2. Algèbres de Banach

Une *algèbre* sur $\mathbb{K}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel A, muni d'une multiplication associative $(a, b) \in \mathrm{A} \times \mathrm{A} \to ab \in \mathrm{A}$, telle que les applications $x \in \mathrm{A} \to ax$ et $x \to xa$ soit des endomorphismes de l'espace vectoriel A, pour tout $a \in \mathrm{A}$.

Une *algèbre de Banach unitaire* est un espace de Banach A, muni d'une multiplication d'algèbre possédant une unité 1_{A} et vérifiant

$$\forall a, b \in \mathrm{A}, \quad \|ab\| \leq \|a\| \, \|b\| \, ; \quad \|1_{\mathrm{A}}\| = 1.$$

Exercice. Adjonction d'unité ; renormage.

Exemples.

1. L'algèbre des matrices $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.
2. L'algèbre des endomorphismes $\mathcal{L}(\mathrm{X})$, si X est un espace de Banach $\neq \{0\}$.
3. Les espaces C(K), K compact non vide, ou l'espace $\mathrm{L}_\infty(0, 1)$, munis du produit ponctuel des fonctions, sont des exemples d'algèbres de Banach commutatives.
4. L'espace $\mathrm{L}_1(\mathbb{R})$, muni de la convolution comme produit, est un exemple d'algèbre sans unité ; pour ajouter une unité, on peut agrandir l'algèbre en considérant l'ensemble de toutes les mesures complexes $d\mu(x) = f(x)\, dx + \lambda \, d\delta_0(x)$, avec $f \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R})$, λ scalaire et δ_0 la mesure de Dirac en 0.
5. L'algèbre de Calkin est le quotient de $\mathcal{L}(\mathrm{H})$ par l'idéal des opérateurs compacts. Elle joue un rôle intéressant dans la théorie de Fredholm.

C-algèbres*

Une C*-*algèbre unitaire* est une algèbre de Banach unitaire complexe A, munie d'une application continue $a \in \mathrm{A} \to a^* \in \mathrm{A}$ *antilinéaire*, telle que $(ab)^* = b^* a^*$, $(a^*)^* = a$ (involution) et surtout

$$\forall a \in \mathrm{A}, \quad \|a^* a\| = \|a\|^2.$$

Il en résulte que $\|a^*\| = \|a\|$. L'exemple fondamental est l'espace $\mathcal{L}(\mathrm{H})$ des endomorphismes d'un espace de Hilbert complexe, en prenant pour T^* l'opérateur adjoint.

Inversement, on sait montrer que toute C*-algèbre est isomorphe à une sous-algèbre fermée d'un $\mathcal{L}(\mathrm{H})$, pour un certain espace de Hilbert H, sous-algèbre invariante par $\mathrm{T} \to \mathrm{T}^*$ et contenant l'application identique de H.

Un autre exemple est fourni par l'algèbre C(K) des fonctions complexes continues sur un compact K, munie de l'étoile

$$f^* = \overline{f}.$$

Cet exemple est commutatif. Le théorème précédent de représentation des C*-algèbres se complète par le suivant : toute C*-algèbre unitaire commutative est isomorphe à l'algèbre C(K) des fonctions complexes continues sur un certain compact K. Ce théorème s'applique en particulier à la C*-algèbre commutative $\mathrm{L}_\infty(0, 1)$ des classes de fonctions mesurables bornées.

Définition. Éléments hermitiens, normaux dans une C*-algèbre : on dit que $a \in \mathrm{A}$ est *hermitien* si $a^* = a$. Si $b \in \mathrm{A}$, l'élément $a = b^*b$ est hermitien. On dit que a est *normal* si $a^*a = aa^*$. On dit que $u \in \mathrm{A}$ est *unitaire* si $u^*u = uu^* = 1_{\mathrm{A}}$. Ces définitions généralisent le cas de l'algèbre $\mathcal{L}(\mathrm{H})$.

Éléments inversibles

Soit A une algèbre de Banach unitaire ; on dit que $a \in \mathrm{A}$ est *inversible dans* A s'il existe un élément $u \in \mathrm{A}$ tel que $au = ua = 1_{\mathrm{A}}$. Dans ce cas on note $a^{-1} = u$.

