Chapitre 1. Transformation de Fourier

1.1. *Transformée de Fourier des fonctions intégrables*

Si f est une fonction réelle ou complexe intégrable sur $\mathbb{R}$, on pose

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,xy}\,\mathrm{d}x.$$

La fonction $\widehat{f}$ est la *transformée de Fourier* de f ; cette fonction $\widehat{f}$ est continue bornée, et tend([a]) vers 0 à l'infini ; on note alors que $\widehat{f}(0)$ est l'intégrale de f. Pour établir la majoration de $\widehat{f}$, on écrit simplement

$$|\widehat{f}(y)| = \Bigl|\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,xy}\,\mathrm{d}x\Bigr| \le \int_{\mathbb{R}} \bigl|f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,xy}\bigr|\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,\mathrm{d}x\,;$$

cette dernière expression est la *norme de f dans* $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$,

$$\|f\|_1 := \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

On utilisera aussi dans ce chapitre la norme de l'espace $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$, qui est définie pour $1 \le p < +\infty$ par

$$\|f\|_p := \Bigl(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\Bigr)^{1/p}.$$

À vrai dire, seuls les cas $p = 1$ et $p = 2$ seront vraiment importants pour nous, ainsi que le cas $p = +\infty$ qui correspond à l'espace $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$ des fonctions mesurables *bornées* sur $\mathbb{R}$. En utilisant la norme([b]) de L^∞, la majoration de la transformée de Fourier s'écrit

$$\|\widehat{f}\|_\infty \le \|f\|_1. \tag{1}$$

Il est clair que l'application $f \to \widehat{f}$ est linéaire de $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$, et elle est continue, de norme ≤ 1 d'après l'inégalité (1).

Premiers exemples

Si A est un sous-ensemble d'un ensemble X, on notera $\mathbf{1}_{\mathrm{A}}$ la *fonction indicatrice de* A, définie sur X par : $\mathbf{1}_{\mathrm{A}}(x) = 1$ si $x \in \mathrm{A}$, et $\mathbf{1}_{\mathrm{A}}(x) = 0$ si $x \notin \mathrm{A}$. Si $f = \mathbf{1}_{[a,b]}$ est l'indicatrice de l'intervalle $[a, b]$, on a

$$\widehat{\mathbf{1}_{[a,b]}}(y) = \int_a^b \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,ty}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,ay} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,by}}{\mathrm{i}\,y} \quad \text{pour } y \ne 0, \quad \widehat{\mathbf{1}_{[a,b]}}(0) = b - a\,;$$

en particulier pour l'intervalle symétrique $[-1/2, 1/2]$ on aura comme transformée de Fourier de $f = \mathbf{1}_{[-1/2,1/2]}$ la fonction

$$y \to \frac{\sin(y/2)}{y/2}.$$

On peut voir que cette fonction n'est pas Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}$: la transformation de Fourier ne transforme pas en général les fonctions intégrables en fonctions intégrables. De même pour les fonctions «rectangulaires» d'intégrale 1

$$\mathrm{R}_\varepsilon = \frac{1}{2\varepsilon}\,\mathbf{1}_{(-\varepsilon,\varepsilon)}$$

(où ε est > 0 quelconque) on trouve que $\widehat{\mathrm{R}_\varepsilon}(y) = \sin(\varepsilon y)/(\varepsilon y)$.

Pour la fonction $f : t \to \mathrm{e}^{-|t|}$ on trouve

$$\widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-|t|-\mathrm{i}ty}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t-\mathrm{i}ty}\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t+\mathrm{i}ty}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{1+\mathrm{i}y} + \frac{1}{1-\mathrm{i}y} = \frac{2}{1+y^2}.$$

Signaux simples périodiques, signaux plus complexes

Dans ce paragraphe, la variable t représentera le temps. Un signal simple (par exemple *l'onde porteuse* émise par une station de radio et reçue par une antenne) se représente en sinus ou cosinus, sous la forme $t \to \sin(\omega t)$ ou $t \to \cos(\omega t)$, ou bien avec une phase φ,

$$\sin(\omega t + \varphi) = \cos(\varphi)\sin(\omega t) + \sin(\varphi)\cos(\omega t)\,;$$

l'exponentielle complexe sera plus agréable mathématiquement, car elle transforme les sommes en produits : les deux fonctions $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ et $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ permettent de reconstituer par combinaisons linéaires les fonctions précédentes.

Si le signal est $t \to \sin(2\pi \mathrm{F} t)$, le nombre F est la *fréquence* du signal, c'est-à-dire le nombre des oscillations de la fonction sur un intervalle de longueur 1 (dans le contexte de la radio : un intervalle de 1 seconde ; une fréquence FM de 100 MHz correspond à 100 millions d'oscillations par seconde) ; on utilise aussi l'écriture $\sin(\omega t)$, et $\omega = 2\pi \mathrm{F}$ est alors appelé la *pulsation*.

On peut envisager un signal plus complexe qui soit un mélange de signaux de fréquences différentes,

$$t \to \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \varphi_j\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\xi_j}\,;$$

plus particulièrement, il pourrait être de la forme

$$t \to \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} (\xi_j - \xi_{j-1})\varphi(\xi_j)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\xi_j}$$

où φ est une fonction continue sur $[a,b]$ et $\xi_0 = a < \xi_1 < \ldots < \xi_{\mathrm{N}} = b$ une subdivision de l'intervalle $[a,b]$. Les signaux pratiquement étudiés dans ce cours seront de la forme limite suivante, qui est obtenue quand le pas de la subdivision tend vers 0,

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\xi}\,\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

où on fera des hypothèses qui permettront un traitement mathématique raisonnable du problème.

Théorème 1. *Si φ est continue, bornée et intégrable sur $\mathbb{R}$, et si la fonction signal f définie par*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\xi}\, \varphi(\xi)\, \mathrm{d}\xi$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$, alors

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f}(\xi) = 2\pi\, \varphi(\xi).$$

La transformée de Fourier permet donc d'analyser la contribution au signal f des différentes fréquences/pulsations ξ ; cette contribution est donnée, dans la formule ci-dessus qui définit f, par la fonction φ, qui est en principe connue de l'émetteur de l'émission, mais pas du récepteur qui ne voit que le signal f. La transformation de Fourier permet au récepteur de retrouver cette information φ sur la composition du signal.

On commence par montrer un cas particulier du théorème.

Lemme 1. *Si ψ est continue, bornée et intégrable sur $\mathbb{R}$, et si la fonction g définie par*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\xi}\, \psi(\xi)\, \mathrm{d}\xi$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$, alors

$$\widehat{g}(0) = 2\pi\, \psi(0).$$

Preuve.— Si on attaque tout droit, on écrit

$$\widehat{g}(0) = \int_{\mathbb{R}} g(t)\, \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \Bigl(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\xi}\, \psi(\xi)\, \mathrm{d}\xi \Bigr)\, \mathrm{d}t\,;$$

en admettant même qu'on puisse intervertir les intégrales, on se retrouve avec

$$\int_{\mathbb{R}} \Bigl(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\xi}\ \mathrm{d}t \Bigr) \psi(\xi)\, \mathrm{d}\xi$$

où l'intégrale intérieure n'a pas de sens évident. Il faut donc ruser, d'une façon ou d'une autre. On va remplacer $\int_{\mathbb{R}} g(t)\, \mathrm{d}t$ par $\int_{\mathbb{R}} g(t) k(\varepsilon t)\, \mathrm{d}t$, où k sera continue sur $\mathbb{R}$ et $k(0) = 1$; on fera tendre $\varepsilon > 0$ vers 0, de sorte que $k(\varepsilon t) \to k(0) = 1$ nous redonne à la limite l'expression $\int_{\mathbb{R}} g(t)\, \mathrm{d}t$ que nous voulons calculer.

