4. Opérateurs de Fredholm

Sous-espaces de dimension et de codimension finie

Lemme 4.1. Projection sur un sous-espace de dimension finie. *Si* E *est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace normé* X*, il existe un projecteur* P *continu sur* X *tel que* $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{E}$.

Preuve. — On choisit une base $e_1, \ldots, e_n$ de E, et on désigne par e_j^*, $j = 1, \ldots, n$ les formes linéaires coordonnées sur E ; par le théorème de Hahn-Banach on peut prolonger ces formes linéaires sur E en formes linéaires continues $x_1^*, \ldots, x_n^*$ sur X. On pose

$$\forall x \in \mathrm{X}, \quad \mathrm{P}x = \sum_{j=1}^{n} x_j^*(x) e_j.$$

Il est clair que P est continue, et il est facile de vérifier que P est une projection de X sur E.

///

Corollaire 4.2. *Si* E *est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace normé* X*, il existe un sous-espace vectoriel fermé* $\mathrm{Y} \subset \mathrm{X}$ *tel que* $\mathrm{X} = \mathrm{E} \oplus \mathrm{Y}$.

Preuve. — Il suffit de prendre pour Y le noyau de la projection P de X sur E donnée par le lemme précédent.

///

Définition. Un sous-espace vectoriel fermé $\mathrm{Y} \subset \mathrm{X}$ est *de codimension finie dans* X si le quotient X/Y est de dimension finie. La *codimension* de Y dans X est la dimension de l'espace vectoriel quotient X/Y. On la notera $\operatorname{codim}_\mathrm{X} \mathrm{Y}$ ou simplement $\operatorname{codim} \mathrm{Y}$ si aucune confusion n'est à craindre.

Si X/Y est de dimension finie n et si on relève une base $(\hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_n)$ du quotient en des vecteurs $(f_1, \ldots, f_n)$ de X, on obtient un système libre qui engendre un sous-espace vectoriel F de X, de dimension finie égale à $n = \operatorname{codim} \mathrm{Y}$, tel que $\mathrm{X} = \mathrm{Y} \oplus \mathrm{F}$. Il est clair qu'affirmer que $\mathrm{X} = \mathrm{Y} \oplus \mathrm{F}$, avec F de dimension finie d, équivaut à dire que Y est de codimension finie égale à d. Notons π_Y la projection canonique de X sur X/Y, qui associe à chaque vecteur $x \in \mathrm{X}$ sa classe $\pi_\mathrm{Y}(x)$ modulo Y, c'est-à-dire

$$\pi_\mathrm{Y}(x) = \{x + y : y \in \mathrm{Y}\}.$$

On rappelle que la norme de l'espace quotient X/Y est définie par

$$\forall x \in \mathrm{X}, \quad \|\pi_\mathrm{Y}(x)\| = \inf\{\|x + y\| : y \in \mathrm{Y}\},$$

ce qui signifie que la norme de la classe est l'inf des normes des éléments de la classe. Si on écrit la norme quotient sous la forme équivalente

$$\|\pi_\mathrm{Y}(x)\| = \inf\{\|x - y\| : y \in \mathrm{Y}\},$$

on voit que $\|\pi_\mathrm{Y}(x)\|$ est aussi la distance de x au sous-espace Y : si $x \notin \mathrm{Y}$, cette distance est > 0 puisque Y est fermé, c'est-à-dire que $\|\pi_\mathrm{Y}(x)\| > 0$ quand la classe n'est pas la classe nulle ; il s'agit donc bien d'une *norme* sur le quotient. On va faire quelques remarques simples mais utiles.

1. *Si* $\mathrm{X} = \mathrm{Y} + \mathrm{F}$ *avec* F *de dimension finie, alors* Y *est de codimension finie et* $\operatorname{codim} \mathrm{Y} \le \dim \mathrm{F}$. *La codimension de* Y *est* $\le k$ *si et seulement s'il existe* F *de dimension* $\le k$ *tel que* $\mathrm{X} = \mathrm{Y} + \mathrm{F}$.

Si $\mathrm{X} = \mathrm{Y} + \mathrm{F}$, alors $\mathrm{X}/\mathrm{Y} = \pi_{\mathrm{Y}}(\mathrm{F})$, qui est donc un espace de dimension finie $\le \dim \mathrm{F}$.

2. *Si* $\mathrm{Y} \cap \mathrm{F} = \{0\}$ *avec* F *de dimension finie, alors* $\operatorname{codim} \mathrm{Y} \ge \dim \mathrm{F}$. *La codimension de* Y *est* $\ge k$ *si et seulement s'il existe* F *de dimension* k *tel que* $\mathrm{Y} \cap \mathrm{F} = \{0\}$.

Si $\mathrm{Y} \cap \mathrm{F} = \{0\}$, la projection π_{Y} est injective sur F, donc l'image $\pi_{\mathrm{Y}}(\mathrm{F})$ a la même dimension que F et par conséquent $\dim \mathrm{X}/\mathrm{Y} \ge \dim \mathrm{F}$. Si $\dim \mathrm{X}/\mathrm{Y} \ge k$, on peut trouver k vecteurs indépendants $\hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_k$ dans X/Y ; si on relève ces vecteurs en $f_1, \ldots, f_k \in \mathrm{X}$, l'espace $\mathrm{F} = \operatorname{Vect}(f_1, \ldots, f_k)$ est de dimension k et $\mathrm{Y} \cap \mathrm{F} = \{0\}$.

3. *Codim dans codim : si* Z *est de codimension* k *dans* Y *et* Y *de codimension* ℓ *dans* X, *alors* Z *est de codimension* $k + \ell$ *dans* X.

On peut écrire $\mathrm{X} = \mathrm{Y} \oplus \mathrm{E}$ et $\mathrm{Y} = \mathrm{Z} \oplus \mathrm{F}$, avec E et F de dimensions finies égales aux codimensions respectives ; alors la relation $\mathrm{X} = \mathrm{Z} \oplus (\mathrm{E} \oplus \mathrm{F})$ montre que

$$\operatorname{codim}_{\mathrm{X}} \mathrm{Z} = \operatorname{codim}_{\mathrm{Y}} \mathrm{Z} + \operatorname{codim}_{\mathrm{X}} \mathrm{Y}.$$

4. *L'intersection d'un sous-espace fermé* Z *avec un sous-espace de codimension finie* Y *est de codimension finie dans* Z.