On va montrer que les éléments proches de 1_{A} sont inversibles ; la démonstration présente l'inverse au moyen d'une série vectorielle. Dans une algèbre de Banach, la continuité du produit permet de voir que

$$\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\Big)b = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n b).$$

On fait la convention $a^0 = 1_{\mathrm{A}}$; on remarque que $\|a^n\| \leq \|a\|^n$ pour tout entier $n \geq 0$.

Proposition 2.1. *Soient* A *une algèbre de Banach unitaire et* $a \in \mathrm{A}$ *; la série*

$$1_{\mathrm{A}} + a + a^2 + \cdots + a^n + \cdots$$

converge dans A *si et seulement si* $\inf_n \|a^n\| < 1$, *et dans ce cas sa somme est l'inverse de* $1_{\mathrm{A}} - a$. *En particulier*

$$\big(\|a\| < 1\big) \Rightarrow \big(1_{\mathrm{A}} - a \ \ \textit{inversible dans} \ \ \mathrm{A}\big).$$

Preuve. — Si la série ci-dessus converge, son terme général a^n doit tendre vers 0_{A}, donc $\inf_n \|a^n\| = 0 < 1$; inversement, si on a $\|a^m\| < 1$ pour un certain m, on en déduit que $\sum \|a^n\| < +\infty$ de la façon suivante : si $a^m = 0$, on a $a^n = 0$ pour tout $n \geq m$ et la convergence de la série est évidente ; sinon, on note que $m > 0$ (car $\|a^0\| = \|1_{\mathrm{A}}\| = 1$), on pose $\tau = \|a^m\|^{1/m}$; on a $0 < \tau < 1$, et on écrit alors pour n entier quelconque la division $n = mq + r$, avec $0 \leq r < m$; on obtient

$$\|a^n\| \leq \|a^{mq}\| \, \|a^r\| \leq \tau^{mq} \, \|a\|^r = \tau^{mq+r}\tau^{-r}\|a\|^r \leq \mathrm{M}\,\tau^n$$

avec $\mathrm{M} = \big(\|a\|/\tau\big)^m$ (noter que $\tau \leq \|a\|$) donc la série $\sum a^n$ converge normalement puisque la norme de son terme général est majorée par un multiple du terme général de la série géométrique convergente $\sum \tau^n$.

Si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n$ converge dans A, désignons par s sa somme ; alors as est égal à

$$a\big(1_{\mathrm{A}} + a + a^2 + \cdots + a^n + \cdots\big) = a + a^2 + \cdots + a^{n+1} + \cdots = s - 1_{\mathrm{A}},$$

donc $as = s - 1_{\mathrm{A}}$, c'est-à-dire $(1_{\mathrm{A}} - a)s = 1_{\mathrm{A}}$; de même $s(1_{\mathrm{A}} - a) = 1_{\mathrm{A}}$.

///

Exercice. Montrer que $\lim_n \|a^n\|^{1/n}$ existe.

Inverse de $u - a$

Si u est inversible et si a est assez petit pour que la série ci-dessous converge dans A, l'élément

$$x = u^{-1} + u^{-1} a\, u^{-1} + u^{-1} a\, u^{-1} a\, u^{-1} + \cdots$$

vérifie

$$ux = 1_{\mathrm{A}} + a\, u^{-1} + a\, u^{-1} a\, u^{-1} + \cdots$$

de sorte que $ux - ax = 1_{\mathrm{A}}$, et de même $xu - xa = 1_{\mathrm{A}}$. On en déduit que x est l'inverse de $u - a$. Pour que la série ci-dessus converge, il suffit que son terme général, qu'on peut écrire sous la forme $u^{-1}(au^{-1})^n$, soit majoré en norme par une série géométrique convergente ; c'est le cas dès que $\|au^{-1}\| < 1$, ce qui est garanti par la condition classique et simple

$$\|a\| < \|u^{-1}\|^{-1}.$$

Cas de $\mathcal{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$

Si T est un isomorphisme de X sur Y, si V désigne l'inverse de T et si S est un « petit » opérateur, on aura encore

$$(\mathrm{T} - \mathrm{S})^{-1} = \mathrm{V} + \mathrm{VSV} + \mathrm{VSVSV} + \cdots$$

ce qui prouve la stabilité des isomorphismes par perturbation.

