Chapitre 3. Séries de Fourier

3.1. *Séries de Fourier dans* L^2

Dans la plus grande partie de ce chapitre, on s'intéressera d'abord à des fonctions[a] 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$. On munira les intervalles de longueur 2π de la mesure $dx/(2\pi)$; on utilisera cette mesure pour définir les trois notions suivantes : les *normes* L^p *périodiques*,

$$\|f\|_p = \Bigl(\int_a^{a+2\pi} |f(x)|^p \,\frac{\mathrm{d}x}{2\pi}\Bigr)^{1/p},$$

lorsque f est 2π-périodique et $|f|^p$ intégrable sur chaque période, $1 \le p < +\infty$; le *produit scalaire périodique*

$$\langle f, g\rangle = \int_a^{a+2\pi} f(x)\overline{g(x)}\,\frac{\mathrm{d}x}{2\pi},$$

lorsque f, g sont 2π-périodiques et $|f|^2$, $|g|^2$ intégrables sur chaque période ; et pour finir la convolution périodique

$$(f * g)(y) = \int_a^{a+2\pi} f(y-x)g(x)\,\frac{\mathrm{d}x}{2\pi},$$

lorsque f, g sont 2π-périodiques et intégrables sur chaque période. On passera souvent d'une fonction f définie sur une seule période, par exemple $f \in \mathrm{L}^1([-\pi,\pi])$, à la fonction $\widetilde{f}$ définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et telle que $\widetilde{f}(x) = f(x)$ pour presque-tout $x \in [-\pi,\pi]$.

On a introduit au chapitre 2 les fonctions $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ qui sont définies par $e_n(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$. Lorsque $f \in \mathrm{L}^1([0,2\pi])$, on peut considérer les coefficients de Fourier de f, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n(f) = \int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,\frac{\mathrm{d}x}{2\pi},$$

et pour $n \ge 0$, les sommes de Fourier

$$\mathrm{S}_n f = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\,e_k.$$

Dans l'espace de Hilbert $\mathrm{L}^2([0,2\pi])$, la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthonormée,

$$\langle e_m, e_n\rangle = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,\frac{\mathrm{d}x}{2\pi} = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-n)x}\,\frac{\mathrm{d}x}{2\pi} = \delta_{m,n}$$

(symbole de Kronecker) et on a montré au chapitre 2 que cette suite est une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2([0,2\pi])$. Quand $f \in \mathrm{L}^2([0,2\pi])$, on peut écrire aussi

$$c_n(f) = \langle f, e_n\rangle, \quad \mathrm{S}_n f = \sum_{k=-n}^{n} \langle f, e_k\rangle\, e_k,$$

et on voit ainsi que $\mathrm{S}_n f$ est la projection orthogonale de f sur $\mathrm{Vect}(e_k : |k| \le n)$. Puisque que les fonctions $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx})_{n\in\mathbb{Z}}$ forment une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2([0, 2\pi])$, on en déduit que

$$\|f - \mathrm{S}_n f\|_2^2 = \int_0^{2\pi} \Bigl| f(x) - (\mathrm{S}_n f)(x) \Bigr|^2 \frac{\mathrm{d}x}{2\pi}$$

tend vers 0 quand $n \to +\infty$, c'est-à-dire qu'on a une représentation de toute fonction $f \in \mathrm{L}^2([0, 2\pi])$ par sa série de Fourier

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f, e_n \rangle \, e_n,$$

la somme de la série étant prise au sens de l'espace L^2. Ceci ne permet pas d'affirmer que la série numérique

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) \; \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$$

converge quand on donne une valeur particulière de x, mais on va voir un cas simple où cela est possible.

Proposition 1. *Si f est une fonction continue 2π-périodique et si*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| < +\infty,$$

alors $f(x)$ est égal pour tout x à la somme de la série de Fourier,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} \, .$$

Preuve. — D'après l'hypothèse de la proposition, on peut poser pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} \, ;$$

la série de fonctions ci-dessus est normalement convergente, donc g est continue. La suite des fonctions continues $(\mathrm{S}_n f)$ définies par

$$(\mathrm{S}_n f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$$

converge uniformément vers g, et la même suite $(\mathrm{S}_n f)$ est convergente dans $\mathrm{L}^2([0, 2\pi])$ vers la fonction f. Il en résulte que $g = f$ partout, par les résultats d'intégration qui ont été rappelés dans l'annexe du chapitre 1 : corollaire A4 et théorème A5. Puisque $f(x) = g(x)$ pour tout x, on peut bien affirmer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} \, .$$

Exercice. La fonction de Bessel J_0, qui est définie par la formule

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{J}_0(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, x \sin\theta} \,\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}$$

est développable en série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, on va identifier les coefficients (a_n) de cette série entière. Pour x réel fixé considérons la fonction f_x définie par

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad f_x(\theta) = \exp\Bigl(\frac{x}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\Bigr).$$

On voit que

$$\overline{f_{-x}(\theta)} = \overline{\exp\bigl(-\frac{x}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\bigr)} = \exp\bigl(-\frac{x}{2}\,\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\bigr) = \exp\bigl(-\frac{x}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\bigr)$$

donc $f_x(\theta)\overline{f_{-x}(\theta)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, x \sin\theta}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{J}_0(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f_x(\theta)\overline{f_{-x}(\theta)}\,\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} = \langle f_x, f_{-x}\rangle.$$

En développant l'exponentielle dans f_x, on voit que

$$f_x(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n n!}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\, n\theta}\,.$$

Cette série converge normalement, donc uniformément, donc en norme L^2 : on a

$$f_x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n n!}\,e_n$$

au sens de L^2, ce qui permet, par l'unicité des coefficients dans une base hilbertienne, de montrer que le développement ci-dessus est le développement de Fourier de f_x,

$$c_n(f_x) = \langle f_x, e_n\rangle = \frac{x^n}{2^n n!}$$

pour tout $n \ge 0$, et $c_n(f_x) = 0$ pour $n < 0$. De même,

$$c_n(f_{-x}) = \frac{(-x)^n}{2^n n!} \quad \text{pour} \quad n \ge 0, \quad \text{et} \quad c_n(f_{-x}) = 0 \quad \text{pour} \quad n < 0.$$

On rappelle le calcul du produit scalaire dans une base orthonormée : si v, w sont deux vecteurs d'un espace de Hilbert qui a une base hilbertienne $(e_n)_{n\ge 0}$, on a

$$\langle v, w\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle v, e_n\rangle\,\overline{\langle w, e_n\rangle}.$$

Ici on utilise la base hilbertienne $e_n(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$, $n \in \mathbb{Z}$. Alors

$$\mathrm{J}_0(x) = \langle f_x, f_{-x}\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f_x)\,\overline{c_n(f_{-x})} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n n!}\,\frac{(-x)^n}{2^n n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}.$$

On peut introduire les autres fonctions de Bessel (J_n) d'indice n entier en disant que $\mathrm{J}_n(x)$ est le coefficient de Fourier d'indice n de la fonction 2π-périodique $g_x : \theta \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, x \sin\theta}$. On va calculer par exemple

$$\mathrm{J}_1(x) = c_1(g_x) = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, x\sin(\theta)}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}\, \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} f_x(\theta) \overline{f_{-x}(\theta)\, e_1(x)}\, \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} = \langle f_x\, e_{-1}, f_{-x}\rangle.$$

On a maintenant

$$f_x(\theta)\, e_{-1}(\theta) = \Bigl(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n n!}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i} n\theta}\Bigr)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta} = \sum_{m=-1}^{+\infty} \frac{x^{m+1}}{2^{m+1}(m+1)!}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, m\theta}\,.$$

On voit donc que les coefficients de Fourier de $f_x\, e_{-1}$ sont égaux à

$$c_m(f_x\, e_{-1}) = \frac{x^{m+1}}{2^{m+1}(m+1)!} \quad \text{pour} \quad m \geq -1,$$

et $c_m(f_x\, e_{-1}) = 0$ pour tout $m < -1$; donc

$$\mathrm{J}_1(x) = \langle f_x\, e_{-1}, f_{-x}\rangle = \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m(f_x\, e_{-1})\, \overline{c_m(f_{-x})} = \sum_{m\geq 0} c_m(f_x\, e_{-1})\, \overline{c_m(f_{-x})}$$

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{x^{m+1}}{2^{m+1}(m+1)!} \frac{(-x)^m}{2^m m!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2^{2n+1} n!(n+1)!}.$$

On pourra trouver de la même façon pour tout entier $k \geq 0$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{J}_k(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+k}}{2^{2n+k} n!(n+k)!}.$$

La preuve précédente permet de voir que ces séries entières convergent pour tout x réel : elles sont de rayon de convergence infini, ce qu'on retrouverait facilement par les critères usuels.