Précisons les hypothèses : la fonction k est continue bornée intégrable sur $\mathbb{R}$ et sa transformée de Fourier $\widehat{k}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, puisque les fonctions $t \to k(\varepsilon t)$ et ψ sont intégrables, on peut écrire d'après le théorème de Fubini que

$$\int_{\mathbb{R}} g(t) k(\varepsilon t)\, \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}^2} \psi(\xi) k(\varepsilon t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\xi}\ \mathrm{d}t \mathrm{d}\xi\,;$$

ensuite, en posant $s = \varepsilon t$ et $v = \varepsilon^{-1}\xi$, on obtient $\mathrm{d}t\mathrm{d}\xi = \mathrm{d}s\mathrm{d}v$ par changement de variable et on prolonge la chaîne d'égalités

$$\int_{\mathbb{R}^2} \psi(\xi) k(\varepsilon t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\xi}\ \mathrm{d}t\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^2} \psi(\varepsilon v) k(s)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}sv}\ \mathrm{d}s\mathrm{d}v = \int_{\mathbb{R}} \psi(\varepsilon v) \widehat{k}(-v)\, \mathrm{d}v.$$

Puisque k et ψ sont continues bornées, g et $\widehat{k}$ intégrables, on obtient par deux applications du théorème de convergence dominée, quand $\varepsilon \to 0$

$$\int_{\mathbb{R}} g(t)k(\varepsilon t)\,\mathrm{d}t \to k(0)\int_{\mathbb{R}} g(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} \psi(\varepsilon v)\widehat{k}(-v)\,\mathrm{d}v \to \psi(0)\int_{\mathbb{R}} \widehat{k}(-v)\,\mathrm{d}v.$$

Il en résulte que

$$k(0)\int_{\mathbb{R}} g(t)\,\mathrm{d}t = \psi(0)\int_{\mathbb{R}} \widehat{k}(-v)\,\mathrm{d}v.$$

Pour finir, on applique ce qui précède avec $k(t) = \mathrm{e}^{-|t|}$ (par exemple ; puisqu'on a fait les calculs, autant s'en servir). Alors $k(0) = 1$ et on a vu que $\widehat{k}(v) = 2/(1+v^2)$, donc

$$\widehat{g}(0) = \int_{\mathbb{R}} g(t)\,\mathrm{d}t = \psi(0)\int_{\mathbb{R}} \frac{2}{1+v^2}\,\mathrm{d}v = 2\pi\,\psi(0),$$

et le lemme est démontré.

Démonstration du théorème 1. — Pour montrer le théorème 1 à partir du lemme 1, on fixe un ω quelconque et on effectue un décalage en fréquence en posant

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \psi(\xi) = \varphi(\xi + \omega).$$

La fonction g qui, dans l'énoncé du lemme 1, correspond à cette fonction ψ, est égale à

$$g(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\xi}\,\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\xi}\,\varphi(\xi+\omega)\,\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t(v-\omega)}\,\varphi(v)\,\mathrm{d}v = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\omega}\,f(t)$$

donc en appliquant le lemme 1, on sait que $\widehat{g}(0) = 2\pi\psi(0)$ et

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\omega}\,f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} g(t)\,\mathrm{d}t = \widehat{g}(0) = 2\pi\,\psi(0) = 2\pi\,\varphi(\omega).$$

Première formule d'inversion de Fourier

Pour ne pas nous répéter sans cesse dans la suite, on introduira une notation pour la classe des fonctions qui ont permis de démontrer le théorème 1 ; il ne s'agit pas d'une notation consacrée qu'on trouve dans les livres, simplement quelque chose « entre nous ».

Définition 1. On désignera par X l'ensemble des fonctions g sur $\mathbb{R}$, qui sont continues, bornées, intégrables et telles que $\widehat{g}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$.

On voit facilement que X est un espace vectoriel de fonctions, et X est contenu dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$: si la fonction f est élément de X, elle est à la fois intégrable et bornée ; on note alors que $|f(t)|^2 \le \|f\|_\infty\,|f(t)|$ est intégrable.

Théorème 2. *Si φ est une fonction de l'espace* X, *on a*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xy}\,\widehat{\varphi}(y)\,\mathrm{d}y.$$

Preuve. — Pour montrer le théorème 2, il suffit de changer de point de vue dans le théorème 1, en oubliant le sens physique des variables t et ξ, et en considérant la formule du théorème 1 d'un point de vue purement mathématique : si φ est continue, bornée et intégrable, et si on sait que $f(y) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xy}\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x$ est intégrable, le théorème 1 nous dit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f}(x) = 2\pi\, \varphi(x).$$

Or on voit que

$$f(y) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xy}\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x(-y)}\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x = \widehat{\varphi}(-y)$$

ce qui garantit que f est intégrable, puisque $\widehat{\varphi}$ est intégrable d'après l'hypothèse du théorème 2 ; on a donc bien par application du théorème 1

$$2\pi\, \varphi(x) = \widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\, f(y)\, \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\, \widehat{\varphi}(-y)\, \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xu}\, \widehat{\varphi}(u)\, du\,;$$

c'est le résultat annoncé.

Première estimation en norme L^2

Proposition 1. *Si g est une fonction de l'espace* X *de la définition 1, sa transformée de Fourier est dans* $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ *et*

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{g}(y)|^2\, \mathrm{d}y = 2\pi \int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2\, \mathrm{d}x.$$

Preuve. — On a pour toute fonction $g \in \mathrm{X}$, en prenant le complexe conjugué de l'égalité du théorème 2

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2\pi\, \overline{g(x)} = \overline{\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xy}\, \widehat{g}(y)\, \mathrm{d}y} = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\, \overline{\widehat{g}(y)}\, \mathrm{d}y\,;$$

ensuite, en appliquant le théorème de Fubini

$$2\pi \int_{\mathbb{R}} g(x)\overline{g(x)}\, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^2} g(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\, \overline{\widehat{g}(y)}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \widehat{g}(y)\, \overline{\widehat{g}(y)}\, \mathrm{d}y$$

ce qui donne le résultat annoncé.

On vient d'établir pour toute fonction $g \in \mathrm{X}$ un cas particulier de *l'identité de Parseval*,

$$\|\widehat{g}\|_2 = \sqrt{2\pi}\, \|g\|_2. \tag{2}$$

Cette propriété nous servira pour prolonger la transformation de Fourier à l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.

Signaux retardés ; Fourier et convolutions

Si un signal f est transmis avec un retard $s > 0$, le signal retardé est $f_s : t \to f(t-s)$; on a

$$\widehat{f_s}(\xi) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\xi}\, \widehat{f}(\xi).$$

On peut envisager un signal qui soit composé d'un mélange de signaux retardés f_s, avec une mesure de mélange $g(s)\, \mathrm{d}s$; on obtient alors le signal composé

$$t \to \int_{\mathbb{R}} f(t-s) g(s)\, \mathrm{d}s.$$

On voit apparaître la *convolution* des fonctions f et g, qui a été définie dans le cours d'intégration. On va rappeler les propriétés de cette opération.

