Exercices du cours “Théorie spectrale”, automne 2003

Exercice 1.1. On définit un opérateur linéaire P sur $\mathrm{L}_2(0,1)$ en posant pour toute fonction $f \in \mathrm{L}_2(0,1)$

$$\forall s \in (0,1), \quad (\mathrm{P}f)(s) = \int_0^s f(t)\,dt.$$

Vérifier que P est borné ; montrer que P est compact ; montrer que P est injectif.

Déterminer l'adjoint P^*. Diagonaliser $\mathrm{P}^*\mathrm{P}$.

Exercice 1.2. Si A est un espace de Banach muni d'une structure d'algèbre avec un produit continu, montrer qu'on peut adjoindre une unité en considérant $\mathrm{B} = \mathrm{A} \times \mathbb{K}$ et en forçant le couple $1_\mathrm{B} = (0_\mathrm{A}, 1)$ à être l'unité d'un produit à définir sur B.

Si A est un espace de Banach muni d'une structure d'algèbre unitaire avec produit continu montrer qu'on peut trouver une norme équivalente sur A telle que $\|1_\mathrm{A}\| = 1$, $\|xy\| \le \|x\|\,\|y\|$ (indication : utiliser les opérateurs de multiplication).

Exercice 1.3. On suppose que K est un espace topologique compact, f une fonction continue sur K ; on définit un opérateur borné $\mathrm{M}_f \in \mathcal{L}(\mathrm{C}(\mathrm{K}))$ en posant $\mathrm{M}_f(g) = f\,g$ pour toute $g \in \mathrm{C}(\mathrm{K})$. Quelle est la norme de M_f ? Déterminer le spectre de M_f. Quelles sont les valeurs propres de M_f ?

Soient H un espace de Hilbert complexe muni d'une base hilbertienne $(e_i)_{i\in\mathrm{I}}$ et $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ tel que $\mathrm{T}(e_i) = \lambda_i\, e_i$ pour tout $i \in \mathrm{I}$; déterminer le spectre de T.

Exercice 1.4. On désigne par $\mathbb{T}$ le cercle unité du plan complexe, et on considère la sous-algèbre fermée A de $\mathrm{C}(\mathbb{T})$ engendrée par les fonctions $f_j(z) = z^j$, $j \ge 0$. Vérifier que f_1 n'est pas inversible dans A, mais le devient dans $\mathrm{C}(\mathbb{T})$. Déterminer le spectre de f_1 dans les deux algèbres.

Exercice 1.5. Soit A une algèbre de Banach unitaire complexe ; à chaque élément $a \in \mathrm{A}$ on associe l'opérateur $\mathrm{M}_a \in \mathcal{L}(\mathrm{A})$ de multiplication par a,

$$\forall x \in \mathrm{A}, \quad \mathrm{M}_a(x) = a\,x.$$

Vérifier que $a \to \mathrm{M}_a$ est un homomorphisme d'algèbres de Banach unitaires, isométrique. Comparer les spectres de a dans A et de M_a dans $\mathcal{L}(\mathrm{A})$.

Quel changement si on étudie la multiplication $x \to x\,a$?

Exercice 1.6. Pour l'opérateur P de l'exercice **1.1**, estimer la norme de P^n et déduire que

$$\lim_n \|\mathrm{P}^n\|^{1/n} = 0.$$

Calculer explicitement la résolvante $\mathrm{R}_\lambda(\mathrm{P})$ pour tout scalaire $\lambda \ne 0$.

Théorie spectrale, automne 2003

Exercice 2.1. On désigne par H l'espace de Hilbert complexe $\mathrm{L}_2(0, \pi/2)$. Pour toute $f \in \mathrm{H}$, on définit une fonction $\mathrm{T}f$ sur $[0, \pi/2]$ par

$$\forall x \in [0, \pi/2], \quad (\mathrm{T}f)(x) = \sin(x) \int_0^x \cos(t) f(t)\, dt + \cos(x) \int_x^{\pi/2} \sin(t) f(t)\, dt.$$

Montrer que T est un opérateur hermitien compact, et le diagonaliser.