L'image $\pi_{\mathrm{Y}}(\mathrm{Z})$ est de dimension finie, donc admet une base $(\hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_d)$, qu'on relève en $(f_1, \ldots, f_d)$ dans Z ; on pose $\mathrm{F} = \operatorname{Vect}(f_1, \ldots f_d)$, et on constate que $\mathrm{Z} = (\mathrm{Z} \cap \mathrm{Y}) + \mathrm{F}$. En effet, si $z \in \mathrm{Z}$ on écrit $\pi_{\mathrm{Y}}(z) = \sum c_j \hat{f}_j$, et on voit que $z - \sum c_j f_j$ est dans $\mathrm{Z} \cap \mathrm{Y}$.

5. *L'intersection* $\mathrm{Z} \cap \mathrm{Y}$ *d'un sous-espace de dimension infinie* $\mathrm{Z} \subset \mathrm{X}$ *avec un sous-espace* Y *de codimension finie dans* X *est de dimension infinie.*

On a vu que l'espace $\mathrm{Z} \cap \mathrm{Y}$ est de codimension finie dans Z, donc $\mathrm{Z} = (\mathrm{Z} \cap \mathrm{Y}) \oplus \mathrm{F}$, avec $\dim \mathrm{F} < +\infty$; il n'est pas possible que $\mathrm{Z} \cap \mathrm{Y}$ soit de dimension finie, puisque $\dim \mathrm{Z} = +\infty$.

Projection de $\mathrm{Y} + \mathrm{F}$ *sur* F

On suppose que Y est un sous-espace fermé d'un espace normé X, et F un sous-espace de dimension finie tel que $\mathrm{Y} \cap \mathrm{F} = \{0\}$. On a

$$\delta = \min\{\operatorname{dist}(f, \mathrm{Y}) : f \in \mathrm{S}_{\mathrm{F}}\} > 0$$

car la sphère unité de F est compacte et disjointe du fermé Y. On en déduit par homogénéité

$$\|y + f\| \ge \delta \|f\|$$

pour tous $f \in \mathrm{F}$, $y \in \mathrm{Y}$. La projection naturelle P de $\mathrm{Y} + \mathrm{F}$ sur F, définie par $\mathrm{P}(y + f) = f$, est donc de norme $\le \delta^{-1}$, et la projection $\mathrm{Q} = \mathrm{Id} - \mathrm{P}$ de $\mathrm{Y} + \mathrm{F}$ sur Y est alors de norme $\le 1 + \delta^{-1}$, c'est-à-dire que

$$\|y + f\| \ge \delta(1 + \delta)^{-1} \|y\|$$

pour tous $f \in \mathrm{F}$, $y \in \mathrm{Y}$. Si π_{F} désigne la projection de X sur X/F, on a donc pour tout $y \in \mathrm{Y}$

$$(\mathrm{Q_F}) \qquad \|\pi_{\mathrm{F}}(y)\|_{\mathrm{X/F}} \geq \delta(1+\delta)^{-1}\|y\|.$$

Lemme 4.3. *Si* Y *est un sous-espace fermé d'un espace normé* X *et* F *un sous-espace de dimension finie, la somme* $\mathrm{Y}+\mathrm{F}$ *est fermée dans* X.

Preuve. — Supposons d'abord que $\mathrm{Y} \cap \mathrm{F} = \{0\}$; supposons qu'une suite de vecteurs $(y_n + f_n) \subset \mathrm{Y}+\mathrm{F}$ tende vers un vecteur $x \in \mathrm{X}$. Soit P la projection (continue) de $\mathrm{Y}+\mathrm{F}$ sur F discutée ci-dessus ; la suite $(y_n + f_n)$ est bornée puisque convergente vers x, donc son image (f_n) par P est bornée dans F. Par Bolzano, on trouve une sous-suite (f_{n_k}) qui tend vers un $f \in \mathrm{F}$, et par différence y_{n_k} converge aussi, vers un $y \in \mathrm{Y}$ puisque Y est fermé. Finalement, $x = y + f \in \mathrm{Y}+\mathrm{F}$.

Dans le cas général, on écrit $\mathrm{F} = (\mathrm{F} \cap \mathrm{Y}) \oplus \mathrm{F}_1$ et on constate que $\mathrm{Y}+\mathrm{F} = \mathrm{Y}+\mathrm{F}_1$ avec $\mathrm{Y} \cap \mathrm{F}_1 = \{0\}$.

///

Plongements d'un espace de Banach dans un autre

À partir de maintenant il est important de supposer que les espaces considérés sont **complets**. On suppose que X et Y sont deux espaces de Banach, tous les deux réels ou tous les deux complexes.

Définition. On dira que $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ est un *plongement* de X dans Y s'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$(\mathrm{P}) \qquad \forall x \in \mathrm{X}, \quad \|\mathrm{T}x\| \geq c\,\|x\|.$$

Il est clair que les opérateurs proches de T vérifient encore la propriété, mais pour un $c' < c$ voisin de c : par l'inégalité triangulaire, on aura pour tout $x \in \mathrm{X}$

$$\|(\mathrm{T}+\mathrm{S})x\| \geq \|\mathrm{T}x\| - \|\mathrm{S}x\| \geq (c - \|\mathrm{S}\|)\,\|x\|$$

ce qui montre que $\mathrm{T}' = \mathrm{T}+\mathrm{S}$ est encore un plongement si $\|\mathrm{S}\| < c$.

L'image par un plongement T de tout sous-espace fermé de X est fermée dans Y ; cette propriété sera montrée plus loin dans le cas plus général des *presque-plongements*, mais montrons tout de suite que l'image T(X) est fermée : si une suite $(\mathrm{T}x_n)$ converge vers un point $y \in \mathrm{Y}$, elle est de Cauchy ; comme $\|x_n - x_m\| \leq c^{-1}\|\mathrm{T}x_n - \mathrm{T}x_m\|$, on voit que la suite (x_n) est de Cauchy dans X, donc converge vers un $x \in \mathrm{X}$ et $y = \mathrm{T}x$.