Spectre d'un élément $a \in \mathrm{A}$

On suppose que A est une algèbre de Banach unitaire *complexe*. Si a est un élément de A, on désigne par $\rho(a)$ l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $a - \lambda 1_{\mathrm{A}}$ soit inversible dans A. Par la stabilité des inversibles, on voit que $\rho(a)$ est un ouvert. On dit que $\rho(a)$ est *l'ensemble résolvant* de a. La *résolvante de a* est l'application définie sur l'ouvert $\rho(a)$, à valeurs dans A,

$$\forall \lambda \in \rho(a), \quad \mathrm{R}_\lambda(a) = (\lambda 1_{\mathrm{A}} - a)^{-1} \in \mathrm{A}.$$

Si $|\lambda| > \|a\|$, on a $\|a/\lambda\| < 1$ et $1_{\mathrm{A}} - a/\lambda$ est inversible par la proposition 2.1, donc $a - \lambda 1_{\mathrm{A}}$ aussi et par conséquent $\lambda \in \rho(a)$. On voit que l'ensemble $\rho(a)$ contient le complémentaire du disque fermé de rayon $\|a\|$. On précisera ce résultat un peu plus loin.

Le spectre $\sigma(a)$ est le complémentaire dans $\mathbb{C}$ de $\rho(a)$. Il est fermé et borné par $\|a\|$. Désignons par $r(a)$ le sup des modules des éléments du spectre. On va montrer plus loin que le spectre est non vide, et que

$$r(a) = \lim_n \|a^n\|^{1/n}$$

(formule du rayon spectral).

Exemple. Si A est une C*-algèbre unitaire, il est clair que b est inversible dans A si et seulement si b^* est inversible, et $(b^*)^{-1} = (b^{-1})^*$. En appliquant cette observation à $b = a - \lambda 1_{\mathrm{A}}$, on voit que

$$\sigma(a^*) = \{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma(a)\}.$$

Si on considère le shift à droite S dans $\ell_2(\mathbb{N})$, on voit que pour tout λ tel que $|\lambda| < 1$, le vecteur $x_\lambda = (\lambda^n)_{n\geq 0}$ est un vecteur de $\ell_2(\mathbb{N})$ tel que $\mathrm{S}^* x_\lambda = \lambda x_\lambda$. Le spectre de S^* contient donc le disque unité ouvert. Comme $\|\mathrm{S}\| = 1$, le spectre est contenu dans le disque unité fermé, donc

$$\sigma(\mathrm{S}) = \{\lambda : |\lambda| \leq 1\}.$$

Remarque. Changement d'algèbre. Le spectre diminue quand on augmente l'algèbre (il y a plus de candidats pour être inverse d'un élément). Mais on verra que le bord du spectre initial reste dans le spectre après augmentation.

Exemple. Fonctions de A(D) plongées dans C($\mathbb{T}$) : notons $\mathbb{T}$ le cercle unité du plan complexe ; l'algèbre A(D) est formée des fonctions continues f sur $\mathbb{T}$ qui se prolongent en une fonction $\widetilde{f}$, continue dans le disque unité fermé et holomorphe dans le disque unité ouvert. C'est une sous-algèbre unitaire de C($\mathbb{T}$). L'élément $z \to z$ n'est pas inversible dans la petite algèbre A(D), mais le devient dans la grosse C($\mathbb{T}$).

Proposition. *L'ensemble des éléments inversibles de* A *forme un sous-groupe multiplicatif ouvert* G(A).

Preuve. — Sous-groupe est bien connu, ouvert résulte de ce qui précède.

///

Une forme du théorème de Hahn-Banach

Soit X *un espace normé, réel ou complexe ; pour tout vecteur* $x \in \mathrm{X}$, *il existe une forme linéaire continue* ξ *sur* X *telle que*

$$\xi(x) = \|x\| \,; \quad \|\xi\| \leq 1.$$

En particulier, pour tout vecteur $x \neq 0$ dans X, il existe une forme linéaire continue ξ sur X telle que $\xi(x) \neq 0$.