Fonction de classe C^1 *par morceaux*

Théorème 1. *Soit f continue 2π-périodique, et de classe C^1 par morceaux ; alors les coefficients de Fourier de f sont absolument sommables, et $f(x)$ est égal pour tout x à la somme de la série de Fourier,*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i} nx}\,.$$

Preuve. — Considérons une subdivision $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_{\mathrm{N}} = 2\pi$ de l'intervalle $[0, 2\pi]$, telle que f soit de classe C^1 sur chaque intervalle $[a_j, a_{j+1}]$, $0 \leq j < \mathrm{N}$. Posons $g(t) = f(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i} nt}$ pour un $n \in \mathbb{Z}$ quelconque ; on voit que g est 2π-périodique, continûment dérivable sur chaque intervalle $[a_j, a_{j+1}]$, donc

$$g(a_{j+1}) - g(a_j) = \int_{a_j}^{a_{j+1}} g'(t)\, \mathrm{d}t = \int_{a_j}^{a_{j+1}} \bigl(f'(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i} nt} - \mathrm{i} n f(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i} nt}\bigr)\, \mathrm{d}t,$$

et on a par conséquent en sommant de $j = 0$ à $\mathrm{N} - 1$

$$0 = g(2\pi) - g(0) = \int_0^{2\pi} \big(f'(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} - \mathrm{i}nf(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\big)\,\mathrm{d}t.$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f') = \mathrm{i}nc_n(f).$$

La fonction f' est ([b]) bornée, donc de carré intégrable sur chaque période. Il en résulte que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f')|^2 < +\infty$, et par Cauchy-Schwarz dans $\ell^2(\mathbb{N})$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |c_n(f)| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\,|n\,c_n(f)| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\,|c_n(f')| \le \Big(\sum_{n\ge 1} \frac{1}{n^2}\Big)^{1/2} \Big(\sum_{n\ge 1} |c_n(f')|^2\Big)^{1/2} < +\infty.$$

On procède de même pour $n < 0$ et on obtient ainsi que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| < +\infty$. Il suffit ensuite d'appliquer la proposition 1.

Exemple. Pour chaque x fixé, considérons la fonction g_x définie par

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad g_x(\theta) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\sin\theta}.$$

Il est clair que cette fonction g_x est 2π-périodique, de classe C^1 (en fait de classe C^∞), donc ses coefficients de Fourier sont absolument sommables et $g_x(\theta)$ est la somme de la série de Fourier. On a défini les fonctions de Bessel (J_n) d'indice entier $n \in \mathbb{Z}$ en considérant les coefficients de Fourier de la fonction g_x,

$$\mathrm{J}_n(x) = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\sin\theta - \mathrm{i}n\theta}\,\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} = c_n(g_x).$$

Il est facile de montrer que J_n est, comme J_0, la somme d'une série entière. Comme la fonction g_x est de classe C^1 on sait que son développement de Fourier est absolument convergent,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(g_x)| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\mathrm{J}_n(x)| < +\infty,$$

et on a pour tout x et tout θ

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\sin\theta} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{J}_n(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}.$$

Bessel et FM

En modulation de fréquence, le signal $s_m(t)$ (musical par exemple ; on le supposera à valeurs réelles) qu'on veut transmettre est d'abord intégré (à partir d'une certaine origine de temps, disons $t = 0$)

$$\mathrm{S}_m(t) = \int_0^t s_m(u)\,\mathrm{d}u$$

et il est transmis en modifiant un signal porteur $s_p(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_p t}$ de la façon suivante : c'est la *fréquence* du signal porteur qui est modifiée, en introduisant le signal *modulé en fréquence*

$$t \to \exp\big(\mathrm{i}\omega_p t + \mathrm{i}\kappa\,\mathrm{S}_m(t)\big), \tag{1}$$

où κ est un coefficient convenablement choisi. Cette expression est en général très difficile à étudier mathématiquement. Examinons un cas très particulier, celui d'une émission musicale assez ennuyeuse qui transmettrait un son constant,

$$s_m : t \to \cos(\omega_m t)$$

où ω_m correspond à la fréquence du son musical, très inférieure à la fréquence $\omega_p/(2\pi)$ de la porteuse (par exemple : $\omega_m/(2\pi) = 440\,\mathrm{Hz}$, $\omega_p/(2\pi) = 101.1\,\mathrm{MHz}$). Dans ce cas on a $\mathrm{S}_m(t) = \omega_m^{-1} \sin(\omega_m t)$ et on obtient pour le signal (1) l'expression

$$t \to \exp\bigl(\mathrm{i}\omega_p t + \mathrm{i}k \, \sin(\omega_m t)\bigr) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_p t}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\, \sin(\omega_m t)},$$

où $k = \kappa\, \omega_m^{-1}$. On reconnaît l'expression qu'on a développée avec les fonctions de Bessel,

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_p t} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{J}_n(k)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega_m t} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{J}_n(k)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_p + n\omega_m)t}\,.$$

On voit que le signal (1) est une combinaison de signaux périodiques (théoriquement infinie, mais les coefficients $\mathrm{J}_n(k)$ décroissent assez vite) ; le signal (1) occupe les fréquences $(\omega_p + n\,\omega_m)/(2\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$; dans la pratique, il est important de pouvoir limiter les valeurs de n vraiment utilisées, pour rester à l'intérieur de la plage de fréquences attribuée à la station !

Revenons sur le terme « modulation de fréquence ». Dans l'équation de la porteuse, l'expression est $\mathrm{e}^{\mathrm{i}f(t)}$ avec $f(t) = \omega_p t$ et on obtient la pulsation ω_p de la porteuse en dérivant f,

$$f'(t) = \omega_p.$$

Dans l'équation du signal (1), on a

$$f(t) = \omega_p t + k\, \sin(\omega_m t)$$

dont la dérivée est

$$f'(t) = \omega_p + \kappa\, \cos(\omega_m t)\,;$$

cette expression représente la *pulsation instantanée* : si on découpe un intervalle de temps d'une seconde en dix mille fractions d'un dix millième de seconde, le nombre des oscillations du signal (1) n'est pas le même sur tous les petits intervalles de temps ; dans certains de ces petits intervalles I, on aura $\cos(\omega_m t) \simeq 1$ pour tout $t \in \mathrm{I}$, alors que $\cos(\omega_m t) \simeq -1$ pour d'autres intervalles ; on peut dire que la « fréquence varie » entre les valeurs $(\omega_p + \kappa)/(2\pi)$ et $(\omega_p - \kappa)/(2\pi)$: la fréquence est « modulée », et on retrouve l'information musicale ω_m en examinant la rapidité de la variation de la fréquence.

3.2. *Convergence ponctuelle des séries de Fourier*

On va s'intéresser à des aspects de convergence ponctuelle de la série de Fourier d'une fonction f : la question de base est de savoir si en un point x donné, la série de Fourier $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ converge, et si la somme de la série est bien égale à la valeur $f(x)$.