Proposition 2. *Si $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, on peut poser pour presque tout $x \in \mathbb{R}$*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-s)g(s)\,\mathrm{d}s = (g * f)(x)\,;$$

on obtient de cette façon une classe de fonctions $f * g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et

$$\|f * g\|_1 \le \|f\|_1\,\|g\|_1, \qquad \int_{\mathbb{R}} (f * g)(x)\,\mathrm{d}x = \Bigl(\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x\Bigr)\Bigl(\int_{\mathbb{R}} g(x)\,\mathrm{d}x\Bigr).$$

Preuve.— Supposons f et g mesurables ≥ 0 ; en admettant la valeur $+\infty$, on peut toujours écrire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-s)g(s)\,\mathrm{d}s = (g * f)(x).$$

On a par Fubini positif

$$\int_{\mathbb{R}} (f * g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \Bigl(\int_{\mathbb{R}} f(x-s)g(s)\,\mathrm{d}s\Bigr)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^2} f(x-s)g(s)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \Bigl(\int_{\mathbb{R}} f(x-s)\,\mathrm{d}x\Bigr) g(s)\,\mathrm{d}s = \Bigl(\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x\Bigr)\Bigl(\int_{\mathbb{R}} g(s)\,\mathrm{d}s\Bigr).$$

Si f, g sont intégrables positives, on a donc

(3) $$\int_{\mathbb{R}} (f * g)(x)\,\mathrm{d}x = \Bigl(\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x\Bigr)\Bigl(\int_{\mathbb{R}} g(x)\,\mathrm{d}x\Bigr) < +\infty$$

ce qui implique en particulier que $(f * g)(x)$ est fini pour presque tout x. Si $f, g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, les fonctions $|f| : x \to |f(x)|$ et $|g|$ sont intégrables positives ; l'équation (3) appliquée à $|f|$ et $|g|$ montre que l'intégrale de $|f| * |g|$ est finie, donc l'ensemble N des $x \in \mathbb{R}$ tels que

$$(|f| * |g|)(x) = \int_{\mathbb{R}} |f(x-s)|\,|g(s)|\,\mathrm{d}s = +\infty$$

est négligeable ; on voit que pour tout $x \notin \mathrm{N}$, la fonction

$$s \to f(x-s)g(s)$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$, ce qui permet de poser

$$\forall x \notin \mathrm{N}, \quad (f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-s)g(s)\,\mathrm{d}s.$$

Si on veut, on peut poser $(f * g)(x) = 0$ pour $x \in \mathrm{N}$, et on obtient de cette façon une fonction mesurable $f * g$ définie partout sur $\mathbb{R}$ (l'affirmation de mesurabilité fait partie de l'énoncé du théorème de Fubini). On a ensuite

$$|(f * g)(x)| = \Bigl|\int_{\mathbb{R}} f(x-s)\,g(s)\,\mathrm{d}s\Bigr| \le \int_{\mathbb{R}} |f(x-s)|\,|g(s)|\,\mathrm{d}s = (|f| * |g|)(x)$$

et en utilisant (3) on obtient

$$\|f * g\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f * g| \le \int_{\mathbb{R}} (|f| * |g|) = \Bigl(\int_{\mathbb{R}} |f|\Bigr)\Bigl(\int_{\mathbb{R}} |g|\Bigr) = \|f\|_1\,\|g\|_1.$$

Pour l'intégrale de $f * g$, on reprend le calcul du début de la preuve, mais en utilisant maintenant Fubini général au lieu de Fubini positif.

Exemple. Convolution avec une fonction indicatrice d'intervalle

Si $\tau > 0$ et si on introduit la fonction $\mathrm{F}_\tau = \tau^{-1}\mathbf{1}_{[0,\tau]}$, on voit que pour toute $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et tout t, on a

$$(f * \mathrm{F}_\tau)(t) = \frac{1}{\tau}\int_{t-\tau}^{t} f(s)\,\mathrm{d}s.$$

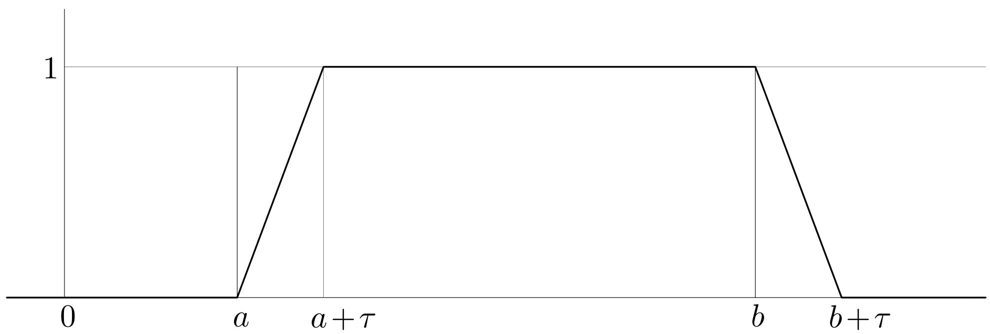
Il en résulte que $f * \mathrm{F}_\tau$ est continue, dérivable si f est continue. La fonction $f * \mathrm{F}_\tau$ est bornée par $\tau^{-1}\|f\|_1$ et elle est intégrable par la proposition précédente ; en résumé :

(R) *si $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, la fonction $f * \mathrm{F}_\tau$ est continue bornée et intégrable.*

Si $f = \mathbf{1}_{[a,b]}$ avec $b - a > \tau$, on voit que $\mathbf{1}_{[a,b]} * \mathrm{F}_\tau$ est nulle en dehors de $[a, b+\tau]$, égale à 1 dans $[a+\tau, b]$, avec un raccord linéaire entre les deux cas,

$$(\mathbf{1}_{[a,b]} * \mathrm{F}_\tau)(x) = (x-a)/\tau \quad \text{si} \quad a \le x \le a+\tau,$$

$$(\mathbf{1}_{[a,b]} * \mathrm{F}_\tau)(x) = (b+\tau-x)/\tau \quad \text{si} \quad b \le x \le b+\tau.$$



Graphe de $\mathbf{1}_{[a,b]} * \mathrm{F}_\tau$

En particulier, la valeur absolue de la différence entre $\mathbf{1}_{[a,b]}$ et $\mathbf{1}_{[a,b]} * \mathrm{F}_\tau$ est majorée par la somme $\mathbf{1}_{[a,a+\tau]} + \mathbf{1}_{[b,b+\tau]}$, fonction dont la norme est petite quand $\tau \to 0$. Plus précisément, pour tout p tel que $1 \le p < +\infty$, on peut majorer la norme L^p de la différence

$$\begin{aligned}\|\mathbf{1}_{[a,b]} - \mathbf{1}_{[a,b]} * \mathrm{F}_\tau\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}} \Bigl|\mathbf{1}_{[a,b]}(t) - (\mathbf{1}_{[a,b]} * \mathrm{F}_\tau)(t)\Bigr|^p \,\mathrm{d}t \\ &\le \int_{\mathbb{R}} \Bigl|\mathbf{1}_{[a,a+\tau]}(t) + \mathbf{1}_{[b,b+\tau]}(t)\Bigr|^p \,\mathrm{d}t = 2\tau.\end{aligned}$$

ce qui montre que

$$\|\mathbf{1}_{[a,b]} - \mathbf{1}_{[a,b]} * \mathrm{F}_\tau\|_p \le (2\tau)^{1/p}. \tag{4}$$

On peut voir que la majoration (mais pas le dessin) reste juste quand $0 < \tau \le b - a$. Si on fait un peu plus attention, on peut arriver à majorer par $\tau^{1/p}$ (au lieu de $(2\tau)^{1/p}$).