On peut remarquer que T est un plongement si et seulement s'il n'existe pas de suite $(x_n) \subset \mathrm{X}$ de vecteurs de norme 1 telle que $\mathrm{T}x_n \to 0$: si T n'est pas un plongement, il n'existe aucune constante $c > 0$ vérifiant la définition de plongement, c'est-à-dire que pour tout n il existe un vecteur $x_n \in \mathrm{X}$ tel que $\|\mathrm{T}x_n\| < 2^{-n}\|x_n\|$; en multipliant x_n par un scalaire > 0, on peut se ramener à une suite $(x_n) \subset \mathrm{X}$ de vecteurs de norme 1, telle que $\mathrm{T}x_n \to 0$. L'implication inverse est évidente.

En particulier, un endomorphisme $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$ est un plongement si et seulement si 0 n'est pas valeur propre approchée de T.

Par ailleurs, il est clair que T est un plongement de X dans Y si et seulement si T induit un isomorphisme T_1 de X sur l'image T(X) : l'opérateur T_1 est l'élément de $\mathcal{L}(X, T(X))$ défini par $T_1 x = Tx$ pour tout $x \in X$. Si T est un plongement, T est injectif et T_1 est bijectif, donc on peut définir l'inverse algébrique S de T_1, opérant de T(X) vers X ; l'inégalité (P) de la définition des plongements montre que $\|S\| \le 1/c$, donc $S \in \mathcal{L}(T(X), X)$ et T_1 est bien un isomorphisme d'espaces de Banach entre X et T(X).

Stabilité de la codimension de l'image

Lemme 4.4. *Si* T *est un plongement de* X *dans* Y *et si la codimension de* T(X) *dans* Y *(finie ou infinie) est* $\ge k$, *il en est de même pour les opérateurs* T' *voisins de* T.

Si T *est un plongement et si la codimension de* T(X) *dans* Y *est finie égale à* k, *il en est de même pour les opérateurs* T' *voisins de* T.

Si T *est un plongement et si la codimension de* T(X) *dans* Y *est infinie, il en est de même pour les opérateurs* T' *voisins de* T.

Preuve. — Si la codimension de T(X) dans Y est $\ge k$, on peut trouver un sous-espace $F \subset Y$ de dimension k tel que $T(X) \cap F = \{0\}$; alors la projection π_F de Y sur Y/F induit un plongement de T(X) dans Y/F d'après l'inégalité (Q_F), et $\pi_F \circ T$ est aussi un plongement par composition évidente,

$$\forall x \in X, \quad \|\pi_F(Tx)\|_{Y/F} \ge \delta(1+\delta)^{-1}\|Tx\| \ge \delta(1+\delta)^{-1}\, c\,\|x\| ;$$

il en est de même pour les voisins T' de T (car alors $\pi_F \circ T'$ est voisin de $\pi_F \circ T$) ; en particulier $\pi_F \circ T'$ est injectif quand T' est voisin de T, donc $F \cap T'(X) = \{0\}$ et par conséquent $\operatorname{codim}_Y T'(X) \ge k$.

Si la codimension de T(X) dans Y est égale à k, on a $Y = T(X) \oplus F$ pour un certain F de dimension k ; l'application $\pi_F \circ T$ reste un plongement comme avant, mais de plus $\pi_F(T(X)) = Y/F$, donc $\pi_F \circ T$ est surjective de X sur Y/F, et $\pi_F \circ T$ est un isomorphisme de X sur Y/F ; ceci passe aux voisins T' (stabilité des isomorphismes : résulte de la proposition 2.1) et donne le résultat voulu.

Soit T un plongement tel que $\operatorname{codim}_Y T(X) = +\infty$, et soit B une boule ouverte dans $\mathcal{L}(X, Y)$, centrée en T et de rayon assez petit pour que tous ses éléments soient des plongements ; pour chaque entier k, l'ensemble W_k des opérateurs $S \in B$ vérifiant l'inégalité $\operatorname{codim}_Y S(X) \ge k$ est ouvert dans $\mathcal{L}(X, Y)$ d'après ce qui précède, ainsi que l'ensemble V_k des S tel que $\operatorname{codim}_Y S(X) = k$. Il en résulte que V_k est aussi fermé dans B (son complémentaire est formé de l'ouvert W_{k+1} et des ouverts V_j, $j < k$). Par la connexité de la boule B, chacun de ces ensembles V_k est vide ou égal à B. Si $\operatorname{codim}_Y T(X)$ est infinie, aucun de ces ensembles n'est égal à B : ils sont donc tous vides, et la boule B est entièrement formée d'opérateurs S avec $\operatorname{codim}_Y S(X) = +\infty$.

///

Faute de mieux, on adoptera ici la terminologie suivante (qui m'est tout à fait personnelle).

Définition. On dira que $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ est un *presque-plongement* de X dans Y s'il existe un sous-espace de codimension finie $X_1 \subset X$ et une constante $c > 0$ tels que

$$\text{(PP)} \qquad \forall x \in X_1, \quad \|Tx\| \ge c\,\|x\|.$$

Il est clair que les opérateurs proches de T vérifient encore la propriété, avec le même sous-espace X_1 mais pour un $c' < c$ voisin de c.

Si T est un presque-plongement, on voit que le noyau de T est de dimension finie, puisqu'il ne peut pas rencontrer le sous-espace X_1 de codimension finie, sur lequel T est injectif, ailleurs qu'en 0 : on a donc $\dim \ker T \le \operatorname{codim}_X X_1 < +\infty$; de plus, l'image par T de tout sous-espace fermé de X est fermée dans Y : si Z est un sous-espace fermé de l'espace X_1 de la définition, il est clair que T(Z) est complet, donc fermé ; en effet, toute suite de Cauchy (y_n) dans T(Z) peut s'écrire $y_n = Tx_n$ avec $(x_n) \subset Z \subset X_1$, donc d'après (PP)

$$\|x_m - x_n\| \le c^{-1}\|Tx_m - Tx_n\|$$

tend vers 0 avec m, n ; la suite de Cauchy (x_n) converge vers un $x \in Z$ puisque Z est complet, et $y_n = Tx_n$ converge vers $Tx \in T(Z)$. Si Z est un sous-espace fermé quelconque, on écrit $Z = (Z \cap X_1) \oplus F$ avec F de dimension finie, puis $T(Z) = T(Z \cap X_1) + T(F)$ est fermé comme somme d'un sous-espace fermé et d'un sous-espace de dimension finie, par le lemme 4.3.