Lemme 1. *Si f est une fonction intégrable sur $[0, 2\pi]$, on a*

$$\lim_{|n| \to +\infty} c_n(f) = 0.$$

Preuve. — On applique le lemme de Riemann-Lebesgue de la transformation de Fourier : on sait que $\widehat{g}(y)$ tend vers 0 lorsque $|y| \to +\infty$, pour toute fonction g intégrable sur $\mathbb{R}$. Si f est une fonction intégrable sur $[0, 2\pi]$ et si g est la fonction sur $\mathbb{R}$ qui est égale à f dans $[0, 2\pi]$ et qui est nulle en dehors de $[0, 2\pi]$, on voit que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a

$$\widehat{g}(n) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xn}\, \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xn}\, \mathrm{d}x = 2\pi\, c_n(f)\,;$$

il en résulte que $\lim_{|n| \to +\infty} c_n(f) = 0$.

Théorème 2. *Soient f une fonction 2π-périodique mesurable, ℓ une valeur scalaire et x_0 un point tels que*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Bigl| \frac{f(x_0 - t) - \ell}{t} \Bigr|\, \mathrm{d}t < +\infty\,;$$

alors la série de Fourier de f converge au point x_0 et

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx_0} = \ell.$$

Preuve. — L'hypothèse du théorème entraîne que la fonction f est intégrable sur la période $[x_0 - \pi, x_0 + \pi]$, puisque

$$|f(x_0 - t) - \ell| \le \pi \Bigl| \frac{f(x_0 - t) - \ell}{t} \Bigr|$$

lorsque $|t| \le \pi$, ce qui permet de considérer ses coefficients de Fourier $c_n(f)$. On a pour tous les entiers $m, n \ge 0$

$$\sum_{k=-m}^{n} c_k(f)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx_0} = \sum_{k=-m}^{n} \Bigl(\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ks}\, \frac{\mathrm{d}s}{2\pi} \Bigr)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx_0}$$

$$= \sum_{k=-m}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} f(s)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x_0 - s)}\, \frac{\mathrm{d}s}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} \Bigl(\sum_{k=-m}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} \Bigr)\, f(x_0 - t)\, \frac{\mathrm{d}t}{2\pi}\ ;$$

comme l'entier $k = 0$ est entre $-m$ et n on a aussi

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Bigl(\sum_{k=-m}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} \Bigr)\, \frac{\mathrm{d}t}{2\pi} = \sum_{k=-m}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\, \frac{\mathrm{d}t}{2\pi} = 1.$$

Il en résulte que

$$\Bigl(\sum_{k=-m}^{n} c_k(f)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx_0} \Bigr) - \ell = \int_{-\pi}^{\pi} \Bigl(\sum_{k=-m}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} \Bigr) \bigl(f(x_0 - t) - \ell \bigr)\, \frac{\mathrm{d}t}{2\pi}. \tag{2}$$

Un calcul de somme de progression géométrique donne

$$\sum_{k=-m}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}mt} \sum_{p=0}^{n+m} \mathrm{e}^{\mathrm{i}pt} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}mt} \, \frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+m+1)t}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}mt}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}.$$

Introduisons la fonction périodique g définie pour $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$ par

$$g(t) = \frac{f(x_0-t)-\ell}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} \ ;$$

quand $|t| \le \pi$, on a([c])

$$|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,| = 2\,|\sin(t/2)| \ge \frac{2\,|t|}{\pi},$$

ce qui montre que l'hypothèse du théorème implique que g est intégrable sur $[-\pi, \pi]$. L'équation (2) devient

$$\Bigl(\sum_{k=-m}^{n} c_k(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx_0}\Bigr) - \ell = \int_{-\pi}^{\pi} \bigl(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}mt}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t}\bigr)\,\frac{f(x_0-t)-\ell}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\,\frac{\mathrm{d}t}{2\pi}$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}mt}\,\frac{\mathrm{d}t}{2\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t}\,\frac{\mathrm{d}t}{2\pi} = c_m(g) - c_{-n-1}(g).$$

Comme la fonction $t \to g(t)$ est intégrable sur $[-\pi, \pi]$, ses coefficients de Fourier tendent vers 0 d'après le lemme 1. Si on fait tendre n tout seul vers $+\infty$, en gardant par exemple $m = 0$, on constate que

$$\Bigl(\sum_{k=0}^{n} c_k(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx_0}\Bigr) - \ell$$

tend vers $c_0(g)$, ce qui montre que la partie positive de la série de Fourier de f au point x_0 converge ; on voit de même que la partie négative converge, et quand on fait tendre m et n vers $+\infty$ on obtient le résultat annoncé,

$$\ell = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx_0}\,.$$

Corollaire 1. *Soit f une fonction 2π-périodique et intégrable sur chaque période ; en tout point x_0 tel que*

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

reste borné pour x dans un voisinage de x_0, la série de Fourier de f converge et

$$f(x_0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx_0}\,.$$

Preuve. — On applique le théorème précédent avec $\ell = f(x_0)$. Par hypothèse il existe M et $\varepsilon > 0$ tels que

$$\Bigl|\frac{f(x_0-t)-\ell}{t}\Bigr| = \Bigl|\frac{f(x_0-t)-f(x_0)}{t}\Bigr| \le \mathrm{M}$$

lorsque $|t| < \varepsilon$. On a donc

$$\int_{-\pi}^{\pi}\Bigl|\frac{f(x_0-t)-\ell}{t}\Bigr|\,\mathrm{d}t \le \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\Bigl|\frac{f(x_0-t)-f(x_0)}{t}\Bigr|\,\mathrm{d}t + \int_{\varepsilon\le|t|\le\pi}\Bigl|\frac{f(x_0-t)-f(x_0)}{\varepsilon}\Bigr|\,\mathrm{d}t$$
$$\le 2\mathrm{M}\,\varepsilon + \varepsilon^{-1}\Bigl(|f(x_0)| + \int_{-\pi}^{\pi}|f(x_0-t)|\,\mathrm{d}t\Bigr) < +\infty\,;$$

le résultat du corollaire 1 est donc obtenu en appliquant le théorème 2.

Exemple 1. Soit f la fonction impaire 2π-périodique définie par $f(x) = 1 - x/\pi$ lorsque $0 < x \le \pi$; pour tout point x tel que $0 < x < \pi$, on a

$$(*) \qquad 1 - \frac{x}{\pi} = f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}.$$

On va appliquer le corollaire 1 avec $x_0 = x$. Si t est assez petit pour que $0 < x \pm t < \pi$, c'est-à-dire si $|t| < \min(x, \pi - x)$, on a

$$|f(x+t) - f(x)| = \big|\big(1 - (x+t)/\pi\big) - \big(1 - x/\pi\big)\big| = |t|/\pi\,;$$

il en résulte que la fonction $t \to (f(x+t) - f(x))/t$ est bornée pour t dans un voisinage de 0 et le corollaire précédent s'applique : on a donc

$$(**) \qquad 1 - \frac{x}{\pi} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\,.$$

Puisque f est impaire, $c_0(f) = 0$ et pour $n \ne 0$

$$2\pi\, c_n(f) = -\mathrm{i} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt)\, \mathrm{d}t = -2\mathrm{i} \int_0^{\pi} (1 - t/\pi) \sin(nt) \mathrm{d}t\,;$$

par intégration par parties

$$\pi\, c_n(f) = \mathrm{i}\Big(\Big[(1 - t/\pi) \frac{\cos(nt)}{n}\Big]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos(nt)}{\pi n}\, \mathrm{d}t \Big) = -\frac{\mathrm{i}}{n}.$$