Fonctions holomorphes vectorielles

Définition. Si f est une fonction définie sur un ouvert Ω du plan complexe, à valeurs dans un espace de Banach X, on dit que f est *analytique* dans Ω si pour tout $z \in \Omega$ il existe $\delta_z > 0$ et des vecteurs $(x_n(z)) \subset \mathrm{X}$ tels que

$$(h \in \mathbb{C},\ |h| \leq \delta_z) \Rightarrow f(z+h) = \sum_{n=0}^{+\infty} h^n\, x_n(z).$$

Si f est analytique dans Ω, il en résulte que f est continue de Ω dans X : si $z \in \Omega$, posons $\delta = \delta_z > 0$, et $x_n = x_n(z) \in \mathrm{X}$; la série $\sum h^n x_n$ converge pour $h = \delta$, donc la suite $(\delta^n \|x_n\|)$ est bornée, disons par M. Alors

$$\|f(z+h) - f(z)\| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |h|^n\, \|x_n\| \leq \mathrm{M} \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{|h|}{\delta}\Big)^n = \mathrm{M}\, \frac{|h|}{\delta - |h|}$$

tend vers 0 avec h.

Si f est analytique dans le disque ouvert $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$ et si $\rho < \mathrm{R}$, la fonction $\theta \to \|f(\rho\,\mathrm{e}^{i\theta})\|$ est continue sur le compact $[0,2\pi]$, ce qui permet de considérer

$$\mathrm{M}_\rho(f) = \max\{\|f(\rho\,\mathrm{e}^{i\theta})\| : \theta \in [0,2\pi]\}.$$

Lemme 2.2. *Si f est une fonction analytique dans le disque ouvert $\Omega = \mathrm{D}(0,\mathrm{R})$ du plan complexe, où $0 < \mathrm{R} \leq +\infty$, à valeurs dans un espace de Banach X, et si*

$$(*) \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} z^n\, x_n$$

est son développement au voisinage de 0, valable pour $|z| \leq \delta_0$, on a pour tout $\rho < \mathrm{R}$

$$\sup_{n\geq 0} \rho^n\, \|x_n\| \leq \mathrm{M}_\rho(f).$$

Il en résulte que le développement en 0 donné par $(*)$ converge dans tout le disque Ω, et que sa somme représente la fonction f dans tout le disque Ω.

Preuve. — Pour toute forme linéaire ξ continue sur X la fonction $f_\xi = \xi \circ f$ est holomorphe dans le disque Ω. Fixons $\rho < \mathrm{R}$; la fonction $z \to \|f(z)\|$ est bornée par le nombre $\mathrm{M}_\rho = \mathrm{M}_\rho(f)$ sur ce cercle. Sur le même cercle la fonction f_ξ est bornée par $\mathrm{M}_\rho\,\|\xi\|$, donc par les inégalités de Cauchy on a pour les dérivées en 0

$$\rho^n\, |f_\xi^{(n)}(0)| \leq n!\, \mathrm{M}_\rho\, \|\xi\|.$$

Le développement de Taylor de f_ξ au voisinage de 0 est donné par

$$f_\xi(h) = \xi\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} h^n\, x_n\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} h^n\, \xi(x_n)$$

donc $n!\,\xi(x_n) = f_\xi^{(n)}(0)$ pour tout $n \geq 0$, et on a

$$\rho^n\, |\xi(x_n)| \leq \mathrm{M}_\rho\, \|\xi\|.$$

Par le théorème de Hahn-Banach, il existe une forme linéaire ξ_n telle que $\|\xi_n\| \leq 1$ et $\xi(x_n) = \|x_n\|$; on en déduit

$$\rho^n\, \|x_n\| \leq \mathrm{M}_\rho.$$

Ces majorations impliquent que la série $(*)$ converge normalement dans tout le disque ouvert $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$; posons $\mathrm{F}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n x_n$; pour toute forme linéaire continue ξ sur X, la fonction scalaire $\mathrm{F}_\xi(z) = \xi(\mathrm{F}(z)) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \xi(x_n)$ est holomorphe dans $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$, et elle coïncide avec f_ξ dans un voisinage de 0 ; ces deux fonctions sont donc égales en tout point de $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$ (principe des zéros isolés, par exemple). On a donc pour tout $z \in \mathrm{D}(0,\mathrm{R})$

$$\xi\big(\mathrm{F}(z) - f(z)\big) = 0,$$

pour toute forme linéaire continue ξ, donc $\mathrm{F}(z) = f(z)$ par le théorème de Hahn-Banach.