Théorème 3. *Si* $f, g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, *on a*

$$\widehat{f * g} = \widehat{f}\, \widehat{g}.$$

Preuve. — On a

$$(\widehat{f * g})(y) = \int_{\mathbb{R}} (f * g)(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, xy}\, \mathrm{d}x =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} f(x - s) g(s)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, xy}\, \mathrm{d}x \mathrm{d}s = \int_{\mathbb{R}} \Bigl(\int_{\mathbb{R}} f(x - s)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, (x-s) y}\, g(s)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, sy}\, \mathrm{d}s \Bigr)\, \mathrm{d}x$$

qui apparaît comme l'intégrale de $f_1 * g_1$, où on aurait posé $f_1(u) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, uy} f(u)$ et $g_1(u) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, uy} g(u)$; d'après les rappels sur la convolution de la proposition 2,

$$(\widehat{f * g})(y) = \int_{\mathbb{R}} f_1 * g_1 = \Bigl(\int_{\mathbb{R}} f_1 \Bigr) \Bigl(\int_{\mathbb{R}} g_1 \Bigr) =$$

$$= \Bigl(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, uy} f(u)\, du \Bigr) \Bigl(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, uy} g(u)\, du \Bigr) = \widehat{f}(y)\, \widehat{g}(y).$$

Filtres

Si la transformée de Fourier de g «ressemble» à l'indicatrice d'un intervalle de la forme $[-2\pi a, 2\pi a]$, par exemple si $\widehat{g} = \mathbf{1}_{[-2\pi a, 2\pi a]} * \mathrm{F}_{2\pi\tau}$ avec $\tau > 0$ petit, et si on forme le signal obtenu par moyenne des retardés de f avec la mesure $g(s)\, \mathrm{d}s$, on voit que l'effet de la convolution avec g est de supprimer dans le signal $f * g$ les fréquences du signal f qui sont au-delà de la valeur $a + \tau$, en gardant intacte la partie du signal qui contient les fréquences plus petites que $a - \tau$. Il existe des dispositifs physiques (en particulier des circuits électroniques) dont l'action sur un signal d'entrée f ressemble à ce qui est décrit dans les lignes précédentes. On appelle ces dispositifs des *filtres*, et par extension on nommera ainsi des fonctions g qui pourraient *théoriquement* avoir cet effet.

Pour qu'un filtre soit réalisable, le minimum est qu'il soit obtenu en mélangeant des *retardés* de f, c'est-à-dire qu'on limite la mesure $g(s)\, \mathrm{d}s$ aux valeurs $s > 0$, ce qui veut dire qu'on suppose que la fonction g est nulle sur $]-\infty, 0]$. Il est en effet impossible d'utiliser des *anticipés* du signal, correspondant à des valeurs futures qui sont normalement inconnues ! On pourra voir en exercice que le filtre mathématique g proposé au début du paragraphe précédent *n'est pas* physiquement réalisable.

Dans d'autres contextes, la convolution peut être utilisée pour faire par exemple une moyenne *spatiale* de translatés d'un phénomène, au lieu de la moyenne temporelle que nous avons envisagée. Dans un tel cas, il n'y aura en général aucune raison de limiter le support de g au côté positif. On en verra un exemple plus loin à propos de l'équation de la chaleur.

Calcul de la transformée de Fourier de F_τ

On voit que

$$\widehat{\mathrm{F}_\tau}(\xi) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi t}\, \mathrm{d}t = \frac{1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau\xi}}{\mathrm{i}\tau\xi} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau\xi/2}\, \frac{\sin(\tau\xi/2)}{\tau\xi/2}. \tag{5}$$

Si on pense à F_τ comme à un filtre (un filtre mathématique, pas un filtre réaliste) agissant sur le signal f pour donner le «signal filtré» $f * \mathrm{F}_\tau$, on voit que les pulsations $\xi \neq 0$ telles que $\sin(\tau\xi/2) = 0$ seront «tuées» par la convolution avec F_τ, ce qui correspond à $\tau\xi \in 2\pi\,\mathbb{Z}$, et ξ non nul ; en terme de fréquence $\mathrm{F} = \xi/(2\pi)$, la première fréquence annulée est $\mathrm{F} = \tau^{-1}$, et les autres sont les multiples de τ^{-1}. Si on veut écouter une radio qui émet sur 100 MHz = 10^8 Hz, il ne faut sûrement pas commencer par faire la moyenne de son signal sur un intervalle de temps de $\tau = 10^{-8}$ s !

1.2. *Fourier dans* $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$

Avant de se lancer on va rassembler quelques propriétés simples. Si $g = \mathbf{1}_{[a,b]}$ on a deux majorations pour $\widehat{g}$: la majoration générale par $\|\widehat{g}\|_\infty \le \|g\|_1 = b - a$ de la relation (1), et une autre majoration qui provient du calcul explicite

$$|\widehat{g}(y)| = \Bigl| \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ay} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}by}}{\mathrm{i}y} \Bigr| \le \frac{2}{|y|},$$

de sorte qu'en utilisant l'une ou l'autre au bon moment, on trouve

$$(1 + y^2)\, |\widehat{g}(y)|^2 = |\widehat{g}(y)|^2 + y^2\, |\widehat{g}(y)|^2 \le (b - a)^2 + 4.$$

Il en résulte que $|\widehat{g}(y)| \le \mathrm{C}\,(1 + y^2)^{-1/2}$ pour une certaine constante C, et $\widehat{g}$ est de carré intégrable :

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{g}(y)|^2\, \mathrm{d}y \le \mathrm{C}^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}y}{1 + y^2} < +\infty.$$

Si on considère $g * \mathrm{F}_\tau$, on sait déjà que cette fonction est continue bornée intégrable, d'après le résumé (R) ; puisque F_τ est un multiple de fonction indicatrice, la transformée de Fourier $\widehat{\mathrm{F}}_\tau$ est dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ d'après ce qui précède, et $\widehat{g * \mathrm{F}_\tau} = \widehat{g}\, \widehat{\mathrm{F}}_\tau$ est intégrable comme produit de deux fonctions L^2 (appliquer l'inégalité de Hölder, voir annexe, théorème A7). On a vu aussi à l'équation (4) que

$$\|g - g * \mathrm{F}_\tau\|_2 \le \sqrt{2\tau} \to 0$$

lorsque $\tau \to 0$. En résumé :

si g *est une fonction indicatrice d'intervalle, la transformée de Fourier* $\widehat{g}$ *est dans* L^2*, la fonction* $g * \mathrm{F}_\tau$ *appartient à l'espace* X *pour tout* $\tau > 0$*, et* $g * \mathrm{F}_\tau$ *tend vers* g *dans* L^2 *lorsque* $\tau \to 0$.

Par combinaison linéaire de fonctions indicatrices d'intervalles on obtient les fonctions en escalier, et il résulte des lignes précédentes, par linéarité, le lemme qui suit.

Lemme 2. *Si g est en escalier, la transformée de Fourier $\widehat{g}$ est dans L^2, la fonction $g * \mathrm{F}_\tau$ appartient à l'espace* X *pour tout $\tau > 0$, et $g * \mathrm{F}_\tau$ tend vers g dans L^2 lorsque $\tau \to 0$. Il en résulte que l'espace* X *est dense dans* $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.