En regroupant $n > 0$ et $-n$,

$$c_n(f)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} + c_{-n}(f)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx} = \frac{-\mathrm{i}}{n\pi}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} + \frac{\mathrm{i}}{n\pi}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx} = \frac{2}{n\pi} \sin(nx).$$

On voit donc que la série de Fourier complexe de $(**)$ se transforme en la relation $(*)$. En intégrant la relation $(*)$ en prenant les primitives nulles en 0 on obtient pour $0 \le x \le \pi$

$$x - \frac{x^2}{2\pi} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - \cos(nx)}{n^2}.$$

La valeur en $x = \pi$ permet de retrouver la relation $\sum n^{-2} = \pi^2/6$, d'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6}.$$

En continuant d'intégrer, on peut trouver les valeurs de $\sum n^{-4}$, $\sum n^{-6}$, $\sum n^{-8}$, etc., qui sont des valeurs particulières de la *fonction zêta de Riemann*

$$\forall s > 1, \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Corollaire 2. *Soit f une fonction 2π-périodique et lipschitzienne ; en tout point x_0, la série de Fourier de f converge et*(**d**)

$$f(x_0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx_0}\,.$$

Preuve. — C'est évidemment un cas particulier du corollaire 1, puisqu'ici la fonction

$$x \to \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

est bornée pour $x \in \mathbb{R}$ par la constante de Lipschitz de f, pour tout x_0.

On définit les *sommes de Fourier* d'une fonction 2π-périodique f, intégrable sur chaque période, en procédant à la sommation de façon symétrique :

$$(\mathrm{S}_n f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,.$$

Corollaire 3 (théorème de Dirichlet-Dini). *Soient f une fonction 2π-périodique mesurable, ℓ_+, ℓ_- deux valeurs scalaires et x_0 un point tels que*

$$\int_0^\pi \frac{|f(x_0 - t) - \ell_-|}{t}\, \mathrm{d}t + \int_0^\pi \frac{|f(x_0 + t) - \ell_+|}{t}\, \mathrm{d}t < +\infty\,;$$

alors les sommes de Fourier de f au point x_0 convergent et

$$\lim_n\, (\mathrm{S}_n f)(x_0) = \frac{\ell_+ + \ell_-}{2}\cdot$$

Preuve. — Pour simplifier, prenons $x_0 = 0$ et introduisons la fonction $\mathrm{F}(t) = f(-t) + f(t)$, qui est 2π-périodique sur $\mathbb{R}$. Cette fonction F est paire et elle vérifie l'hypothèse du théorème 2 au point 0, avec la valeur $\ell = \ell_+ + \ell_-$: l'intégrale

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \Bigl|\frac{\mathrm{F}(t) - \ell}{t}\Bigr|\, \mathrm{d}t &= 2\int_0^\pi \frac{|\mathrm{F}(t) - \ell|}{t}\, \mathrm{d}t = 2\int_0^\pi \frac{|f(-t) + f(t) - \ell_- - \ell_+|}{t}\, \mathrm{d}t \\ &\le 2\int_0^\pi \frac{|f(-t) - \ell_-|}{t}\, \mathrm{d}t + 2\int_0^\pi \frac{|f(t) - \ell_+|}{t}\, \mathrm{d}t < +\infty\end{aligned}$$

est finie par hypothèse, donc la série de Fourier de F au point 0 converge vers ℓ d'après le théorème 2. Mais

$$\begin{aligned}c_k(\mathrm{F}) = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{F}(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\, \frac{\mathrm{d}t}{2\pi} &= \int_{-\pi}^{\pi} f(-t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\, \frac{\mathrm{d}t}{2\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\, \frac{\mathrm{d}t}{2\pi} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(u)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}ku}\, \frac{\mathrm{d}u}{2\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} f(u)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ku}\, \frac{\mathrm{d}u}{2\pi} = c_k(f) + c_{-k}(f).\end{aligned}$$

En faisant la somme de $k = -n$ à n, chaque terme $c_k(f)$ sera sommé deux fois, donc

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k(\mathrm{F}) = 2\,(\mathrm{S}_n f)(0)$$

qui converge vers ℓ quand $n \to +\infty$, d'après le théorème 2.

Remarque. Dans la situation du théorème de Dirichlet on ne peut pas dire sans précaution que la série de Fourier converge au point x_0 : en effet, il est possible que la série considérée d'un seul côté

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx_0}$$

soit divergente, mais la série symétrisée

$$c_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} \bigl(c_n(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx_0} + c_{-n}(f)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx_0}\bigr),$$

elle, est bien convergente.

Exemple. Le corollaire précédent s'applique à la fonction de l'exemple 1, mais le résultat est un peu décevant : on a $f(x) = 1 - x/\pi$ lorsque $0 < x \le \pi$; les limites à droite et à gauche au point $x = 0$ sont 1 et -1, leur demi-somme est nulle et par conséquent la valeur de la série de Fourier

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$$

en $x = 0$ est égale à

$$0 = \frac{\ell_+ + \ell_-}{2}$$

ce qui n'est pas très malin !

Un meilleur exemple est fourni par la fonction f définie par $f(x) = \mathrm{e}^{ax}$ pour $|x| < \pi$, où $a \in \mathbb{C}$ n'est pas élément de $\mathrm{i}\mathbb{Z}$. On a pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$c_n(f) = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{ax - \mathrm{i}nx} \frac{\mathrm{d}x}{2\pi} = (-1)^n \frac{\mathrm{e}^{a\pi} - \mathrm{e}^{-a\pi}}{2\pi(a - \mathrm{i}n)}.$$

Le théorème de Dirichlet appliqué à la fonction f au point $x = \pi$ donne des relations intéressantes (exercice) : on obtient une représentation en série de la demi-somme des limites à droite et à gauche,

$$\frac{\ell_+ + \ell_-}{2} = \frac{\mathrm{e}^{a\pi} + \mathrm{e}^{-a\pi}}{2} = \mathrm{ch}(a\pi) = \frac{\mathrm{sh}(a\pi)}{\pi} \lim_n \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{a - \mathrm{i}k}.$$

Pour $a \notin \mathrm{i}\mathbb{Z}$, on en déduit que

$$\pi \coth(a\pi) = \frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2a}{a^2 + k^2}.$$

Noyau de Dirichlet

Si on note $e_n(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nx}$, on voit que la convolution périodique avec la fonction e_n d'une fonction 2π-périodique f, intégrable sur chaque période, est égale à

$$(f * e_n)(x) = \int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n(x-t)}\ \frac{\mathrm{d}t}{2\pi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nx} \int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,nt}\ \frac{\mathrm{d}t}{2\pi} = c_n(f)\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nx},$$

ce qui montre que

$$f * e_n = c_n(f)\,e_n$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$; par conséquent, la somme $\mathrm{S}_n f = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\,e_k$ est obtenue par convolution de f avec la fonction

$$\mathrm{D}_n = \sum_{k=-n}^{n} e_k.$$

Cette fonction D_n est appelée *noyau de Dirichlet*. Il est clair que

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{D}_n(x)\,\frac{\mathrm{d}x}{2\pi} = 1$$

puisque les e_k sont d'intégrale nulle pour tout $k \neq 0$, alors que la fonction $e_0 = \mathbf{1}$ donne la valeur 1. Calculons explicitement la valeur de $\mathrm{D}_n(x)$

$$2\mathrm{i}\ \sin(x/2)\,\mathrm{D}_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(k+\frac{1}{2})\,x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(k-\frac{1}{2})\,x}\big) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(n+\frac{1}{2})\,x} - \mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,(n+\frac{1}{2})\,x}$$

donc

$$\mathrm{D}_n(x) = \frac{\sin\big[(n+\frac{1}{2})\,x\big]}{\sin(x/2)}.$$

Noyau de Fejér

Il existe des fonctions continues 2π-périodiques f dont la série de Fourier diverge en certains points : pour un certain point t_0, la suite $(\mathrm{S}_n f)(t_0)$ ne converge pas (par translation, on peut se ramener au cas où $t_0 = 0$). Il n'est pas facile d'exhiber ce phénomène désagréable ; cela a été fait vers 1900 (c'est-à-dire longtemps après les débuts de la théorie des séries de Fourier), et peu de temps après Fejér a trouvé un moyen pour atténuer cette difficulté, moyen que nous allons expliquer maintenant : quand une suite numérique (x_n) est convergente vers une limite ℓ, la suite des sommes de Cesàro, qui sont les moyennes de la suite (x_n),

$$y_n = \frac{1}{n+1}(x_0 + \cdots + x_n)$$

converge vers la même limite ℓ. D'un autre côté, il existe des suites (x_n) qui ne convergent pas, mais telles que la suite des sommes de Cesàro (y_n) converge : on dit alors que (x_n) *converge au sens de Cesàro*. Par exemple, la suite $x_n = (-1)^n$ n'est pas convergente, mais $|y_n| \le 1/(n+1)$, donc (y_n) tend vers 0.