Exercice 2.2. Le classique du genre : on désigne par S l'endomorphisme de $\ell_2(\mathbb{N})$ défini pour tout $x = (x_0, x_1, \ldots) \in \ell_2(\mathbb{N})$ par la formule

$$\mathrm{S}x = \mathrm{S}(x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots) = (0, x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots).$$

Déterminer le spectre de S (cet opérateur s'appelle *shift* en anglais, *opérateur de décalage* en bon françois).

Exercice 2.3. Continuité du spectre : si a est un élément d'une algèbre de Banach unitaire complexe A, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que, si $\|a - b\| < \delta$, alors

$$\mathrm{Sp}(b) \subset (\mathrm{Sp}(a))_\varepsilon = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{dist}(\lambda, \mathrm{Sp}(a)) < \varepsilon\}.$$

Indication : considérer le maximum de la norme de $\mathrm{R}_\lambda(a)$ lorsque $\mathrm{dist}(\lambda, \mathrm{Sp}(a)) \geq \varepsilon$.

Exercice 2.4. Soient A une algèbre de Banach unitaire complexe et $a, b \in \mathrm{A}$; montrer que

$$\mathrm{Sp}(ab) \setminus \{0\} = \mathrm{Sp}(ba) \setminus \{0\}$$

(indication : si ab est petit, écrire l'inverse de $1_\mathrm{A} - ab$ par la série habituelle ; si ba est petit aussi, observer que cet inverse peut s'exprimer à partir de $1_\mathrm{A}, a, b$ et $(1_\mathrm{A} - ba)^{-1}$; montrer ensuite que la formule ainsi devinée est valable en général). Pourquoi doit-on exclure 0 ?

Exercice 2.5. Soient X un espace de Banach complexe et u une application linéaire isométrique de X dans X, telle que $u + \mathrm{Id}$ soit inversible ; montrer que u est inversible. Montrer que u est déjà inversible dans la sous-algèbre de Banach unitaire A de $\mathcal{L}(\mathrm{X})$ engendrée par les puissances u^n, $n \geq 0$.

Soit Y un sous-espace fermé de X, stable par u et soit $v = u_{|\mathrm{Y}} \in \mathcal{L}(\mathrm{Y})$ la restriction de u à Y ; montrer que la frontière du spectre de v est contenue dans le spectre de u. En déduire que $v(\mathrm{Y}) = \mathrm{Y}$.

Montrer que pour tout $x_0 \in \mathrm{X}$, le sous-espace fermé engendré par les vecteurs de la forme $\mathrm{P}(u)(x_0)$, $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$, est stable par u. En déduire qu'il existe une suite de polynômes (P_n) telle que $u\mathrm{P}_n(u)(x_0)$ tende vers x_0.

Théorie spectrale, automne 2003

Exercice 3.1. Montrer que la composition $T_{K_1} \circ T_{K_2}$ de deux opérateurs de Hilbert-Schmidt à noyaux T_{K_1} et T_{K_2} est un opérateur à noyau T_K, avec

$$K(s,t) = \int K_1(s,u) K_2(u,t) du.$$

Exercice 3.2. Soit T un opérateur de Hilbert-Schmidt de $L_2(T,\nu)$ dans $L_2(S,\mu)$, et soit $(g_n)_{n\geq 0}$ une base hilbertienne de $L_2(T,\nu)$; posons $F_n = Tg_n$. Montrer que

$$K(s,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n(s)\overline{g_n(t)}$$

définit une fonction de $L_2(S \times T, \mu \otimes \nu)$, et que $T = T_K$.

Exercice 3.3. Soit H un espace de Hilbert ; on suppose que $T \in \mathcal{L}(H)$ est compact ; montrer qu'il existe un sous-espace F de dimension finie tel que $\operatorname{dist}(Tx, F) < \varepsilon$ pour tout $x \in B_H$. Montrer que la restriction de T à l'orthogonal de $T^*(F)$ a une petite norme. En déduire qu'un opérateur de $\mathcal{L}(H)$ est compact si et seulement s'il est limite en norme d'une suite d'opérateurs de rang fini.