Preuve. — On va indiquer le principe, qui est très simple. Une *fonction en escalier* g est une fonction sur $\mathbb{R}$ de la forme

$$g = \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} c_j \mathbf{1}_{[a_j, b_j]}$$

où $a_j \le b_j$ pour tout j. La transformation de Fourier est linéaire, donc

$$\widehat{g} = \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} c_j \widehat{\mathbf{1}_{[a_j, b_j]}}\,;$$

d'après les remarques qui précèdent le lemme, chaque $\widehat{\mathbf{1}_{[a_j, b_j]}}$ est dans L^2, donc $\widehat{g}$ est dans L^2 par combinaison linéaire, puisque L^2 est un espace vectoriel de fonctions. De même

$$g * \mathrm{F}_\tau = \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} c_j \mathbf{1}_{[a_j, b_j]} * \mathrm{F}_\tau$$

est dans X comme combinaison linéaire des $\mathbf{1}_{[a_j, b_j]} * \mathrm{F}_\tau$ qui sont dans l'espace vectoriel X. Enfin, la limite dans L^2 d'une somme finie étant la somme des limites,

$$\lim_{\tau \to 0} g * \mathrm{F}_\tau = \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} c_j \lim_{\tau \to 0} \mathbf{1}_{[a_j, b_j]} * \mathrm{F}_\tau = \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} c_j \mathbf{1}_{[a_j, b_j]} = g.$$

Vérifions pour finir la densité de l'espace X dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$: soient $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$; d'après le théorème A6 de l'annexe, on peut trouver une fonction en escalier g telle que $\|f - g\|_2 < \varepsilon/2$, puis une valeur de $\tau > 0$ telle que $\|g - g * \mathrm{F}_\tau\|_2 < \varepsilon/2$. Alors $g * \mathrm{F}_\tau$ est dans X, et $\|f - g * \mathrm{F}_\tau\|_2 < \varepsilon$.

Corollaire 1. *Si g est en escalier, sa transformée de Fourier $\widehat{g}$ est dans L^2 et*

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{g}(y)|^2 \,\mathrm{d}y = 2\pi \int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 \,\mathrm{d}x.$$

Preuve. — La convolée $g * \mathrm{F}_\tau$ tend vers g dans L^2 quand $\tau \to 0$ d'après le lemme précédent, donc la norme L^2 de la limite est la limite des normes,

$$\int_{\mathbb{R}} |g|^2 = \|g\|_2^2 = \lim_{\tau \to 0} \|g * \mathrm{F}_\tau\|_2^2 = \lim_{\tau \to 0} \int_{\mathbb{R}} |g * \mathrm{F}_\tau|^2.$$

On sait que $|\widehat{\mathrm{F}}_\tau(y)| \le \|\mathrm{F}_\tau\|_1 = 1$ et

$$\widehat{\mathrm{F}}_\tau(y) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau y/2} \,\frac{\sin(\tau y/2)}{\tau y/2}$$

tend vers 1 quand $\tau \to 0$ pour tout y fixé, ce qui permet de voir que

$$|\widehat{g}(y)|^2\,|\widehat{\mathrm{F}}_\tau(y)|^2 \to |\widehat{g}(y)|^2$$

en restant majoré par la fonction intégrable $|\widehat{g}|^2$; il en résulte avec Lebesgue dominé que

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{g}|^2 = \lim_{\tau\to 0} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{g}|^2\,|\widehat{\mathrm{F}}_\tau|^2 = \lim_{\tau\to 0} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{g * \mathrm{F}_\tau}|^2.$$

Par ailleurs, puisque $g * \mathrm{F}_\tau$ est un élément de l'espace X, on sait d'après l'équation (2) que

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{g * \mathrm{F}_\tau}|^2 = 2\pi \int_{\mathbb{R}} |g * \mathrm{F}_\tau|^2$$

pour tout τ, donc

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{g}|^2 = \lim_{\tau\to 0} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{g * \mathrm{F}_\tau}|^2 = 2\pi \lim_{\tau\to 0} \int_{\mathbb{R}} |g * \mathrm{F}_\tau|^2 = 2\pi \int_{\mathbb{R}} |g|^2.$$

Proposition 3. *Si $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ est nulle en dehors d'un intervalle borné de $\mathbb{R}$, alors f est intégrable, $\widehat{f}$ est de carré intégrable et on a* l'égalité de Parseval

$$\|\widehat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi}\,\|f\|_2.$$

Preuve. — On suppose que $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ est nulle en dehors d'un intervalle borné $[-a, a]$. Dans ce cas f est aussi dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ d'après le lemme A8 de l'annexe, et la fonction $\widehat{f}$ est bien définie. D'après le cours d'intégration (voir le théorème A6 de l'annexe) il existe une suite (g_n) de fonctions en escalier qui converge vers f dans L^2 ; on peut supposer [c] que les (g_n) sont nulles en dehors de $[-a, a]$, ce qui implique qu'elles tendent vers f au sens de L^1 également, puisqu'on sait alors que $\|f - g_n\|_1 \le \sqrt{2a}\,\|f - g_n\|_2$ d'après le lemme A8. Il en résulte que $\widehat{g}_n$ tend uniformément vers $\widehat{f}$, puisque d'après (1)

$$\|\widehat{f} - \widehat{g}_n\|_\infty \le \|f - g_n\|_1 \to 0.$$

Par ailleurs la suite (g_n) est de Cauchy dans L^2 puisqu'elle converge vers f, et la relation

$$\|\widehat{g}_n - \widehat{g}_m\|_2 = \sqrt{2\pi}\,\|g_n - g_m\|_2$$

obtenue au corollaire 1 montre que la suite $(\widehat{g}_n)$ est elle aussi de Cauchy, donc converge dans l'espace complet L^2 vers une fonction h. Puisque $\widehat{g}_n$ tend uniformément vers $\widehat{f}$, cette fonction h ne peut être [d] que $\widehat{f}$. Finalement $\widehat{g}_n$ tend vers $\widehat{f}$ dans L^2 et

$$\|\widehat{f}\|_2 = \lim_n \|\widehat{g}_n\|_2 = \sqrt{2\pi}\,\lim_n \|g_n\|_2 = \sqrt{2\pi}\,\|f\|_2.$$

Théorème 4 et définition 2. *Si $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ on pose $f_n = \mathbf{1}_{[-n,n]} f$, pour tout entier $n \geq 1$; alors f_n est intégrable, la transformée de Fourier $\widehat{f_n}$ est de carré intégrable et la suite $(\widehat{f_n})$ converge dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$; par définition la* transformée de Fourier *$\mathcal{F}f$ est la limite de cette suite,*

$$\mathcal{F}f = \lim_{\mathrm{L}^2} \widehat{f_n}.$$

Si de plus $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, on a $\mathcal{F}f = \widehat{f}$ presque-partout. L'application $f \to \mathcal{F}f$ est une application linéaire continue de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, et on a l'identité de Parseval

$$\forall f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}), \quad \|\mathcal{F}f\|_2 = \sqrt{2\pi}\, \|f\|_2.$$