Lorsque la suite des sommes de Fourier $(\mathrm{S}_n f)(t_0)$ ne converge pas, on peut se demander si elle converge au sens plus faible de Cesàro ; Fejér a montré que c'est vrai si

f est continue. On introduit donc les sommes de Fejér $(\sigma_n f)$, qui sont les moyennes des sommes de Fourier,

$$(\sigma_n f)(x) = \frac{1}{n+1}\Big((\mathrm{S}_0 f)(x) + (\mathrm{S}_1 f)(x) + \cdots + (\mathrm{S}_n f)(x)\Big).$$

Comme on a vu que

$$(\mathrm{S}_k f)(x) = (f * \mathrm{D}_k)(x)$$

(convolution périodique), on déduit

$$(\sigma_n f)(x) = \frac{1}{n+1}\Big((f * \mathrm{D}_0)(x) + (f * \mathrm{D}_1)(x) + \cdots + (f * \mathrm{D}_n)(x)\Big) = (f * \mathrm{K}_n)(x)$$

où on a posé

$$\mathrm{K}_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \mathrm{D}_k,$$

fonction appelée *noyau de Fejér*. Comme l'intégrale de chaque D_k est égale à 1, il en résulte que

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{K}_n(x) \, \frac{\mathrm{d}x}{2\pi} = 1.$$

On va calculer K_n avec une somme de sinus :

$$(n+1)\mathrm{K}_n(x) \, \sin(x/2) = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx + x/2)$$

$$= \mathrm{Im}\Big(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx+x/2)}\Big) = \mathrm{Im}\Big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x/2} \, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x} - 1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - 1}\Big) = \mathrm{Im}\Big(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x} - 1}{2\mathrm{i}\sin(x/2)}\Big)$$

$$= \mathrm{Re}\Big(\frac{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x}}{2\sin(x/2)}\Big) = \frac{1 - \cos(nx + x)}{2\sin(x/2)} = \frac{\sin^2(nx/2 + x/2)}{\sin(x/2)}.$$

On obtient ainsi

$$\mathrm{K}_n(x) = \frac{1}{n+1} \frac{\sin^2\big[\frac{n+1}{2}\, x\big]}{\sin^2(x/2)}.$$

On remarque que K_n est une fonction positive, donc la norme L^1 de K_n est égale à son intégrale, $\|\mathrm{K}_n\|_1 = 1$. On en déduit une propriété importante

$$\|\sigma_n f\|_\infty \le \|f\|_\infty. \tag{3}$$

En effet, pour tout x

$$|(\sigma_n f)(x)| \le \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)| \, \mathrm{K}_n(t) \, \frac{\mathrm{d}t}{2\pi} \le \|f\|_\infty \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{K}_n(t) \, \frac{\mathrm{d}t}{2\pi} = \|f\|_\infty.$$

On peut aussi remarquer que

$$\mathrm{K}_n = \sum_{k=-n}^{n} \Big(1 - \frac{|k|}{n+1}\Big) e_k$$

donc

$$\sigma_n f = \sum_{k=-n}^{n} \Big(1 - \frac{|k|}{n+1}\Big) c_k(f) e_k.$$

Théorème de Fejér. *Si f est continue 2π-périodique, les sommes de Fejér $(\sigma_n f)$ convergent uniformément vers f. Si $f \in \mathrm{L}^p([0, 2\pi])$ avec $1 \le p < \infty$, la suite $(\sigma_n f)$ converge vers f en norme L^p.*

Preuve. — Pour tout polynôme trigonométrique

$$g = \sum_{k=-\mathrm{N}}^{\mathrm{N}} c_k e_k,$$

il est clair que $\mathrm{S}_n g = g$ pour $n \ge \mathrm{N}$; il en résulte que la suite des moyennes $\sigma_n g$ tend uniformément vers g, puisque

$$\|\sigma_n g - g\|_\infty = \frac{1}{n+1} \Big\| \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} (\mathrm{D}_k g - g) \Big\|_\infty \le \frac{\mathrm{C(N)}}{n+1}$$

qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Si f est continue, on peut l'approcher par un polynôme trigonométrique g, et d'après l'inégalité (3)

$$\|\sigma_n f - \sigma_n g\|_\infty = \|\sigma_n (f-g)\|_\infty \le \|f-g\|_\infty < \varepsilon/3.$$

Pour n assez grand, on a $\|\sigma_n g - g\|_\infty < \varepsilon/3$ et le résultat en découle par l'inégalité triangulaire. Le théorème dans L_p se montre de façon analogue.

Remarque. On peut montrer que si $1 < p < +\infty$ et $f \in \mathrm{L}^p$, les sommes de Fourier $(\mathrm{S}_n f)$ convergent vers f dans L^p. On l'a vu si $p = 2$, mais les autres cas ne sont pas évidents.

Pour $p = 1$ et $f \in \mathrm{L}^1$, les sommes de Fourier ne convergent pas toujours vers f dans L^1, mais les sommes de Fejér convergent toujours. Pour $p = +\infty$, le résultat est faux : les fonctions continues $(\sigma_n f)$ ne peuvent pas converger en norme L^∞ vers une fonction mesurable bornée non continue f, sinon elle formeraient une suite de Cauchy en norme uniforme (théorème A5 de l'annexe du chapitre 1), donc convergente vers une fonction continue g, qui doit être presque-partout égale à f, ce que nous avons exclu.

Fonctions à valeurs réelles : base de sinus et cosinus

On va exprimer la somme de Fourier

$$\mathrm{S}_n f = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\, e_k$$

avec les fonctions réelles cos et sin. Pour chaque $k > 0$, regroupons les deux termes correspondant à k et $-k$,

$$c_k \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + c_{-k} \,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} = (c_k + c_{-k}) \cos(kx) + \mathrm{i}(c_k - c_{-k}) \sin(kx)$$

et écrivons le résultat sous la forme traditionnelle $a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$, où

$$a_k = c_k + c_{-k} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,kx} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}) \frac{\mathrm{d}x}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(2\cos(kx)) \frac{\mathrm{d}x}{2\pi}$$

et

$$b_k = \mathrm{i}(c_k - c_{-k}) = \mathrm{i} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,kx} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}) \frac{\mathrm{d}x}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(2\sin(kx)) \frac{\mathrm{d}x}{2\pi}.$$

On a donc pour tout $k \geq 1$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx)\, \mathrm{d}x, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx)\, \mathrm{d}x.$$

Par raison de cohérence, on pose aussi

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \mathrm{d}x.$$

De cette façon on obtient

$$(\mathrm{S}_n f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\big).$$

Il est clair d'après les formules qui précèdent que les coefficients a_k, b_k sont réels lorsque f est réelle. De plus, les b_k sont nuls pour une fonction paire, et les a_k sont nuls pour une fonction impaire.