L'algèbre de Calkin $\mathcal{C}$ est le quotient de l'algèbre $A = \mathcal{L}(\ell_2(\mathbb{N}))$ par l'idéal formé des opérateurs compacts. Elle est munie de la norme quotient. Si $t \in \mathcal{C}$ est l'image de $T \in A$, comparer $\|t\|$ et

$$\inf\{\|T_{|Y}\| : \operatorname{codim}(Y) < +\infty\}.$$

Montrer que l'image s du shift $S \in \mathcal{L}(\ell_2(\mathbb{N}))$ est inversible dans l'algèbre $\mathcal{C}$. Déterminer le spectre de s.

Exercice 3.4. Intégrale vectorielle. On considère une application mesurable (abstraite) f d'un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$ dans un espace de Banach séparable X, c'est-à-dire que l'image inverse de tout ouvert de X est un ensemble de la tribu $\mathcal{A}$.

On dira qu'une application mesurable est X-étagée si elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs dans X. Montrer qu'il existe une suite (f_n) de fonctions X-étagées telle que

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \|f_n(\omega)\| \leq \|f(\omega)\| ; \quad f(\omega) = \lim_n f_n(\omega).$$

On pourra procéder ainsi : soit (x_k) une suite dense dans X, avec $x_0 = 0_X$; soit $k_n(\omega)$ le plus petit indice k tel que

$$\|f(\omega) - x_k\| = \min\{\|f(\omega) - x_j\| : 0 \leq j \leq n \text{ et } \|x_j\| \leq \|f(\omega)\|\} ;$$

on pose $f_n(\omega) = x_{k_n(\omega)}$.

On se donne une mesure μ sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Si $\varphi = \sum_{j=1}^n 1_{A_j} v_j$ est X-étagée on pose

$$\int \varphi \, d\mu = \sum_{j=1}^n \mu(A_j) v_j \in X.$$

Si $\int \|f(\omega)\| \, d\mu(\omega) < +\infty$, montrer que $\int \|f(\omega) - f_n(\omega)\| \, d\mu(\omega)$ tend vers 0, que la suite $(\int f_n d\mu)$ est de Cauchy dans X, et que sa limite ne dépend pas de la suite (f_n) choisie, pourvu que $\lim_n \int \|f(\omega) - f_n(\omega)\| \, d\mu(\omega) = 0$.

Théorie spectrale, automne 2003

Exercice 4.1. Si xy et yx sont inversibles, montrer que x est inversible.

Exercice 4.2. Soit A une C^*-algèbre ; montrer que tout élément $x \in \mathrm{A}$ peut se représenter sous la forme $x = a + \mathrm{i}b$ avec a, b hermitiens.

Exercice 4.3. Soient H un espace de Hilbert complexe, $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ un opérateur normal et λ un point isolé de $\mathrm{Sp(T)}$; montrer que λ est valeur propre de T.

Exercice 4.4. Soient A une C^*-algèbre, f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ (fonction entière) ; on introduit aussi $g(z) = zf(z)$. Montrer que

$$\forall x \in \mathrm{A}, \quad xf(x^*x) = f(xx^*)x\,; \quad g(x^*x) = x^*f(xx^*)x.$$

Exercice 4.5. Soient H un espace de Hilbert complexe, $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ un opérateur normal ; on pose $\mathrm{K} = \mathrm{Sp(T)}$. Montrer que pour tout vecteur $x \in \mathrm{H}$, la fonctionnelle ℓ_x définie sur C(K) par

$$\forall f \in \mathrm{C(K)}, \quad \ell_x(f) = \langle f(\mathrm{T})x, x\rangle$$

est une forme linéaire continue sur C(K), qui peut être représentée par une mesure $\mu_x \ge 0$ sur le compact $\mathrm{K} = \mathrm{Sp(T)}$.