///

Corollaire 2.3. *Si $f : \mathbb{C} \to \mathrm{X}$ est analytique et bornée sur $\mathbb{C}$, alors f est constante ; si $f : \mathbb{C} \to \mathrm{X}$ est analytique et tend vers 0 à l'infini, alors f est identiquement nulle.*

Preuve. — On sait d'après le lemme précédent que f est représentée sur $\mathbb{C}$ par sa série entière à l'origine $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n x_n$. Si f reste bornée sur $\mathbb{C}$, il existe un nombre M qui majore tous les $\mathrm{M}_\rho(f)$, donc pour tout $n > 0$ et tout $\rho > 0$

$$\|x_n\| \leq \frac{\mathrm{M}}{\rho^n},$$

ce qui montre, en faisant tendre ρ vers l'infini, que $x_n = 0$ pour tout $n > 0$, donc $f = x_0$ est constante. Si f tend vers 0 à l'infini, elle est d'abord bornée donc constante, et la constante $x_0 \in \mathrm{X}$ doit être nulle.

///

Formule du rayon spectral

Soit a un élément d'une algèbre de Banach unitaire complexe A ; posons

$$r_* = \liminf_n \|a^n\|^{1/n}.$$

Si $z \in \mathbb{C}$ est tel que

$$1 > |z|\, r_* = \liminf_n \|z^n a^n\|^{1/n},$$

il existe certainement des entiers m tels que $\|z^m a^m\| < 1$, et par conséquent la série $\sum z^n a^n$ converge dans A et sa somme est l'inverse de $1 - za$, d'après la proposition 2.1. On voit donc que $z^{-1} - a$ est inversible quand $|z| < 1/r_*$, donc $\lambda = z^{-1} \in \rho(a)$ lorsque $|\lambda| > r_*$: le spectre $\sigma(a)$ est contenu dans le disque fermé centré en 0 et de rayon r_*. Considérons plus généralement la fonction

$$f(z) = (1_\mathrm{A} - za)^{-1}$$

qui est définie dans l'ensemble Ω des $z \in \mathbb{C}$ tels que $1_\mathrm{A} - za$ soit inversible ; cet ensemble Ω est ouvert, car

$$\Omega = \mathrm{D}(0, 1/r_*) \cup \{z \neq 0 : z^{-1} \in \rho(a)\} = \{0\} \cup \{z \neq 0 : z^{-1} \in \rho(a)\}.$$

Si $z \in \Omega$, cherchons à calculer $f(z + h) = (1_\mathrm{A} - za - ha)^{-1}$ pour $h \in \mathbb{C}$ assez petit ; posons $u = 1_\mathrm{A} - za$, et considérons l'inverse $v = f(z)$ de u ; en écrivant $1_\mathrm{A} - za - ha = u - ha = u(1_\mathrm{A} - h\,va)$, on voit que

$$f(z + h) = (1_\mathrm{A} - h\,va)^{-1} v = v + h\,vav + h^2\,vavav + \cdots$$

pour h assez petit, c'est-à-dire que $f(z+h)$ est représenté par la série précédente, qui est de la forme $\sum h^n b_n(z)$, avec $(b_n(z)) \subset \mathrm{A}$. Il en résulte que la fonction f est analytique dans l'ouvert Ω.

Montrons d'abord que le spectre est non vide. Dans le cas contraire, $\rho(a) = \mathbb{C}$, $\Omega = \mathbb{C}$ et f est analytique sur $\mathbb{C}$ tout entier ; de plus $0 \notin \sigma(a)$, donc a est inversible, et pour $z \neq 0$ on a

$$f(z) = -z^{-1}\,(a - z^{-1} 1_\mathrm{A})^{-1}\,;$$

par continuité de l'application $u \to u^{-1}$ sur l'ouvert $\mathrm{G(A)}$, l'inverse $(a - z^{-1}1_{\mathrm{A}})^{-1}$ tend vers a^{-1} lorsque $|z| \to +\infty$, donc

$$\lim_{|z|\to+\infty} f(z) = 0.$$

Si f était analytique sur $\mathbb{C}$, le théorème de Liouville donnerait $f = 0$ partout : or ceci est impossible car les valeurs de f sont des inverses, donc des éléments non nuls.