Proposition 2. *Les fonctions* $\mathbf{1}$, $x \to \sqrt{2}\cos(kx)$, $x \to \sqrt{2}\sin(kx)$ *pour* $k = 1, 2, \ldots$ *forment une base hilbertienne de l'espace réel* $\mathrm{L}^2_{\mathbb{R}}([0, 2\pi])$.

Preuve. — Les formules d'addition de trigonométrie permettent de montrer que la suite est orthonormée. Si $f \in \mathrm{L}^2([0, 2\pi])$ est une fonction réelle, on sait d'après le cas complexe que f est limite de la suite $(\mathrm{S}_n(f))$; mais on a vu que $\mathrm{S}_n f$ est une combinaison linéaire à coefficients réels des fonctions proposées. On a donc bien une base hilbertienne de l'espace réel $\mathrm{L}^2_{\mathbb{R}}([0, 2\pi])$.

Exemple. Considérons la fonction $f = \mathbf{1}_{[-\varepsilon,\varepsilon]}$ où $0 < \varepsilon < \pi$. Cette fonction est paire, donc tous les coefficients b_k sont nuls. Pour tout $k \geq 1$,

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(kt)\, \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} \int_0^{\varepsilon} \cos(kt)\, \mathrm{d}t = \frac{2\sin(k\varepsilon)}{k\pi}.$$

On voit que $a_0 = \varepsilon/\pi$, et le théorème de Dirichlet au point $x = \varepsilon$ donne

$$\frac{1}{2} = \frac{\varepsilon}{\pi} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2\sin(k\varepsilon)\cos(k\varepsilon)}{k\pi} = \frac{\varepsilon}{\pi} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(2k\varepsilon)}{k\pi} \ ;$$

si on pose $y = 2\varepsilon$, on voit que si $0 < y < 2\pi$,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(ky)}{k} = \frac{1}{2}\,(\pi - y).$$

On a retrouvé la formule de l'exemple 1.

3.3. *Variations, applications des séries de Fourier*

Base de sinus

À chaque fonction $f \in \mathrm{L}^2([0, \pi])$ on associe la fonction impaire $\mathrm{F} \in \mathrm{L}^2([-\pi, \pi])$ qui est égale à f sur $[0, \pi]$. La fonction impaire F se représente comme série de sinus, convergente dans $\mathrm{L}^2([-\pi, \pi])$

$$\lim_n \int_{-\pi}^{\pi} \Bigl|\mathrm{F}(x) - \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(kx)\Bigr|^2 \,\mathrm{d}x = 0.$$

Il en résulte immédiatement, en limitant l'intégrale à $[0, \pi]$, que

$$\lim_n \int_{0}^{\pi} \Bigl|f(x) - \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(kx)\Bigr|^2 \,\mathrm{d}x = 0.$$

Par ailleurs

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\sin(\ell x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\pi} \sin(kx)\sin(\ell x)\,\mathrm{d}x$$

ce qui montre que les fonctions $\sin(kx)$, restreintes à $[0, \pi]$, sont orthogonales. Si on choisit de définir la norme par

$$\|f\|_2^2 = \int_0^{\pi} |f(x)|^2 \,\frac{\mathrm{d}x}{\pi}$$

on voit que les fonctions $x \to \sqrt{2}\,\sin(kx)$, $k = 1, 2, \ldots$ forment une base hilbertienne de l'espace (réel) $\mathrm{L}^2([0, \pi])$.

Si f est continue sur $[0, \pi]$, de classe C^1 par morceaux, avec $f(0) = f(\pi) = 0$, alors la fonction impaire F sur $[-\pi, \pi]$ vérifie les mêmes hypothèses, donc ses coefficients de Fourier sont absolument sommables (théorème 1) et l'égalité

$$\mathrm{F}(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(kx)$$

est vraie pour tout x dans $[-\pi, \pi]$; en particulier pour tout x dans $[0, \pi]$, on a

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(kx).$$

Cette représentation est bien adaptée à la description du phénomène des cordes vibrantes.

Cordes vibrantes, équation des ondes

On veut étudier le mouvement d'une corde vibrante (guitare, violon par exemple), qu'on suppose de longueur π pour simplifier un peu l'écriture des formules. On repère chaque point P de la corde par un nombre réel x entre 0 et π, la quantité x représentant la distance entre le point P et l'origine de la corde associée à la valeur 0. On désigne par $f(x, t)$ l'écart du point x de la corde, $0 \le x \le \pi$, à l'instant t, par rapport à sa position au repos. La corde étant fixée aux deux bouts, on doit supposer que

$$f(0, t) = f(\pi, t) = 0$$

pour tout temps $t \geq 0$. La théorie physique (essentiellement, l'équation fondamentale de la dynamique) conduit à chercher une fonction $f(x,t)$ qui vérifie *l'équation des ondes*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \kappa \, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

où κ est un paramètre > 0 dépendant de la tension T de la corde et de sa masse m par unité de longueur,

$$\kappa = \frac{\mathrm{T}}{m}.$$

Des solutions particulières sont données par

$$u_n(x,t) = \cos(n\sqrt{\kappa}\, t) \sin(nx),$$

pour tout $n \geq 1$. Si la position de la corde au temps 0 est donnée par une fonction g, nulle en 0 et en π, de classe C^1 par morceaux, on sait qu'on peut représenter g par

$$\forall x \in [0,\pi], \quad g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx),$$

où $\sum |b_n| < +\infty$; pour arranger nos affaires mathématiques, supposons même que $\sum n^2 |b_n| < +\infty$, et considérons

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \cos(n\sqrt{\kappa}\, t) \sin(nx).$$

Pour $t = 0$, on a bien $f(x,0) = g(x)$, la position initiale donnée, et nos hypothèses nous permettent de dériver deux fois terme à terme, pour vérifier que f est bien solution de l'équation des ondes, correspondant à la donnée initiale $f(x,0) = g(x)$. La question de l'unicité de la solution est une question trop délicate pour ce cours.

On peut traiter de façon analogue un cas particulier de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \kappa \, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

à savoir celui d'une barre homogène, toujours de longueur π pour simplifier, et dont les deux extrémités sont maintenues à température 0. Ici $f(x,t)$ représente la température au point x à l'instant t. Si la température à l'instant $t = 0$ est donnée par la même fonction g que ci-dessus, on posera

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \, \mathrm{e}^{-n^2 \kappa\, t} \sin(nx).$$

Les exponentielles négatives permettent à la série et aux séries dérivées de converger plus facilement que dans le cas des ondes : l'hypothèse $\sum |b_n| < +\infty$ suffit pour donner un sens à nos dérivations de séries de fonctions.

Changement de période

On veut pouvoir travailler aussi avec des fonctions de période $\mathrm{T} > 0$ quelconque. Pour le faire, il suffit de ramener le problème à la période 2π par changement de variable, d'appliquer les résultats connus dans ce cas et de revenir. Il est tout de même bon de retenir quelques formules qui s'appliquent au cas de la période T.