Preuve. — On voit d'abord par le lemme A9 que $f_n = \mathbf{1}_{[-n,n]} f$ tend vers f dans L^2, donc (f_n) est de Cauchy dans L^2. On a vu à la proposition 3 que pour toute fonction $h \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ nulle en dehors d'un intervalle, on a $\widehat{h} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ et

$$\|\widehat{h}\|_2 = \sqrt{2\pi}\, \|h\|_2.$$

Cette relation s'applique aux fonctions $f_n - f_m$, qui sont nulles hors d'un intervalle borné,

$$\|\widehat{f_n} - \widehat{f_m}\|_2 = \sqrt{2\pi}\, \|f_n - f_m\|_2\,;$$

puisque (f_n) est de Cauchy dans L^2, on voit que la suite $(\widehat{f_n})$ est elle aussi de Cauchy dans L^2, et comme $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ est complet cette suite est convergente et on peut poser

$$\mathcal{F}f = \lim_{\mathrm{L}^2} \widehat{f_n}.$$

On obtient l'égalité de Parseval en disant que la norme de la limite est la limite des normes et en rappelant que $\|\widehat{f_n}\|_2 = \sqrt{2\pi}\, \|f_n\|_2$ pour tout n, par la proposition 3. Si g est une autre fonction de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ on associera à la combinaison linéaire $af + bg \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ la suite

$$(af + bg)_n = \mathbf{1}_{[-n,n]}(af + bg) = af_n + bg_n,$$

et par l'addition des limites dans un espace vectoriel normé et la linéarité de la transformation de Fourier sur $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$

$$\mathcal{F}(af + bg) = \lim_n\, (\widehat{af_n + bg_n}) = a \lim_n \widehat{f_n} + b \lim_n \widehat{g_n} = a\,\mathcal{F}f + b\,\mathcal{F}g.$$

Enfin, si f est à la fois dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, on montre que f_n tend vers f pour la norme de L^1 (lemme A9), ce qui entraîne que $\widehat{f_n}$ tend vers $\widehat{f}$ uniformément. Comme $(\widehat{f_n})$ tend vers $\mathcal{F}f$ en norme L^2, il existe une sous-suite qui converge presque partout vers $\mathcal{F}f$, ce qui implique $\mathcal{F}f = \widehat{f}$ presque partout (corollaire A4 de l'annexe).

Intégrales semi-convergentes et Fourier

Proposition 4. *Soit (a_n) une suite de réels qui tend vers $-\infty$ et soit (b_n) une suite de réels qui tend vers $+\infty$; si $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ et si la limite*

$$\mathrm{F}(y) = \lim_n \int_{a_n}^{b_n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy} f(x)\,\mathrm{d}x$$

existe pour presque tout $y \in \mathbb{R}$, alors $\mathcal{F}f = \mathrm{F}$ presque partout. En particulier, si la fonction f est dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ et si l'intégrale généralisée

$$\mathrm{F}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy} f(x)\,\mathrm{d}x$$

est semi-convergente pour presque tout $y \in \mathbb{R}$, alors $\mathcal{F}f = \mathrm{F}$ presque partout.

Preuve.— Si on pose $f_n = \mathbf{1}_{[a_n,b_n]} f$, on a

$$\int_{a_n}^{b_n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy} f(x)\,\mathrm{d}x = \widehat{f}_n(y),$$

donc l'hypothèse de la proposition est que $(\widehat{f}_n)$ converge vers F presque partout ; mais comme on sait que (f_n) tend vers f dans L^2 (lemme A9), on déduit que $(\widehat{f}_n)$ tend vers $\mathcal{F}f$ dans L^2 d'après le théorème 4 ; il en résulte que $\mathcal{F}f = \mathrm{F}$ presque partout (corollaire A4).

Inversion de Fourier dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$

Désignons par σ l'application qui associe à chaque fonction f la fonction σf définie sur $\mathbb{R}$ par $(\sigma f)(x) = f(-x)$. Il est clair que σ est isométrique sur $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$,

$$\forall f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}), \quad \|\sigma f\|_p = \|f\|_p,$$

et que $\sigma \circ \sigma = \mathrm{Id}$. Sur l'espace X de la définition 1, on a $\mathcal{F} \circ \mathcal{F} = 2\pi\,\sigma$ et $\mathcal{F} \circ \sigma = \sigma \circ \mathcal{F}$: en effet, les fonctions $f \in \mathrm{X}$ sont dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ et dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, donc $\mathcal{F}f = \widehat{f}$ d'après le théorème 4 ; si $f \in \mathrm{X}$ on sait (théorème 2) que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de $2\pi\,(\sigma f)(x)$ est égale à

$$2\pi\, f(-x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-x)y}\, \widehat{f}(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\, \widehat{f}(y)\,\mathrm{d}y = (\mathcal{F}\widehat{f})(x) = (\mathcal{F} \circ \mathcal{F})(f)(x),$$

donc $2\pi\,(\sigma f) = (\mathcal{F} \circ \mathcal{F})(f)$, et par ailleurs

$$(\mathcal{F} \circ \sigma)(f)(y) = \mathcal{F}(\sigma f)(y) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy} f(-x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}u(-y)} f(u)\,du = (\mathcal{F}f)(-y),$$

qui est égal à $(\sigma \circ \mathcal{F})(f)(y)$. Par la densité de l'espace vectoriel X dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ (lemme 2) on déduit le résultat qui suit.

Théorème 5. *Pour la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ agissant de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ on a*

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{F} = 2\pi\,\sigma, \quad \mathcal{F} \circ \sigma = \sigma \circ \mathcal{F}$$

donc $\mathcal{F}$ est inversible et

$$\mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{2\pi}\,\mathcal{F}\circ\sigma = \frac{1}{2\pi}\,\sigma\circ\mathcal{F}.$$

En particulier, si la fonction $g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ est nulle en dehors d'un intervalle borné de $\mathbb{R}$, ou plus généralement si la fonction g est à la fois dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ et dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, on peut écrire

$$(\mathcal{F}^{-1}g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,xy}\,g(y)\,\mathrm{d}y.$$

Preuve. — L'application $\mathrm{T} = \mathcal{F}\circ\mathcal{F} - 2\pi\sigma$ est continue de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, donc l'ensemble

$$\mathrm{Y} = \{f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}) : \mathrm{T}f = 0\}$$

est un sous-ensemble fermé de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Mais on a dit qu'il contient X, donc Y contient aussi l'adhérence $\overline{\mathrm{X}}$, qui est égale à $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ puisque X est dense (lemme 2), donc $\mathrm{Y} = \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ et $\mathrm{T} = 0$, ce qu'il fallait démontrer pour le premier point. La preuve du second est analogue. Pour trouver l'inverse de $\mathcal{F}$ à partir des premières conclusions, on remarque que

$$\bigl(\mathcal{F}\circ\sigma\bigr)\circ\mathcal{F} = \mathcal{F}\circ\bigl(\mathcal{F}\circ\sigma\bigr) = \mathcal{F}\circ\mathcal{F}\circ\sigma = 2\pi\,\sigma\circ\sigma = 2\pi\,\mathrm{Id}_{\mathrm{L}^2}\,.$$

Pour obtenir la dernière conclusion, on se rappelle que dans le cas où $g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ est aussi intégrable, la transformée $\mathcal{F}g$ peut se calculer comme $\widehat{g}$ (théorème 4), ce qui entraîne que $(\mathcal{F}^{-1}g)(x) = (2\pi)^{-1}(\sigma\widehat{g})(x) = (2\pi)^{-1}\widehat{g}(-x)$, comme annoncé.