On a déjà montré la moitié du résultat qui suit.

Proposition 4.5. *Un opérateur* $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ *est un presque-plongement si et seulement si son noyau est de dimension finie et son image fermée. Dans ce cas, la restriction* T_1 *de* T *à tout supplémentaire* X_1 *du noyau* ker T *est un plongement de* X_1 *dans* Y.

Preuve. — Supposons ker T de dimension finie et T(X) fermé. D'après le corollaire 4.2, on peut trouver X_1 fermé tel que $X = X_1 \oplus \ker T$; alors $T(X_1) = T(X)$ est un espace de Banach, et $T_1 = T_{|X_1} \in \mathcal{L}(X_1, T(X))$ est une bijection continue. D'après le théorème des isomorphismes de Banach, la bijection inverse est continue, donc T_1 est un isomorphisme de X_1 sur $T(X_1)$. Si $S \in \mathcal{L}(T(X), X_1)$ est l'inverse de T_1, on voit que

$$\forall x \in X_1, \quad \|x\| = \|STx\| \le \|S\|\,\|Tx\|$$

ce qui donne la propriété de plongement pour T_1, avec $c = \|S\|^{-1}$.

///

Opérateurs de Fredholm

Définition 4.6. Soient X, Y deux espaces de Banach ; on dit que $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ est un *opérateur de Fredholm* s'il existe un sous-espace fermé $X_1 \subset X$ de codimension finie, tel que la restriction de T à X_1 soit un isomorphisme de X_1 sur $Y_1 = T(X_1)$, et que $\operatorname{codim}_Y T(X_1) < +\infty$. Autrement dit : on a $\operatorname{codim}_X X_1 < +\infty$, $\operatorname{codim}_Y T(X_1) < +\infty$ et il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\forall x \in X_1, \quad \|Tx\| \ge c\,\|x\|.$$

La quantité

$$\operatorname{codim}_X X_1 - \operatorname{codim}_Y T(X_1)$$

ne dépend pas du choix de X_1 ; on l'appelle *l'indice* de T, qui est noté ind(T).

L'indépendance de l'indice par rapport au choix de X_1 est facile à prouver si X_2 est un autre choix avec $X_2 \subset X_1$; dans ce cas on peut écrire $X_1 = X_2 \oplus E$ avec $\dim E < +\infty$, et $T(X_1) = T(X_2) \oplus T(E)$. Comme T est injectif sur X_1 et que E est contenu dans X_1, on a $\dim T(E) = \dim(E)$ et

$$\operatorname{codim}_X X_2 - \operatorname{codim}_Y T(X_2) = (\operatorname{codim}_X X_1 + \dim E) - (\operatorname{codim}_Y T(X_1) + \dim T(E)).$$

Dans le cas général on passera par l'intermédiaire de l'espace $X_3 = X_1 \cap X_2$, qui est de codimension finie.

Remarque. Dans le langage du précédent paragraphe, un opérateur de Fredholm est un presque-plongement dont l'image est de codimension finie. Les opérateurs de Fredholm ont donc les propriétés des presque-plongements : le noyau est de dimension finie, tout sous-espace fermé de X a une image T(X) fermée dans Y.

Proposition. *Un opérateur* $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ *est de Fredholm si et seulement si son noyau est de dimension finie et son image fermée de codimension finie. On a dans ce cas*

$$\operatorname{ind}(T) = \dim \ker T - \operatorname{codim}_Y T(X).$$

Preuve. — Supposons que T soit Fredholm au sens de la définition 4.6 ; puisque T est un presque-plongement, on sait que $\dim \ker T$ est finie, et on sait que l'image T(X) est fermée ; de plus, T(X) est de codimension finie dans Y puisque $T(X_1)$ est déjà de codimension finie.

Inversement, supposons $\ker T$ de dimension finie et T(X) fermé de codimension finie. D'après le corollaire 4.2, on peut trouver X_1 fermé tel que $X = X_1 \oplus \ker T$ et on a vu à la proposition 4.5 que T induit un isomorphisme de X_1 sur $T(X_1)$. L'indice calculé avec ce choix de X_1 est égal à

$$\operatorname{codim}_X X_1 - \operatorname{codim}_Y T(X_1) = \dim \ker T - \operatorname{codim}_Y T(X).$$

///

Exemples.

1. Le shift $S \in \mathcal{L}(\ell_2(\mathbb{N}))$ est une isométrie dont l'image est l'hyperplan fermé de $\ell_2(\mathbb{N})$ constitué des vecteurs $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que $x_0 = 0$. On voit que S est un opérateur de Fredholm, et $\operatorname{ind}(S) = 0 - 1 = -1$.

L'adjoint S^* a un noyau de dimension 1, et il est surjectif ; son indice est $1 = -\operatorname{ind}(S)$. C'est un fait général : si $T \in \mathcal{L}(H, K)$ est de Fredholm, son adjoint est de Fredholm et $\operatorname{ind}(T^*) = -\operatorname{ind}(T)$.

2. L'opérateur $T : f \to f''$ est un opérateur de Fredholm de $X = C^2([0, 1])$ dans $Y = C([0, 1])$. Il est clairement surjectif et son noyau est de dimension 2 (fonctions affines). On a donc $\operatorname{ind}(T) = 2$.

Exercice 4.7. Si T et U sont Fredholm, $U \circ T$ est Fredholm et

$$\mathrm{ind}(U \circ T) = \mathrm{ind}(T) + \mathrm{ind}(U).$$

Indication. Si $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ est un plongement sur $X_1 \subset X$ et $U \in \mathcal{L}(Y, Z)$ un plongement sur $Y_1 \subset Y$, considérer le sous-espace $Y_2 = T(X_1) \cap Y_1$ de Y, ainsi que le sous-espace $X_2 = X_1 \cap T^{-1}(Y_2)$ de X ; compter les dimensions.

Pour un presque-plongement général, l'image est fermée dans Y mais elle peut être de codimension infinie. On dit dans ce cas que T est *semi-Fredholm*, d'indice généralisé égal à $-\infty$. On a aussi des semi-Fredholm d'indice $+\infty$, dont l'image est fermée de codimension finie, mais le noyau de dimension infinie. Leur étude peut se ramener au cas de l'indice généralisé $-\infty$ en passant à l'application transposée (définie de Y^* dans X^*), mais nous n'insisterons pas sur ce cas.