Tout d'abord, on travaille avec la mesure $\mathrm{d}x/\mathrm{T}$ qui donne la masse 1 à tous les intervalles-périodes tels que $[0, \mathrm{T}]$ ou $[-\mathrm{T}/2, \mathrm{T}/2]$. Ensuite, on introduit pour tout $n \in \mathbb{Z}$ l'exponentielle

$$e_{n,\mathrm{T}} : x \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi nx/\mathrm{T}}$$

qui est de période T. Les fonctions $(e_{n,\mathrm{T}})_{n\in\mathbb{Z}}$ forment une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2([0, \mathrm{T}])$. Si f est continue, T-périodique et de classe C^1 par morceaux, on sait d'après le cas 2π-périodique que les coefficients dans la base sont absolument sommables, et on a pour tout x

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Bigl(\frac{1}{\mathrm{T}} \int_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2} f(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi nt/\mathrm{T}}\, \mathrm{d}t\Bigr)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi nx/\mathrm{T}}\,.$$

3.4. *Transformation de Fourier et séries de Fourier*

Des séries de Fourier à la transformation de Fourier

Supposons que g soit de classe C^2 à support compact sur $\mathbb{R}$. Pour T assez grand, la fonction g sera nulle en dehors de l'intervalle $[-\mathrm{T}/2, \mathrm{T}/2]$; si on regarde g comme la restriction à $[-\mathrm{T}/2, \mathrm{T}/2]$ d'une fonction T-périodique f sur $\mathbb{R}$, on aura pour tout x tel que $|x| \le \mathrm{T}/2$

$$g(x) = f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Bigl(\frac{1}{\mathrm{T}} \int_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2} f(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi nt/\mathrm{T}}\, \mathrm{d}t\Bigr)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi nx/\mathrm{T}}\,.$$

Comme g est nulle hors de $[-\mathrm{T}/2, \mathrm{T}/2]$, l'intégrale de f sur cet intervalle est aussi l'intégrale de g sur $\mathbb{R}$ et

$$g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\mathrm{T}}\, \widehat{g}(2\pi n/\mathrm{T})\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi nx/\mathrm{T}}\,.$$

Posant $h = 2\pi/\mathrm{T}$, il vient

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} h\widehat{g}(nh)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}xnh}\,.$$

Il s'agit d'une somme de Riemann généralisée pour la fonction

$$\varphi : y \to \frac{1}{2\pi}\, \widehat{g}(y)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}xy},$$

correspondant à un découpage de $\mathbb{R}$ en petits intervalles de longueur h. Grâce à l'hypothèse que g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, on peut montrer que $\widehat{g}(y)$ est majoré par $\mathrm{C}\,(1+y^2)^{-1}$, et il en résulte que ces sommes de Riemann tendent vers l'intégrale de $-\infty$ à $+\infty$ de la fonction φ lorsque $h \to 0$, ce qui donne

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{g}(y)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}xy}\, \mathrm{d}y.$$

C'est la formule d'inversion de Fourier, qui était à la base de la théorie L^2 de l'intégrale de Fourier. Ainsi dans cette approche l'intégrale de Fourier apparaît comme limite des séries de Fourier de période T lorsque $\mathrm{T} \to +\infty$.

Signal périodique tronqué

Si on envisage un signal T-périodique $f(t)$ non nul, on ne peut pas considérer sa transformée de Fourier, car f n'est ni intégrable ni de carré intégrable, les seuls cas que nous savons traiter. Mais si on considère une fonction $\theta(t)$ qui soit à support compact, mais égale à 1 sur un loong intervalle, on pourra appliquer la transformation de Fourier à la fonction $t \to \theta(t) f(t)$, en nous disant que cela nous donnera peut-être une idée de ce que devrait être la transformée de Fourier de f, si elle existait. Supposons pour simplifier que f soit de classe C^1, ce qui implique que la série de Fourier est normalement convergente,

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi nt/\mathrm{T}}, \qquad \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n| < +\infty.$$

Comme fonction θ, prenons d'abord une fonction φ continue à support compact, égale à 1 sur un voisinage de 0, puis $\theta(t) = \varphi(c\,t)$, $c > 0$ petit ; quand c devient très petit, la fonction θ est égale à 1 sur un intervalle de plus en plus grand autour de 0. D'un autre côté,

$$\widehat{\theta}(\xi) = c^{-1} \widehat{\varphi}(c^{-1} \xi)$$

se concentre en 0 : le graphe de $\widehat{\theta}$ se présente essentiellement comme une raie verticale de largeur $\sim c$, située à l'abscisse $\xi = 0$, et l'intégrale de $\widehat{\theta}$ vaut $2\pi\, \theta(0) = 2\pi$. On aura

$$\begin{aligned}\widehat{(\theta f)}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \theta(t) \Big(\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi nt/\mathrm{T}} \Big) \,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi t} \,\mathrm{d}t = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \int_{\mathbb{R}} \theta(t) \,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\xi - 2\pi n/\mathrm{T})t} \,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \,\widehat{\theta}(\xi - 2\pi n/\mathrm{T}).\end{aligned}$$

Le spectre de θf est donc formé de raies situées autour des abscisses multiples entiers de $2\pi/\mathrm{T}$, et dont l'altitude est proportionnelle au coefficient de Fourier a_n de la fonction f.

Formule de Poisson

On considère une fonction F sur $\mathbb{R}$, suffisamment régulière et suffisamment décroissante à l'infini, par exemple :

la fonction F *est de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}$, *avec* F'' *intégrable ; de plus, il existe une constante* C *et* $\alpha > 1$ *tels que* $|\mathrm{F}(x)| \le \mathrm{C}\,(1 + |x|)^{-\alpha}$ *pour tout* x.

On se donne $\mathrm{T} > 0$ et on pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathrm{F}(x + k\mathrm{T}).$$

On obtient une fonction continue sur $\mathbb{R}$, qui est T-périodique. La continuité de f se justifie ainsi : pour $y \in [0, \mathrm{T}]$ et $k \in \mathbb{Z}$, posons $u_k(y) = \mathrm{F}(y + k\mathrm{T})$; alors

$$|u_k(y)| \le \mathrm{C}\,(1 + |y + k\mathrm{T}|)^{-\alpha} \le \mathrm{C}_1\,(2\mathrm{T} + |y + k\mathrm{T}|)^{-\alpha} \le \mathrm{C}_1\,(|k| + 1)^{-\alpha}\,\mathrm{T}^{-\alpha}$$

ce qui donne une série majorante convergente pour la série de fonctions : il y a convergence normale de la série de fonctions, donc continuité de la somme f. Calculons les coefficients de Fourier de la fonction T-périodique f,

$$c_{n,\mathrm{T}}(f) = \int_0^{\mathrm{T}} f(x) \,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi nx/\mathrm{T}} \,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{T}} = \int_0^{\mathrm{T}} \Big(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathrm{F}(x + k\mathrm{T}) \Big) \,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi nx/\mathrm{T}} \,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{T}}$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{F}(x+k\mathrm{T})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi n x/\mathrm{T}}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{T}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{k\mathrm{T}}^{k\mathrm{T}+\mathrm{T}} \mathrm{F}(s)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi n s/\mathrm{T}}\,\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{T}}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{F}(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi n x/\mathrm{T}}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{T}} = \frac{\widehat{\mathrm{F}}(2\pi n/\mathrm{T})}{\mathrm{T}}.$$

Si $\sum |\widehat{\mathrm{F}}(2\pi n/\mathrm{T})| < +\infty$, on sait que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_{n,\mathrm{T}}(f)| < +\infty$, donc f est égale en tout point à la somme de sa série de Fourier. On a donc

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{n,\mathrm{T}}(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi n x/\mathrm{T}}.$$

On obtient ainsi la formule de Poisson

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{F}(x+k\mathrm{T}) = \frac{1}{\mathrm{T}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\mathrm{F}}(2\pi n/\mathrm{T})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi n x/\mathrm{T}}.$$

Justifions la convergence de la série des coefficients de Fourier : d'après l'hypothèse de majoration de F, on sait que F est intégrable, et F″ est intégrable par hypothèse. Les transformées de Fourier $\widehat{\mathrm{F}}$ et $\widehat{\mathrm{F}''}(\xi) = -\xi^2\,\widehat{\mathrm{F}}(\xi)$ sont donc bornées, donc $(1+\xi^2)\,\widehat{\mathrm{F}}(\xi)$ est borné sur $\mathbb{R}$. Puisqu'il existe une constante M telle que

$$|\widehat{\mathrm{F}}(\xi)| \le \frac{\mathrm{M}}{1+\xi^2}$$

on déduit que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{\mathrm{F}}(2\pi n/\mathrm{T})| < +\infty$.