Exemple de $y \to \sin(y)/y$

Puisque $g(y) = \sin(y)/y$ est la transformée de Fourier de $f = \frac{1}{2}\,\mathbf{1}_{[-1,1]}$ et que g est paire, on a $g = g\circ\sigma$ et l'inversion de Fourier dans L^2 nous dit que

$$\mathbf{1}_{[-1,1]} = \frac{1}{\pi}\,\mathcal{F}g$$

en tant que classe de fonctions. Par ailleurs on va montrer que

$$(*) \qquad \int_{-n}^{n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,xy}\,g(y)\,\mathrm{d}y = \int_{-n}^{n} \cos(xy)\sin(y)\,\frac{\mathrm{d}y}{y}$$

tend vers une limite qu'on va identifier, pour tout $x \in \mathbb{R}$; on sait ($^{\mathbf{e}}$) que

$$\mathrm{V} = \lim_{n\to+\infty}\int_0^n \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty}\frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y$$

existe, et il en résulte par changement de variable que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-n}^{n}\frac{\sin(ay)}{y}\,\mathrm{d}y$$

est égale à 2V pour tout $a > 0$ et à $-2\mathrm{V}$ pour tout $a < 0$. En utilisant les formules d'addition des sinus, on voit que

$$2\int_{-n}^{n}\cos(xy)\sin(y)\,\frac{\mathrm{d}y}{y} = \int_{-n}^{n}\sin\bigl[(1+x)y\bigr]\,\frac{\mathrm{d}y}{y} + \int_{-n}^{n}\sin\bigl[(1-x)y\bigr]\,\frac{\mathrm{d}y}{y}$$

tend vers 4V lorsque $|x| < 1$, et vers 0 quand $|x| > 1$ (il y a aussi convergence quand $x = \pm 1$, la limite est 2V dans ce cas mais nous ne l'utiliserons pas). Il en résulte d'après la relation $(*)$ et la proposition 4 que $\mathcal{F}g = 2\mathrm{V}\,\mathbf{1}_{[-1,1]}$ comme classe de fonctions. On déduit donc de l'inversion de Fourier que $\mathrm{V} = \pi/2$, c'est-à-dire qu'on a trouvé la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2}.$$

On peut noter que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 y}{y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2},$$

car $\int_{\mathbb{R}} g^2 = 2\pi \int_{\mathbb{R}} f^2 = \pi$ par l'identité de Parseval.

1.3. *Compléments sur la convolution et sur Fourier*

Convolutions $\mathrm{L}^p * \mathrm{L}^1$

Proposition 5. *Si $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ et $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, avec $1 \le p \le +\infty$, alors $f * g \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ et*

$$\|f * g\|_p \le \|f\|_p\,\|g\|_1.$$

Donnons la preuve du cas $p = 2$. On suppose f et g mesurables positives ; avec Cauchy-Schwarz,

$$\Bigl(\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y\Bigr)^2 = \Bigl(\int_{\mathbb{R}} f(x-y)\sqrt{g(y)}\,\sqrt{g(y)}\,\mathrm{d}y\Bigr)^2 \le$$

$$\Bigl(\int_{\mathbb{R}} f^2(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y\Bigr)\Bigl(\int_{\mathbb{R}} g(y)\,\mathrm{d}y\Bigr) = \|g\|_1 \int_{\mathbb{R}} f^2(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y = \|g\|_1\,(f^2 * g)(x)$$

avec f^2 et g intégrables ; d'après la proposition 2,

$$\int_{\mathbb{R}}\Bigl(\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y\Bigr)^2\mathrm{d}x \le \|g\|_1\,\|f^2\|_1\,\|g\|_1 = \|g\|_1^2\,\|f\|_2^2.$$

Quand f et g ne sont pas positives, on majore les intégrales comme d'habitude en introduisant les fonctions $|f|$ et $|g|$. Le cas $p = +\infty$ est facile (exercice) et doit se traiter à part. Le cas $p = 1$ est déjà connu (proposition 2), et le cas $1 < p < +\infty$, $p \ne 2$ se traite en remplaçant Cauchy-Schwarz par Hölder (introduire l'exposant q conjugué de p, écrire $g(y) = g(y)^{1/p}\,g(y)^{1/q}$ et adapter ce qui précède).

Approximation de l'unité dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$

On va énoncer un cas très particulier de la méthode générale *d'approximation par convolution*.

Théorème 6. *Si $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$, avec $1 \le p < +\infty$, la convolée $f * \mathrm{F}_\tau$ converge vers f dans L^p lorsque $\tau \to 0$.*

Preuve. — Soit $\varepsilon > 0$ donné ; d'après le cours d'intégration (et l'Annexe à la fin de ce chapitre, théorème A6), on peut trouver une fonction en escalier g telle que l'on ait $\|f - g\|_p < \varepsilon/3$. On a vu à l'équation (4) que $\|h - h * \mathrm{F}_\tau\|_p < (2\tau)^{1/p}$ lorsque h est une indicatrice d'intervalle borné, donc pour τ assez petit, on aura par linéarité $\|g - g * \mathrm{F}_\tau\|_p < \varepsilon/3$; d'après la proposition 5 on a aussi

$$\|f * \mathrm{F}_\tau - g * \mathrm{F}_\tau\|_p = \|(f-g) * \mathrm{F}_\tau\|_p \le \|f - g\|_p\,\|\mathrm{F}_\tau\|_1 = \|f - g\|_p < \varepsilon/3.$$

Finalement pour $\tau > 0$ assez petit on a $\|f - f * \mathrm{F}_\tau\|_p < \varepsilon$ par l'inégalité triangulaire.

Corollaire. *Si f et $\widehat{f}$ sont dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, on a presque partout*

$$2\pi\, f(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xy}\, \widehat{f}(y)\, \mathrm{d}y.$$

Preuve. — Si f vérifie ces hypothèses, on voit que $f * \mathrm{F}_\tau$ est dans l'espace X de la définition 1 : lorsque $f \in \mathrm{L}^1$, on a toujours que $f * \mathrm{F}_\tau$ est continue bornée intégrable par le résumé (R), et de plus ici $\widehat{f * \mathrm{F}_\tau} = \widehat{f}\, \widehat{\mathrm{F}_\tau}$ est bornée en module par $|\widehat{f}|$, donc intégrable d'après l'hypothèse du corollaire. Il en résulte que $f * \mathrm{F}_\tau \in \mathrm{X}$, donc $f * \mathrm{F}_\tau$ vérifie la formule de Fourier inverse ponctuelle du théorème 2

$$2\pi\, (f * \mathrm{F}_\tau)(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\, \widehat{f * \mathrm{F}_\tau}(t)\, \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\, \widehat{\mathrm{F}_\tau}(t) \widehat{f}(t)\, \mathrm{d}t.$$

Quand τ tend vers 0, $\widehat{\mathrm{F}_\tau}(t)$ tend vers 1 en restant majoré par 1 (voir l'équation 5), donc l'intégrale

$$2\pi\, (f * \mathrm{F}_\tau)(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\, \widehat{\mathrm{F}_\tau}(t) \widehat{f}(t)\, \mathrm{d}t$$

tend vers

$$\mathrm{F}(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\, \widehat{f}(t)\, \mathrm{d}t$$

par Lebesgue dominé, mais $2\pi\, f * \mathrm{F}_\tau$ tend vers $2\pi f$ dans L^1 par le théorème précédent. Le résultat $\mathrm{F} = 2\pi\, f$ presque partout en découle par le corollaire A4 de l'annexe.

Corollaire. *La transformation de Fourier est injective sur* $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.

En effet, si $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et $\widehat{f} = 0$, on a bien f et $\widehat{f}$ intégrables et le corollaire précédent s'applique. Comme $\widehat{f} = 0$, la formule d'inversion donne $f = 0$.