Si S est un opérateur hermitien positif sur H, montrer que

$$\forall x \in \mathrm{H}, \quad \|\mathrm{S}x\|^2 \le \|\mathrm{S}\|\,\langle \mathrm{S}x, x\rangle.$$

Soit ω un ouvert de $\mathbb{C}$; on considère une suite croissante (φ_n) de fonctions réelles continues sur $\mathbb{C}$, telles que $0 \le \varphi_n \le 1$, qui tend simplement vers la fonction indicatrice 1_ω. Montrer que $(\varphi_n(\mathrm{T}))$ est une suite d'opérateurs hermitiens positifs de norme ≤ 1, telle que

$$\forall x \in \mathrm{H}, \quad \mathrm{P}x = \lim_n \varphi_n(\mathrm{T})x$$

existe dans H. Montrer que P commute avec T et T^*, que P est hermitien et $\mathrm{P}^2 = \mathrm{P}$. Montrer que P est nul si et seulement si ω est disjoint de K.

Exercice 4.6. Soit X un espace de Banach ; montrer qu'un opérateur $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$ est de Fredholm si et seulement si son image est inversible dans l'algèbre de Calkin $\mathcal{L}(\mathrm{X})/\mathcal{K}(\mathrm{X})$. Si X est complexe, montrer qu'il existe toujours $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}$ ne soit pas Fredholm.

Théorie spectrale, automne 2003

Exercice 5.1. Si $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ est un opérateur hermitien inversible, montrer que la norme de T^{-1} est l'inverse du minimum des valeurs absolues des éléments du spectre de T.

Soit $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ un opérateur positif ; montrer que T est positif si et seulement si $\|\lambda \,\mathrm{Id}_{\mathrm{H}} - \mathrm{T}\| \le \lambda$ pour λ réel positif assez grand.

Si $\mathrm{S}, \mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ sont deux opérateurs hermitiens positifs qui commutent, montrer que $\mathrm{S}\,\mathrm{T}$ est positif.

Exercice 5.2. Soit T un opérateur normal sur un espace de Hilbert complexe H ; on suppose que le spectre de T est la réunion de deux compacts de $\mathbb{C}$ disjoints, K_1 et K_2. On désigne par f_j, $j = 1, 2$ la fonction égale à 1 sur K_j et nulle en dehors. Montrer que $\mathrm{P}_j = f_j(\mathrm{T})$ est un projecteur orthogonal, qui commute avec T et avec T^*. Montrer qu'on peut décomposer l'espace H en somme directe orthogonale $\mathrm{H}_1 \oplus \mathrm{H}_2$, où $\mathrm{H}_j = \mathrm{P}_j(\mathrm{H})$; montrer que la restriction T_j de T à H_j est un opérateur normal sur H_j dont le spectre est égal à K_j.

Exercice 5.3. Si $\mathrm{T}_1 \in \mathcal{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ et $\mathrm{T}_2 \in \mathcal{L}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ sont deux opérateurs de Fredholm, montrer que $\mathrm{T}_2 \circ \mathrm{T}_1$ est de Fredholm de X dans Z, et que

$$\mathrm{ind}(\mathrm{T}_2 \circ \mathrm{T}_1) = \mathrm{ind}(\mathrm{T}_2) + \mathrm{ind}(\mathrm{T}_1).$$

Si T est Fredholm entre deux espaces de Hilbert, montrer que son adjoint T^* est de Fredholm, avec $\mathrm{ind}(\mathrm{T}^*) = -\,\mathrm{ind}(\mathrm{T})$.

Exercice 5.4. Montrer que l'opérateur T non borné sur $\mathrm{L}_2(0, 1)$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, dont le domaine est $\mathrm{C}([0, 1])$ et qui est défini par $\mathrm{T}f = f(1/2)$, n'est pas fermable.

Plus généralement, montrer qu'une forme linéaire qui définit un opérateur fermable sur un espace de Banach est bornée.

Exercice 5.5. On considère une suite quelconque $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de scalaires, et l'espace vectoriel

$$\mathrm{V} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sum (1 + |\alpha_n|^2)\, |x_n|^2 < +\infty\}.$$

Pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{V}$, on pose $\mathrm{T}x = (\alpha_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$; montrer que T est un opérateur fermé sur $\ell_2(\mathbb{N})$, densément défini ; déterminer son adjoint et son spectre.