Si T est Fredholm ou semi-Fredholm d'indice $-\infty$, cela signifie exactement que T est un presque-plongement ; il existe un sous-espace fermé X_1 de codimension finie tel que la restriction de T à X_1 soit un plongement ; on sait que les voisins T' de T sont aussi des plongements sur X_1, et $\mathrm{codim}_Y T'(X_1) = \mathrm{codim}_Y T(X_1)$ d'après le lemme 4.4. Les voisins de T ont donc le même indice (généralisé) que T.

Perturbations des opérateurs de Fredholm

Proposition 4.8. *Si $t \in [0, 1] \to T_t \in \mathcal{L}(X, Y)$ est un chemin continu de $[0, 1]$ dans l'espace normé $\mathcal{L}(X, Y)$, et si chaque T_t est semi-Fredholm, alors l'indice est constant.*

Preuve. — Le résultat est vrai tel qu'il est énoncé, mais nous ne montrerons (et n'utiliserons) que le cas où l'indice est fini ou $-\infty$: dans ces deux cas nous avons montré que l'indice est localement constant. Le résultat est donc clair par la connexité de $[0, 1]$: pour chaque valeur $i \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$, l'ensemble des points où l'indice vaut i est un ouvert, et ces ouverts couvrent $[0, 1]$ puisque l'indice est partout défini sur $[0, 1]$ d'après l'hypothèse. Chacun des ouverts est donc aussi fermé, donc vide ou égal à $[0, 1]$.

///

Lemme. *Pour tout opérateur compact $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-espace X_1 de codimension finie tel que $\|T_{|X_1}\| \le \varepsilon$.*

Preuve. — Considérons le compact $K = \overline{T(B_X)}$). Pour chaque $y \in K$, on trouve par Hahn-Banach une forme linéaire continue $\xi_y \in Y^*$ telle que $\|y\| = |\xi_y(y)|$; l'ensemble des $y' \in K$ tels que $\|y'\| < \varepsilon + |\xi_y(y')|$ est un voisinage ouvert de y. Par compacité, on peut recouvrir K par un nombre fini de tels ouverts. On peut sélectionner ainsi un ensemble fini de formes linéaires y_j^*, $j = 1, \ldots, N$ tel que

$$\forall y \in K, \quad \|y\| \le \varepsilon + \max_{1 \le j \le N} |y_j^*(y)|.$$

On choisit pour X_1 l'intersection finie des noyaux des formes linéaires $y_j^* \circ T$. Pour tout $x \in B_{X_1}$, on aura $Tx \in K$ et $y_j^*(Tx) = 0$ pour $j = 1, \ldots, N$, donc

$$\|Tx\| \le \varepsilon + \max_{1 \le j \le N} |y_j^*(Tx)| = \varepsilon.$$

///

Lemme. *Si* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ *est un presque-plongement et si* $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ *est compact, la somme* $\mathrm{T} + \mathrm{S}$ *est un presque-plongement.*

Preuve. — On a un sous-espace X_1 de codimension finie sur lequel T est un plongement, c'est-à-dire qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\forall x \in \mathrm{X}_1, \quad \|\mathrm{T}x\| \geq c\,\|x\|,$$

et on a un sous-espace X_2 de codimension finie sur lequel S est de norme $< c/2$; par l'inégalité triangulaire, $\mathrm{T} + \mathrm{S}$ est un plongement de constante $c/2$ sur $\mathrm{X}_1 \cap \mathrm{X}_2$, qui est de codimension finie dans X.

///

Théorème. *Si* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ *est Fredholm et* $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ *compact, la somme* $\mathrm{T} + \mathrm{S}$ *est Fredholm, de même indice que* T.

Preuve. — On passe de T à $\mathrm{T} + \mathrm{S}$ en suivant le chemin continu $u \to \mathrm{T} + u\mathrm{S}$, $u \in [0, 1]$. Tous les éléments sont semi-Fredholm par le lemme précédent, et on conclut par la proposition 4.8.

///

Illustration.

1. Si φ est une fonction continue ≥ 0 sur $[0, 1]$, l'opérateur $\mathrm{V}_1 : f \to f'' - \varphi f$ est surjectif de l'espace X_1 formé des fonctions de classe C^2 sur $[0, 1]$, nulles en 0 et en 1, sur l'espace $\mathrm{Y} = \mathrm{C}([0, 1])$.

On voit que $\mathrm{T}_1 : f \to f''$ est un isomorphisme de X_1 sur Y, donc Fredholm d'indice 0 ; on montre que l'injection de X_1 dans Y est compacte par le théorème d'Ascoli (les éléments de la boule unité de X_1 vérifient $|f''| \leq 1$ et $|f'| \leq 1$ sur $[0, 1]$), donc $\mathrm{S}_1 : f \to \varphi f$ est compact de X_1 dans Y. L'opérateur $\mathrm{V}_1 = \mathrm{T}_1 - \mathrm{S}_1$ proposé est donc Fredholm d'indice 0. Mais V_1 est injectif car

$$\int_0^1 (\mathrm{T}f)(t)\overline{f(t)}\,dt = \int_0^1 \bigl(f''(t) - \varphi(t)f(t)\bigr)\overline{f(t)}\,dt = -\int_0^1 \bigl(|f'(t)|^2 + \varphi(t)|f(t)|^2\bigr)\,dt$$

ne peut être nul que si $f = 0$. Il en résulte que V_1 est surjectif, donc un isomorphisme : pour toute fonction continue g sur $[0, 1]$, il existe une unique fonction f de classe C^2, nulle au deux bords, telle que

$$f'' - \varphi\, f = g.$$

Si on définit V_2 sur l'espace X_2 plus grand formé des fonctions f de classe C^2 sur $[0, 1]$ telles que $f(0) = f(1)$, par la même formule $\mathrm{V}_2 : f \in \mathrm{X}_2 \to f'' - \varphi f \in \mathrm{Y}$, il est évident que V_2 ne peut pas être injectif puisque V_1 couvrait déjà toute l'image Y. On a ainsi montré par une méthode un peu bizarre qu'il existe toujours des fonctions non nulles f telles que $f'' = \varphi f$.

