mathrm{T}^*)_\mathcal{C}\mathrm{T}_\mathcal{C}$ est la classe de $\mathrm{T}^*\mathrm{T}$, on calcule $\|(\mathrm{T}^*)_\mathcal{C}\mathrm{T}_\mathcal{C}\|_\mathcal{C}$ à partir des normes des restrictions de $\mathrm{T}^*\mathrm{T}$ aux sous-espaces Y de codimension finie. Si $\|\mathrm{T}_\mathcal{C}\|_\mathcal{C} = t$, on a $\|\mathrm{T}_{|\mathrm{Y}}\| \ge t$ pour tout Y, donc il existe $y \in \mathrm{Y}$ de norme 1 tel que

$$\langle (\mathrm{T}^*\mathrm{T})y, y\rangle = \langle \mathrm{T}y, \mathrm{T}y\rangle = \|\mathrm{T}y\|^2 \ge t^2 - \varepsilon.$$

Il en résulte que $\|(\mathrm{T}^*\mathrm{T})y\|^2 \ge t^2 - \varepsilon$, donc la norme de la restriction de $\mathrm{T}^*\mathrm{T}$ à tout Y de codimension finie est $\ge t^2 = \|\mathrm{T}_\mathcal{C}\|^2_\mathcal{C}$.

c. Soit $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *le shift à droite ; montrer que son image* $\mathrm{S}_\mathcal{C}$ *est un élément unitaire de la* C^**-algèbre* $\mathcal{C}$.

Pour le shift à droite on a $\mathrm{S}^*\mathrm{S} = \mathrm{Id}$ et $\mathrm{Id} - \mathrm{S}\mathrm{S}^*$ est un projecteur de rang un, donc compact. En passant aux classes,

$$(\mathrm{S}_\mathcal{C})^*\mathrm{S}_\mathcal{C} = \mathrm{S}_\mathcal{C}(\mathrm{S}_\mathcal{C})^* = 1_\mathcal{C},$$

ce qui est la définition des unitaires.

d. On rappelle que $\mathrm{Sp(S)} = \mathbb{T}$*, le cercle unité du plan complexe. Soit* f *une fonction complexe continue sur le cercle unité, qui ne s'annule en aucun point de* $\mathbb{T}$ *; montrer que tout opérateur* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *dont l'image* $\mathrm{T}_{\mathcal{C}}$ *est égale à* $f(\mathrm{S}_{\mathcal{C}})$ *est un opérateur de Fredholm. Quel est l'indice de cet opérateur* T *dans le cas où* $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{Z}$ *?*

Puisque $\mathrm{S}_{\mathcal{C}}$ est unitaire, donc normal, le calcul fonctionnel continu s'applique pour définir $b = f(\mathrm{S}_{\mathcal{C}})$. Si f ne s'annule pas sur le spectre, b est inversible ; on a vu en cours qu'un opérateur qui est inversible modulo les compacts est de Fredholm.

Lorsque $f(z) = z^n$, $n \geq 0$, on peut déjà faire le calcul polynomial de $f(\mathrm{S}) = \mathrm{S}^n$, dont l'image sera bien $f(\mathrm{S}_{\mathcal{S}})$. L'opérateur S^n est injectif, mais son image est de codimension n (il y manque les vecteurs $e_0, \ldots, e_{n-1}$ de la base hilbertienne canonique). L'indice est donc $-n$. Pour $n < 0$ on prendra $(\mathrm{S}^*)^{-n}$ dont l'image sera $f(\mathrm{S}_{\mathcal{C}})$; l'indice est encore $-n$.

e. On verra la fonction f *de la question précédente comme un chemin fermé dans* $\mathbb{C}$ *qui ne passe pas par* 0*. On suppose qu'il existe une homotopie continue* $(f_t)_{t\in[0,1]}$ *de* $f = f_0$ *vers le chemin* $f_1(z) = z^n$*, telle qu'aucun chemin* f_t *ne passe par* 0*. Calculer l'indice d'un opérateur* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *tel que* $\mathrm{T}_{\mathcal{C}} = f(\mathrm{S}_{\mathcal{C}})$ *en fonction de l'indice du chemin* f *par rapport à* 0*,*

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_f \frac{dw}{w}.$$

Il faut utiliser l'invariance de l'indice par petite perturbation. En se ramenant au chemin f_1, on conclura que l'indice de T est l'opposé de l'indice du chemin f.