On peut donc considérer un complexe $\lambda_0 \in \sigma(a)$ dont le module soit maximal, c'est-à-dire que $|\lambda_0| = r(a)$; on sait déjà que $|\lambda_0| \leq r_*$; si $\lambda_0 \neq 0$, l'élément $1 - \lambda_0^{-1}a$ n'est pas inversible, ce qui montre que f ne peut pas être définie dans un disque plus grand que le disque ouvert $\mathrm{D}(0, \mathrm{R})$ de rayon $\mathrm{R} = |\lambda_0|^{-1}$. Cette affirmation est évidemment vraie aussi quand $\lambda_0 = 0$, car $\mathrm{D}(0, \mathrm{R}) = \mathbb{C}$ dans ce cas. On a vu que $\mathrm{R} \geq 1/r_*$. On va appliquer le lemme 2.2 dans le disque ouvert $\mathrm{D}(0, \mathrm{R})$. Le développement de f au voisinage de 0 est donné par

$$f(z) = 1 + z\,a + z^2\,a^2 + \cdots + z^n\,a^n + \cdots$$

D'après le lemme 2.2, on a

$$\sup_n \rho^n \|a^n\| < \infty$$

pour tout $\rho < \mathrm{R}$, donc en posant

$$r^* = \limsup_n \|a^n\|^{1/n}$$

on obtient $\rho\, r^* \leq 1$, ce qui donne $\mathrm{R}\, r^* \leq 1$ à la limite. On a donc en regroupant nos informations

$$1/r_* \leq \mathrm{R} \leq 1/r^*.$$

Comme il est clair que $r_* \leq r^*$, on obtient l'égalité $r_* = r^* = \lim_n \|a^n\|^{1/n} = 1/\mathrm{R}$. Ceci donne la formule du rayon spectral,

$$|\lambda_0| = 1/\mathrm{R} = r(a) = \lim_n \|a^n\|^{1/n}.$$

Exemples.

1. Commençons par une application classique de la non vacuité du spectre : si dans une algèbre de Banach unitaire complexe A tout élément non nul est inversible, alors $\mathrm{A} = \mathbb{C}1_{\mathrm{A}}$ (l'ensemble des multiples scalaires de l'unité) ; si B est une algèbre de Banach unitaire complexe et I un idéal maximal, il résulte que le quotient $\mathrm{A} = \mathrm{B}/\mathrm{I}$ vérifie la conclusion précédente, ce qui signifie que I est un hyperplan de B.

2. Pour une isométrie $\mathrm{U} \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$, on a $\|\mathrm{U}^n\| = 1$ pour tout n, donc $r(\mathrm{U}) = 1$. On a de façon générale, si u est inversible dans une algèbre de Banach

$$\sigma(u^{-1}) = \{1/\lambda : \lambda \in \sigma(u)\}.$$

Si $\mathrm{U} \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$ est une isométrie surjective, donc inversible, on aura aussi $r(\mathrm{U}^{-1}) = 1$, ce qui entraîne que le spectre de U est contenu dans le cercle unité.

3. Si b est un élément hermitien d'une C^*-algèbre, on a $\|b^2\| = \|b^*b\| = \|b\|^2$. Ensuite b^2 est hermitien et on continue, $\|b^4\| = \|b\|^4$, etc... pour montrer que $\|b^{2^n}\| = \|b\|^{2^n}$ pour tout n, et conclure que $r(b) = \|b\|$. Si a est normal, on introduit $b = a^*a$ hermitien, et on écrit $\|a^2\|^2 = \|a^*a^*aa\| = \|a^*aa^*a\| = \|a^*a\|^2 = \|a\|^4$, etc... On a ainsi obtenu le résultat important qui suit.

Proposition 2.4. *Si a est un élément normal d'une* C*-*algèbre, on a* $r(a) = \|a\|$.

Exercice. Estimer les normes des puissances P^n de l'opérateur de primitive (sur $\mathrm{L}_2(0,1)$) et en déduire que $\sigma(\mathrm{P}) = \{0\}$.

Intégrale de Riemann vectorielle

Soit X un espace de Banach ; on dit qu'une fonction $g : [a,b] \to \mathrm{X}$ est *en escalier* s'il existe une subdivision $\tau : t_0 = a < t_1 < \ldots < t_n = b$ de l'intervalle telle que g soit constante sur chaque intervalle ouvert (t_{i-1}, t_i), pour $i = 1, \ldots, n$. Si $x_i \in \mathrm{X}$ désigne la valeur (vectorielle) constante de g sur l'intervalle (t_{i-1}, t_i), on pose

$$\int_a^b g(t)\,dt = \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) g(x_i) \in \mathrm{X}.$$