Pour le point précédent, on pouvait aussi revenir à l'opérateur T, tel qu'il avait été défini sur $\mathrm{X} = \mathrm{C}^2([0, 1])$ par $\mathrm{T} : f \in \mathrm{X} \to f'' \in \mathrm{Y}$; cet opérateur était Fredholm, d'indice égal à 2. L'opérateur $\mathrm{V} : f \in \mathrm{X} \to f'' - \varphi f \in \mathrm{Y}$ est aussi Fredholm d'indice 2 (perturbation compacte de T), pour toute fonction continue φ ; on a $\dim \ker \mathrm{T} \geq \mathrm{ind}(\mathrm{T}) = 2$, ce qui donne l'information bien raisonnable suivante : pour toute fonction continue φ, l'équation différentielle $y'' = \varphi y$ possède au moins deux solutions indépendantes.

2. On va généraliser en deux dimensions. Considérons l'espace H_2 des fonctions f de deux variables de la forme

$$f(x, y) \sim \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} c_{m,n}\, \mathrm{e}^{imx}\, \mathrm{e}^{iny}$$

pour lesquelles on suppose que

$$\|f\|^2 = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} (1 + m^2 + n^2)^2 |c_{m,n}|^2 < +\infty\,;$$

la fonction $f \to \|f\|$ définit une norme d'espace de Hilbert sur H_2. L'opérateur $\mathrm{L} : u \to -\Delta u + \varepsilon u$, avec $\varepsilon > 0$, agit sur les polynômes trigonométriques par

$$\sum_{m,n} c_{m,n} e_m \otimes e_n \to \sum_{m,n} (\varepsilon + m^2 + n^2)\, c_{m,n} e_m \otimes e_n.$$

D'après la définition de la norme de H_2, il est clair que cet opérateur est borné de H_2 à valeurs dans $\mathrm{H}_0 = \mathrm{L}_2([0, 2\pi]^2)$; en fait il est facile de vérifier qu'il se prolonge en un isomorphisme T de H_2 sur H_0, donc T est Fredholm d'indice 0.

Considérons une fonction continue périodique $\varphi(x, y)$ telle que $\varphi(x, y) \geq \varepsilon > 0$ en tout point, et posons

$$(\mathrm{S}u)(x, y) = (\varphi(x, y) - \varepsilon)\, u(x, y).$$

Cet opérateur est compact de H_2 dans H_0 : on voit d'abord que l'injection $u \to u$ est compacte de H_2 dans H_0 (utiliser les coefficients dans la base hilbertienne $(e_m \otimes e_n)_{m,n \in \mathbb{Z}}$), et on compose avec l'opérateur borné de H_0 dans H_0 donné par la multiplication par la fonction bornée $\varphi - \varepsilon$. On sait alors que $\mathrm{T} + \mathrm{S}$ est Fredholm d'indice 0 ; mais $\mathrm{T} + \mathrm{S}$ est injectif car

$$\langle (\mathrm{T} + \mathrm{S})u, u \rangle = \int_{[0,2\pi]^2} (-\Delta u + \varphi u)\, \overline{u}\, dx dy = \int_{[0,2\pi]^2} \bigl(|\nabla u|^2 + \varphi |u|^2\bigr)\, dx dy$$

ne peut être nul que si u est nulle. On en déduit que cet opérateur est surjectif : pour toute fonction $g \in \mathrm{H}_0$, il existe $u \in \mathrm{H}_2$ telle que

$$-\Delta u + \varphi\, u = g.$$

3. Considérons l'espace de Hilbert complexe $\mathrm{H} = \mathrm{L}_2(0, 2\pi)$, où $[0, 2\pi]$ est muni de la probabilité $d\theta/(2\pi)$. Posons $e_n(\theta) = \mathrm{e}^{in\theta}$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$; la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de H. Désignons par $\mathrm{H}_2(\mathbb{T})$ le sous-espace fermé de H engendré par les vecteurs $(e_n)_{n \geq 0}$, et désignons par P la projection orthogonale de H sur $\mathrm{H}_2(\mathbb{T})$; on a $\mathrm{P}e_n = e_n$ si $n \geq 0$ et $\mathrm{P}e_n = 0$ si $n < 0$. Pour chaque fonction complexe continue φ sur $[0, 2\pi]$, telle que $\varphi(0) = \varphi(2\pi)$, définissons l'endomorphisme T_φ de $\mathrm{H}_2(\mathbb{T})$ qui associe à chaque fonction $f \in \mathrm{H}_2(\mathbb{T})$ la projection sur $\mathrm{H}_2(\mathbb{T})$ du produit φf,

$$\forall f \in \mathrm{H}_2(\mathbb{T}), \quad \mathrm{T}_\varphi f = \mathrm{P}(\varphi f) \in \mathrm{H}_2(\mathbb{T}).$$

Si φ ne s'annule pas, l'opérateur T_φ est de Fredholm, et son indice se calcule à partir de l'indice du chemin fermé $\theta \in [0, 2\pi] \to \varphi(\theta) \in \mathbb{C}$. Si par exemple

$$\varphi_0(\theta) = \mathrm{e}^{-i\theta},$$

on voit que T_φ agit comme l'adjoint S^* de l'opérateur de shift sur $\ell_2(\mathbb{N})$,

$$\mathrm{T}_{\varphi_0} e_0 = 0, \quad \text{et} \quad \mathrm{T}_{\varphi_0} e_{n+1} = e_n \quad \text{pour} \quad n \geq 0.$$

On ramène le cas général à ces exemples simples par déformation continue du chemin.

Formulation classique de l'alternative de Fredholm

A l'époque de l'article de Fredholm (1903), il n'y avait pas plus d'espaces de Banach que de théorie des opérateurs compacts. Fredholm s'intéressait à la résolution d'équations intégrales de la forme suivante : étant donnée une fonction continue g sur $[0,1]$, peut-on trouver f continue sur $[0,1]$ qui vérifie l'équation intégrale

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = \int_0^1 k(x,y) f(y)\, dy + g(x).$$

Si le noyau k est continu sur le carré, il résulte du théorème d'Ascoli que l'opérateur intégral est compact de $\mathrm{C}([0,1])$ dans lui-même, et on est en train d'essayer de résoudre une équation de la forme $(\mathrm{Id} - \mathrm{T}_k)f = g$. Fredholm découvre dans le langage de l'époque que l'indice de $\mathrm{Id} - \mathrm{T}_k$ est nul, ce qui le conduit à formuler ce qui est resté connu sous le nom *d'alternative de Fredholm*.