Échantillonnage, formule de Shannon

Étant donné un signal $\mathrm{G}(t)$ dépendant du temps, on cherche à pouvoir le coder en remplaçant l'information continue, quand le temps t prend toutes les valeurs réelles, par la connaissance des valeurs de G en une suite discrète de temps, qui sont les multiples $k\mathrm{T}$, k entier, d'une valeur $\mathrm{T} > 0$ petite : c'est *l'échantillonnage* du signal.

Pour pouvoir fonctionner, on supposera que le signal G est à *spectre limité* : on supposera que la transformée de Fourier $\widehat{\mathrm{G}}$ est nulle en dehors d'un certain intervalle borné $[-\mathrm{M}, \mathrm{M}]$. On supposera en plus que G vérifie les hypothèses de la formule de Poisson du paragraphe précédent.

Considérons $\lambda \in [-\mathrm{M}, \mathrm{M}]$ et posons

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{F}(t) = \mathrm{G}(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda t};$$

on a $\widehat{\mathrm{F}}(\xi) = \widehat{\mathrm{G}}(\xi+\lambda)$. La formule de Poisson, appliquée à F avec $x = 0$, donne

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{G}(k\mathrm{T})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda k\mathrm{T}} = \frac{1}{\mathrm{T}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\mathrm{G}}(2\pi n/\mathrm{T}+\lambda).$$

Si on suppose que

$$\frac{2\pi}{\mathrm{T}} > 2\mathrm{M}$$

et puisque $|\lambda| \le \mathrm{M}$, on voit facilement qu'il n'y a qu'un terme non nul dans la somme de droite, celui qui correspond à $n = 0$: en effet si $n \neq 0$, on a

$$|2\pi n/\mathrm{T}+\lambda| \ge 2\pi/\mathrm{T} - |\lambda| \ge 2\mathrm{M} - \mathrm{M} = \mathrm{M} \;\text{ donc }\; \widehat{\mathrm{G}}(2\pi n/\mathrm{T}+\lambda) = 0,$$

et par conséquent

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{G}(k\mathrm{T})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\lambda k\mathrm{T}} = \frac{1}{\mathrm{T}}\,\widehat{\mathrm{G}}(\lambda)\,;$$

on voit déjà que $\widehat{\mathrm{G}}$ est complètement connue à partir des valeurs $\mathrm{G}(k\mathrm{T})$, $k \in \mathbb{Z}$, puisque ces valeurs permettent de calculer $\widehat{\mathrm{G}}$ sur l'intervalle $[-\mathrm{M}, \mathrm{M}]$, et que $\widehat{\mathrm{G}} = 0$ par hypothèse en dehors de cet intervalle. Si on veut aller plus loin, on écrit pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\widehat{\mathrm{G}}(\lambda) = \widehat{\mathrm{G}}(\lambda)\,\mathbf{1}_{[-\mathrm{M},\mathrm{M}]}(\lambda) = \mathrm{T}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{G}(k\mathrm{T})\,\mathbf{1}_{[-\mathrm{M},\mathrm{M}]}(\lambda)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\lambda k\mathrm{T}},$$

et par Fourier inverse

$$\begin{aligned}\mathrm{G}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{\mathrm{G}}(\lambda)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\lambda t}\,\mathrm{d}\lambda &= \frac{\mathrm{T}}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{G}(k\mathrm{T})\int_{-\mathrm{M}}^{\mathrm{M}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\lambda(t-k\mathrm{T})}\,\mathrm{d}\lambda \\ &= \frac{\mathrm{T}}{\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{G}(k\mathrm{T})\,\frac{\sin(\mathrm{M}(t-k\mathrm{T}))}{t-k\mathrm{T}}\cdot\end{aligned}$$

Comme on a choisi $\pi/\mathrm{T} \ge \mathrm{M}$, la transformée de Fourier $\widehat{\mathrm{G}}$ est nulle $[-\pi/\mathrm{T}, \pi/\mathrm{T}]$, donc on peut aussi bien prendre $\mathrm{M} = \pi/\mathrm{T}$, ce qui donne finalement la *formule de Shannon*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{G}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{G}(k\mathrm{T})\,\frac{\sin(\pi(t-k\mathrm{T})/\mathrm{T})}{\pi(t-k\mathrm{T})/\mathrm{T}}\cdot$$

La condition de validité est que la *fréquence d'échantillonnage* $1/\mathrm{T}$ soit $\ge 2\,\mathrm{M}/(2\pi)$, donc plus que le *double* de la fréquence maximale $\mathrm{M}/(2\pi)$ attendue dans le signal G.

Dans le cas de CD musicaux, on ne cherche pas à transmettre de fréquences supérieures à 20KHz, car ces fréquences ne sont pas audibles pour un humain. Dans la pratique, on rencontre souvent dans ce domaine musical une fréquence d'échantillonnage $1/\mathrm{T} = 44\mathrm{KH}z$, qui signifie que le signal est numérisé 44000 fois par seconde. Par ailleurs, pour garantir la validité de la méthode, il faut commencer par assurer au préalable que le signal ne contient pas de fréquence supérieure à $20\mathrm{KH}z$: dans ce but on utilise un filtre passe-bas (que nous avons évoqué au chapitre 1).

Notes

([a]) En fait souvent ce seront des *classes périodiques* : pour une fonction mesurable f définie sur $\mathbb{R}$, on montre facilement (parce que la mesure de Lebesgue est invariante par translation) que la classe de la fonction translatée $\tau_{2\pi} f$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\tau_{2\pi} f)(x) = f(x - 2\pi)$$

ne dépend que de la classe de f ; ainsi, on peut définir la translatée d'une classe $\widetilde{f}$ et on dit que la classe $\widetilde{f}$ est 2π-périodique si elle coïncide, en tant que classe, avec la classe translatée $\tau_{2\pi}\widetilde{f}$. Cela revient à dire la chose suivante : pour tout représentant f de la classe f, l'ensemble

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x + 2\pi) \ne f(x)\}$$

est Lebesgue négligeable ; on peut, si on veut, choisir un représentant mesurable, partout défini et qui soit rigoureusement 2π-périodique (exercice).

($^{\mathbf{b}}$) Dire que f est C^1 par morceaux signifie qu'en chaque point de subdivision a_j, la dérivée f' admet une limite à gauche et une limite à droite, mais la dérivée $f'(a_j)$ n'existe pas en général. La fonction f' n'est pas définie partout, mais elle est définie presque partout ; elle est bornée parce que pour chaque $j = 0, \ldots, \mathrm{N}-1$, la fonction f' se prolonge en fonction continue sur l'intervalle compact $[a_j, a_{j+1}]$.

($^{\mathbf{c}}$) La fonction sinus est concave sur l'intervalle $[0, \pi/2]$, puisque sa dérivée seconde $-\sin$ est négative ou nulle sur cet intervalle. Sur l'intervalle $[0, \pi/2]$, la fonction sin est donc au dessus de la fonction affine qui coïncide avec sin en 0 et $\pi/2$, à savoir

$$x \to \frac{2}{\pi}\, x\,;$$

on a donc $\sin(x) \ge 2x/\pi$ pour $0 \le x \le \pi/2$.

($^{\mathbf{d}}$) Pour faire fonctionner la démonstration du corollaire 2 directement à partir du théorème 2, il suffirait que la fonction vérifie une *condition de Hölder* d'un ordre $\alpha > 0$, c'est-à-dire qu'il existe une constante C telle que

$$|f(x) - f(y)| \le \mathrm{C}\, |x - y|^\alpha$$

pour tous x, y. Néanmoins, une restriction plus forte que la seule continuité de f est nécessaire pour que le corollaire 2 soit exact : il existe des fonctions continues telles qu'en certains points, la série de Fourier soit divergente.