On vérifie comme dans le cas scalaire que cette somme ne dépend que de la fonction g, et pas de la subdivision choisie. On a la majoration facile

$$\Big\| \int_a^b g(t)\,dt \Big\| \leq \int_a^b \|g(t)\|\,dt.$$

Si f est continue de $[a,b]$ dans X, on vérifie que les sommes de Riemann

$$\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) f(\xi_i) \in \mathrm{X}$$

convergent vers un vecteur $\mathrm{I} \in \mathrm{X}$ lorsque le pas $\delta(\tau) = \max\{|t_i - t_{i-1}| : i = 1, \ldots, n\}$ de la subdivision τ tend vers 0. Le vecteur limite I s'appelle l'intégrale de f,

$$\int_a^b f(t)\,dt = \mathrm{I} = \lim_{\delta(\tau)\to 0} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) f(\xi_i) \in \mathrm{X}.$$

On obtient, en passant à la limite à partir des fonctions en escalier, la majoration simple mais importante

$$\Big\| \int_a^b f(t)\,dt \Big\| \leq \int_a^b \|f(t)\|\,dt.$$

Premiers rudiments de calcul fonctionnel holomorphe

Dans tout le paragraphe qui suit, a désigne un élément d'une algèbre de Banach unitaire complexe A, $\mathrm{U} = \mathrm{D}(0,\mathrm{R}) \subset \mathbb{C}$ est un disque ouvert centré en 0 et de rayon R qui contient le spectre de a, c'est-à-dire que $r(a) < \mathrm{R}$. Supposons que φ soit une fonction complexe, holomorphe dans U. On sait que φ est représentée dans le disque ouvert de rayon R par sa série de Taylor, qui est absolument convergente en tout point de $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$,

$$\forall z \in \mathrm{D}(0,\mathrm{R}), \quad \varphi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$$

où les (c_n) sont des nombres complexes. Choisissons ρ tel que $r(a) < \rho < \mathrm{R}$. On sait que $\sum |c_n|\rho^n < +\infty$. Considérons la série vectorielle

$$(*) \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n a^n.$$

Puisque $r(a) = \lim \|a^n\|^{1/n} < \rho$, on aura $\|a^n\| \leq \rho^n$ pour n assez grand, ce qui montre que la série $(*)$ est normalement convergente, donc convergente dans l'espace complet A. Il est raisonnable de poser

$$\widetilde{\varphi}(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n a^n \in \mathrm{A}.$$

On a choisi d'écrire $\widetilde{\varphi}(a)$ plutôt que $\varphi(a)$, pour éviter des confusions lors du premier contact avec cette notion. Par la suite on écrira simplement $\varphi(a)$ (et on définira ainsi e^a pour tout élément $a \in \mathrm{A}$, sans utiliser de tilde de précaution, qu'on ne saurait pas où mettre de toute façon). On a aussi la formule de Cauchy, écrite de façon incorrecte mais suggestive,

$$\widetilde{\varphi}(a) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_\rho} \frac{\varphi(z)}{z-a}\, dz$$

où γ_ρ désigne le cercle de rayon ρ, parcouru dans le sens direct, ou de façon correcte comme

$$\widetilde{\varphi}(a) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_\rho} \varphi(z)(z1_{\mathrm{A}} - a)^{-1}\, dz = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_\rho} \varphi(z)\, \mathrm{R}_z(a)\, dz.$$

En effet, lorsque $|z| = \rho$, $a - z1_{\mathrm{A}}$ est inversible et on peut écrire

$$(z1_{\mathrm{A}} - a)^{-1} = z^{-1}(1_{\mathrm{A}} - z^{-1}a)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n-1} a^n,$$

où la série est normalement convergente sur le cercle γ_ρ. On a donc

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_\rho} \varphi(z)(z1_{\mathrm{A}} - a)^{-1}\, dz = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_\rho} z^{-n-1}\varphi(z)\, dz\Big) a^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n a^n.$$

Si on paramétrise le cercle par $\theta \in [0, 2\pi] \to \rho\, \mathrm{e}^{i\theta}$, on obtient l'expression

$$\widetilde{\varphi}(a) = \int_0^{2\pi} \varphi(\rho\, \mathrm{e}^{i\theta})(\rho\, \mathrm{e}^{i\theta} - a)^{-1}\, \rho\, \frac{d\theta}{2\pi}$$

qui permet d'obtenir la majoration

$$\|\widetilde{\varphi}(a)\| \leq \rho\, \mathrm{M}_\rho(\varphi)\, \max\{\|\mathrm{R}_\lambda(a)\| : |\lambda| = \rho\},$$

où on a posé comme précédemment pour une fonction g continue dans le disque U

$$\mathrm{M}_\rho(g) = \max\{|g(\rho\, \mathrm{e}^{i\theta})| : \theta \in \mathbb{R}\}.$$