Quelques années après, sous l'influence de F. Riesz, on est arrivé à peu de chose près à la formulation «classique» suivante : soit S un opérateur compact sur X ; on sait que la transposée ${}^t\mathrm{S}$ est compacte de X^* dans X^*. On a *l'alternative* suivante :

– ou bien les deux équations $x - \mathrm{S}x = y$, $x^* - {}^t\mathrm{S}x^* = y^*$ admettent pour tous seconds membres $y \in \mathrm{X}$, $y^* \in \mathrm{X}^*$ une solution unique $x \in \mathrm{X}$, $x^* \in \mathrm{X}^*$,

– ou bien les équations homogènes $x - \mathrm{S}x = 0$, $x^* - {}^t\mathrm{S}x^* = 0$ admettent un même nombre fini $k > 0$ de solutions indépendantes, $x_1, \ldots, x_k$ et $x_1^*, \ldots, x_k^*$. Dans ce cas, pour que l'équation $x - \mathrm{S}x = y$ admette une solution $x \in \mathrm{X}$, il faut et il suffit que $x_1^*(y) = x_2^*(y) = \cdots = x_k^*(y) = 0$, et pour que l'équation $x^* - {}^t\mathrm{S}x^* = y^*$ admette une solution $x^* \in \mathrm{X}^*$, il faut et il suffit que $y^*(x_1) = y^*(x_2) = \cdots = y^*(x_k) = 0$.

Pour ce point de vue classique, on pourra consulter le livre de F. Riesz, *Leçons d'Analyse Fonctionnelle*.

Valeurs propres des opérateurs compacts

Lemme. *Si* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$ *est un presque-plongement, l'intersection* Y *des images* $\mathrm{T}^n(\mathrm{X})$ *est fermée et* $\mathrm{T}(\mathrm{Y}) = \mathrm{Y}$.

Preuve. — Sous l'hypothèse de presque-plongement, on voit par récurrence que l'image $\mathrm{T}^{n+1}(\mathrm{X}) = \mathrm{T}(\mathrm{T}^n(\mathrm{X}))$ du sous-espace fermé $\mathrm{T}^n(\mathrm{X})$ est fermée, donc

$$\mathrm{Y} = \bigcap_{n \geq 0} \mathrm{T}^n(\mathrm{X})$$

est un sous-espace vectoriel fermé ; il est clair que $\mathrm{T}(\mathrm{Y}) \subset \mathrm{Y}$. De plus, le noyau N de T est de dimension finie, donc la suite décroissante de sous-espaces vectoriels $\mathrm{N} \cap \mathrm{T}^n(\mathrm{X})$ est stationnaire à partir d'un certain entier $k \geq 0$, d'où résulte que $\mathrm{N} \cap \mathrm{Y} = \mathrm{N} \cap \mathrm{T}^k(\mathrm{X})$. On en déduit que $\mathrm{N} \cap \mathrm{T}^k(\mathrm{X}) \subset \mathrm{Y}$. Si $y \in \mathrm{Y}$, on pourra écrire $y = \mathrm{T}^{k+n+1}x_n$ pour tout entier $n \geq 0$; posons $z_n = \mathrm{T}^{k+n}x_n$; alors $\mathrm{T}z_n = y$ pour tout $n \geq 0$, et $z_n \in \mathrm{T}^{k+n}(\mathrm{X})$; on a pour tout $p > 0$ que $z_0, z_p \in \mathrm{T}^k(\mathrm{X})$ et $z_0 - z_p \in \mathrm{N}$, donc $z_0 - z_p \in \mathrm{Y}$; on en déduit que $z_0 \in z_p + \mathrm{Y} \subset \mathrm{T}^{k+p}(\mathrm{X})$ pour tout p, donc $z_0 \in \mathrm{Y}$ et $y = \mathrm{T}z_0 \in \mathrm{T}(\mathrm{Y})$.

///

Lemme. *Soient* X *un espace de Banach complexe,* $\mathrm{X} \neq \{0\}$ *et* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$ *un opérateur de Fredholm ; si* 0 *appartient au bord du spectre de* T, *les noyaux et les images de* T^n *se stabilisent : il existe un entier* $k \geq 1$ *tel que* $\ker \mathrm{T}^k = \ker \mathrm{T}^{k+1}$, $\mathrm{T}^k(\mathrm{X}) = \mathrm{T}^{k+1}(\mathrm{X})$ *; de plus,*

$$\mathrm{X} = \ker \mathrm{T}^k \oplus \mathrm{T}^k(\mathrm{X}),$$

ces deux sous-espaces étant stables par T, *et* $\dim \ker \mathrm{T}^k < +\infty$. *La valeur* 0 *est valeur propre de* T, *et elle est isolée dans le spectre de* T. *La restriction de* T *à* $\mathrm{T}^k(\mathrm{X})$ *est un isomorphisme de l'espace de Banach* $\mathrm{T}^k(\mathrm{X})$.

Preuve. — Puisque 0 est dans le bord du spectre de T, l'opérateur T est limite d'opérateurs inversibles, qui sont Fredholm d'indice nul, et T lui-même est Fredholm, donc $\mathrm{ind(T)} = 0$. Le noyau $\mathrm{N} = \ker \mathrm{T}$ de T n'est pas nul, sinon T serait un isomorphisme, autrement dit 0 est valeur propre de T. On sait que T est un presque-plongement ; par la preuve du lemme précédent, on peut trouver un entier k tel que $\mathrm{N} \cap \mathrm{T}^k(\mathrm{X}) = \mathrm{N} \cap \mathrm{Y}$, où $\mathrm{Y} = \bigcap_n \mathrm{T}^n(\mathrm{X})$. L'espace fermé Y est invariant par T ; considérons pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\mathrm{V}_\lambda = \mathrm{T}_{|\mathrm{Y}} - \lambda \,\mathrm{Id}_\mathrm{Y} \in \mathcal{L}(\mathrm{Y})\,;$$

on voit d'abord que V_0 est Fredholm, d'indice ≥ 0 : en effet $\ker \mathrm{V}_0 = \mathrm{N} \cap \mathrm{Y} \subset \mathrm{N}$ est de dimension finie, et V_0 est surjectif par le lemme précédent ; pour λ proche de 0, l'opérateur V_λ est donc Fredholm de même indice ≥ 0 que V_0 ; mais comme l'indice de V_λ est ≤ 0 quand $\lambda \in \rho(\mathrm{T})$ (V_λ est alors injectif car $\mathrm{T} - \lambda \,\mathrm{Id}$ est inversible), et 0 étant adhérent à $\rho(\mathrm{T})$ par hypothèse, on déduit que V_0 est d'indice nul ; il en résulte que V_0 est injectif, c'est-à-dire que $\mathrm{N} \cap \mathrm{Y} = \mathrm{N} \cap \mathrm{T}^k(\mathrm{X}) = \{0\}$, et V_0 est un isomorphisme de Y. On en déduit que la suite des noyaux est stationnaire : si $\mathrm{T}^{k+1}x = 0$, $\mathrm{T}^k x$ est à la fois dans N et dans $\mathrm{T}^k(\mathrm{X})$, donc $\mathrm{T}^k x = 0$. Comme chaque T^n est Fredholm d'indice 0 par le résultat de l'exercice 4.7, les images se stabilisent au même moment, donc $\mathrm{Y} = \mathrm{T}^k(\mathrm{X})$.

L'espace X se décompose en somme directe de $\mathrm{Y} = \mathrm{T}^k(\mathrm{X})$ et de l'espace de dimension finie $\mathrm{N}_k = \ker \mathrm{T}^k$: en effet, l'intersection $\mathrm{N}_k \cap \mathrm{T}^k(\mathrm{X})$ est réduite à $\{0\}$ et

$$\dim \mathrm{N}_k = \operatorname{codim} \mathrm{T}^k(\mathrm{X})$$

puisque $\mathrm{ind}(\mathrm{T}^k) = 0$; vérifions l'affirmation sur l'intersection : si $y = \mathrm{T}^k x$ est en même temps dans N_k, on a $0 = \mathrm{T}^k y = \mathrm{T}^{2k} x$. Comme $2k \geq k$, on sait que $\ker \mathrm{T}^{2k} = \ker \mathrm{T}^k$, donc $x \in \ker \mathrm{T}^k$ et $y = \mathrm{T}^k x = 0$. Il est clair que $\mathrm{X}_0 = \ker \mathrm{T}^k$ et $\mathrm{X}_1 = \mathrm{T}^k(\mathrm{X}) = \mathrm{Y}$ sont stables par T ; si $\mathrm{T}_j \in \mathcal{L}(\mathrm{X}_j)$ désigne la restriction de T à X_j, pour $j = 0, 1$, on voit que T_0 est un endomorphisme nilpotent en dimension finie ($\mathrm{T}_0^k = 0$) donc 0 est sa seule valeur propre et $\mathrm{T}_0 - \lambda \,\mathrm{Id}_{\mathrm{X}_0}$ est inversible pour tout $\lambda \neq 0$; on a vu que $\mathrm{T}_1 = \mathrm{V}_0$ est un isomorphisme de X_1 sur X_1 ; il existe donc $\varepsilon_1 > 0$ tel que $\mathrm{T}_1 - \lambda \,\mathrm{Id}_{\mathrm{X}_1}$ reste un isomorphisme de X_1 quand $|\lambda| < \varepsilon_1$. Il en résulte que $\mathrm{T} - \lambda \,\mathrm{Id}_\mathrm{X}$ est inversible quand $0 < |\lambda| < \varepsilon_1$, ce qui montre que la valeur spectrale 0 est isolée dans $\sigma(\mathrm{T})$.

///

Théorème. *Soient* X *un espace de Banach complexe et* $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$ *un opérateur compact ; le spectre de* S *est fini, ou bien peut être rangé dans une suite* (λ_n) *tendant vers* 0. *Chaque valeur spectrale* $\lambda \neq 0$ *est une valeur propre de multiplicité finie, ce qui veut dire que l'opérateur* $\mathrm{T} = \lambda \,\mathrm{Id}_\mathrm{X} - \mathrm{S}$ *admet la décomposition du lemme précédent.*

Preuve. — Si $\sigma(\mathrm{S}) = \{0\}$ il n'y a rien à démontrer. Sinon, soit $\lambda \neq 0$ un point frontière du spectre de S ; alors $\mathrm{T} = \lambda \, \mathrm{Id}_{\mathrm{X}} - \mathrm{S}$ est Fredholm, et $0 \in \partial \, \sigma(\mathrm{T})$. D'après le lemme précédent, λ est isolé dans le spectre de S. Puisque tous les points frontière non nuls sont isolés, il en résulte que tous les points non nuls du spectre de S sont isolés (voir plus loin). Le spectre de S n'a donc qu'un nombre fini de points dans toute couronne compacte $\{r \leq |z| \leq \mathrm{R}\}$ telle que $r > 0$, ce qui permet de les ranger s'il y a lieu dans une suite qui tend vers 0. Les propriétés de chaque valeur spectrale sont données par le lemme précédent, appliqué à $\mathrm{T} = \lambda \, \mathrm{Id}_{\mathrm{X}} - \mathrm{S}$.

Justifions l'affirmation topologique précédente : les points non isolés du spectre forment un compact $\mathrm{K} \subset \sigma(\mathrm{S})$; si K est vide, il n'y a rien à montrer, sinon soit μ un point de K de module maximal ; le point μ ne peut pas être intérieur au spectre, sinon tout un voisinage de μ dans $\mathbb{C}$ serait formé de points du spectre, donc des points non isolés, et il existerait parmi eux des $\mu_1 \in \mathrm{K}$ de module plus grand que $|\mu|$. Ainsi $\mu \in \partial \, \sigma(\mathrm{S})$, et donc $\mu = 0$, sinon μ serait isolé d'après l'argument du paragraphe précédent. Puisque $\mu = 0$, on a bien montré que tous les $\lambda \neq 0$ du spectre de S sont isolés dans le spectre.

///