Corollaire. *Si une suite (φ_n) de fonctions holomorphes dans un disque ouvert* U *contenant le spectre de a tend uniformément vers φ sur tout compact de* U*, alors*

$$\widetilde{\varphi}(a) = \lim_n \widetilde{\varphi_n}(a).$$

Preuve. — Soit ρ tel que $r(a) < \rho < \mathrm{R}$; la fonction vectorielle $z \to (z1_{\mathrm{A}} - a)^{-1} \in \mathrm{A}$ est continue sur le cercle de rayon ρ, donc bornée en norme sur ce cercle par un certain C. On peut majorer la norme de la différence des deux intégrales représentant $\varphi_n(a)$ et $\varphi(a)$ par $\mathrm{C}\,\rho\,\mathrm{M}_\rho(\varphi - \varphi_n)$, qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

///

Corollaire. *Si φ et ψ sont holomorphes dans un disque ouvert* U *contenant le spectre de a, on a*

$$\widetilde{(\varphi\psi)}\,(a) = \widetilde{\varphi}(a)\,\widetilde{\psi}(a).$$

Preuve. — On peut trouver deux suites de polynômes (P_n) et (Q_n) qui tendent respectivement vers φ et ψ, uniformément sur tout compact de U (il suffit de prendre les sommes partielles des séries de Taylor). Pour des polynômes il est facile de voir que $(\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n)\,(a) = \mathrm{P}_n(a)\,\mathrm{Q}_n(a)$. On obtient le résultat en passant à la limite, grâce à la continuité du produit dans A.

///

Exemples. Désormais on laisse tomber les tildes.

1. Pour tout entier $k \geq 0$, $(\varphi^k)\,(a) = (\varphi(a))^k$, et donc pour tout polynôme P on a $(\mathrm{P}(\varphi))\,(a) = \mathrm{P}(\varphi(a))$.
2. On a $\mathrm{e}^{sa}\,\mathrm{e}^{ta} = \mathrm{e}^{(s+t)a}$; si a est hermitien, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}$ est unitaire.

Corollaire. *Si φ est holomorphe dans un disque ouvert* U *contenant le spectre de a, on a l'égalité*

$$(\mathrm{e}^{\varphi})\,(a) = \mathrm{e}^{\varphi(a)}\,.$$

Preuve. — On trouve une suite de polynômes (P_n) qui tend vers la fonction exponentielle, uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$. Pour un polynôme P_n, il résulte du corollaire précédent (et de l'exemple 1 ci-dessus) que

$$(\mathrm{P}_n(\varphi))\,(a) = \mathrm{P}_n(\varphi(a)).$$

La suite $(\mathrm{P}_n(\varphi))$ tend uniformément vers e^{φ} sur tout compact de U, donc $(\mathrm{P}_n(\varphi))(a)$ tend vers $(\mathrm{e}^{\varphi})(a)$; de l'autre côté, $\mathrm{P}_n(\varphi(a))$ tend vers $\mathrm{e}^{\varphi(a)}$.

///

Remarque. La fonction exponentielle ne joue pas un rôle très particulier dans ce qui précède. Le même résultat vaudrait pour toute fonction entière ψ (une fonction ψ holomorphe sur $\mathbb{C}$), donnant

$$(\psi(\varphi))\,(a) = \psi(\varphi(a)).$$

Proposition. *Tout élément $b \in \mathrm{A}$ tel que $\|b - 1_{\mathrm{A}}\| < 1$ peut s'écrire e^c pour un certain $c \in \mathrm{A}$.*

Preuve. — On applique ce qui précède avec $\mathrm{U} = \mathrm{D}(0,1)$, $\varphi(z) = \ln(1-z)$. Posons $a = 1_{\mathrm{A}} - b$; si $\|a\| < 1$, on aura $r(a) < 1$, ce qui nous met dans le cadre voulu. On obtient

$$\mathrm{e}^{\varphi(a)} = (\mathrm{e}^{\varphi})(a) = 1_{\mathrm{A}} - a = b.$$

///