1.4. *Fourier et dérivation*

Proposition 6. *Si f et $x \to x f(x)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$, la transformée de Fourier $\widehat{f}$ est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est obtenue par dérivation sous l'intégrale,*

$$(\widehat{f}\,)'(y) = -\mathrm{i} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\, x f(x)\, \mathrm{d}x.$$

Si f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, avec f et f' intégrables sur $\mathbb{R}$, alors

$$\widehat{f'}\,(y) = \mathrm{i}y\, \widehat{f}(y).$$

Preuve. — Le premier résultat est obtenu par dérivation sous l'intégrale. Pour le second, on écrit

$$(f' * \mathrm{F}_\tau)(x) = \frac{1}{\tau} \int_{x-\tau}^{x} f'(u)\, du = \frac{f(x) - f(x-\tau)}{\tau}\ ;$$

comme $f' \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, on sait que $f' * \mathrm{F}_\tau$ tend dans L^1 vers f' quand $\tau \to 0$ d'après le théorème 6, donc $\widehat{f' * \mathrm{F}_\tau}$ tend uniformément vers $\widehat{f'}$ par la relation (1) ; d'après la partie droite de l'équation précédente, la transformée de Fourier de $f' * \mathrm{F}_\tau$ est égale à

$$y \to \frac{1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau y}}{\tau}\, \widehat{f}(y)$$

qui tend simplement vers $y \to \mathrm{i}y\widehat{f}(y)$ quand $\tau \to 0$, d'où le résultat $\widehat{f'}(y) = \mathrm{i}y\widehat{f}(y)$.

Exemple de la densité gaussienne

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}$$
est intégrable, et $x \to x f(x)$ est intégrable aussi : il en résulte que la fonction g définie par $g(y) = \widehat{f}(y)$ est de classe C^1. On obtient par la proposition ci-dessus, suivie d'une intégration par parties

$$g'(y) = -\mathrm{i} \int_{\mathbb{R}} x\, \mathrm{e}^{-x^2/2}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\; \mathrm{d}x = \mathrm{i}\Bigl(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{i}y\, \mathrm{e}^{-x^2/2}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\; \mathrm{d}x \Bigr) = -y\, g(y).$$

La résolution de l'équation différentielle $g'(y) = -yg(y)$, compte-tenu de l'égalité

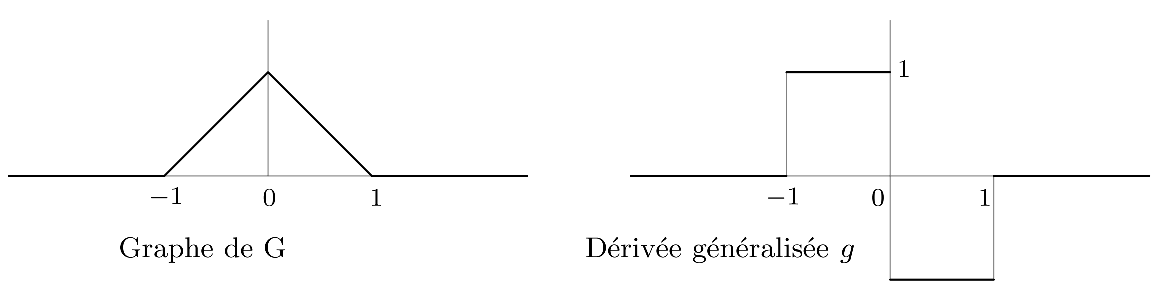
$$g(0) = \widehat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2/2}\; \mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$$

donne
$$\widehat{f}(y) = g(y) = \sqrt{2\pi}\; \mathrm{e}^{-y^2/2} = \sqrt{2\pi}\, f(y).$$
On peut observer que la fonction f est un vecteur propre de la transformation de Fourier, correspondant à la valeur propre $\sqrt{2\pi}$.

On dira que la fonction g, intégrable sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}$, est la *dérivée généralisée* de la fonction continue G si on a pour tous $u \le v$

$$\mathrm{G}(v) - \mathrm{G}(u) = \int_u^v g(s)\,\mathrm{d}s.$$

C'est le cas par exemple si G est continue, linéaire par morceaux, avec $\mathrm{G} = 0$ hors de $[-1, 1]$, $\mathrm{G}(0) = 1$ et G linéaire sur $[-1, 0]$ et $[0, 1]$. La dérivée généralisée g de cette fonction G est égale à $g = \mathbf{1}_{[-1,0]} - \mathbf{1}_{[0,1]}$ dans ce cas.



Graphe de G　　　Dérivée généralisée g

Lorsque G est de classe C^1, la dérivée généralisée g est simplement la dérivée usuelle G'. La première partie de la proposition 7 correspond au deuxième cas de la proposition 6 : lorsque G est de classe C^1 avec G, G' à la fois dans L^1 et L^2, les deux énoncés peuvent être appliqués à la fonction G.

Proposition 7. *On suppose que g et G sont deux fonctions de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ telles que G soit continue sur $\mathbb{R}$ et*

$$\mathrm{G}(v) - \mathrm{G}(u) = \int_u^v g(s)\,\mathrm{d}s$$

pour tous $u \le v$; on a alors pour presque tout y

$$(\mathcal{F}g)(y) = \mathrm{i}y\,(\mathcal{F}\mathrm{G})(y).$$

Inversement, si $\mathrm{G} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ est continue et si $y \to y\,(\mathcal{F}\mathrm{G})(y)$ est de carré intégrable, il existe une fonction $g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ telle que

$$\mathrm{G}(v) - \mathrm{G}(u) = \int_u^v g(s)\,\mathrm{d}s$$

pour tous $u \le v$.

Preuve. — La première partie se fait comme dans le cas de L^1 (preuve de la proposition 6), en disant ici que $g * \mathrm{F}_\tau$ tend vers g dans L^2 (théorème 6), et en exploitant la définition de la dérivée généralisée,

$$(g * \mathrm{F}_\tau)(x) = \frac{1}{\tau} \int_{x-\tau}^x g(s)\,\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{G}(x) - \mathrm{G}(x-\tau)}{\tau}\ ;$$

de plus, on vérifie que la transformée de Fourier de $x \to \mathrm{G}(x-\tau)$ est $\xi \to \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau\xi}(\mathcal{F})(\xi)$, comme dans le cas de $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ (revenir à la définition 2).

Pour la seconde partie : d'après la preuve du résultat sur la dérivabilité de la transformée de Fourier des fonctions de L^1 on voit que la fonction G_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\mathrm{G}_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}xy} (\mathcal{F}\mathrm{G})(y)\,\mathrm{d}y$$

est continûment dérivable, avec dérivée $g_n = \mathrm{G}'_n$ exprimée par

$$g_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n \mathrm{i}y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xy} (\mathcal{F}\mathrm{G})(y)\,\mathrm{d}y$$

ce qui implique que pour tous $u \le v$, $\mathrm{G}_n(v) - \mathrm{G}_n(u) = \int_u^v g_n(s)\,\mathrm{d}s$. De plus, si on pose

$$\mathrm{H}_n(y) = \mathbf{1}_{[-n,n]}(y)(\mathcal{F}\mathrm{G})(y), \quad h_n(y) = \mathbf{1}_{[-n,n]}(y)\mathrm{i}y(\mathcal{F}\mathrm{G})(y),$$

on voit que $\mathrm{G}_n = \mathcal{F}^{-1}\mathrm{H}_n$ et $g_n = \mathcal{F}^{-1}h_n$ (théorème 5) ; d'après le lemme A9 les suites (H_n) et (h_n) tendent dans L^2 vers $\mathcal{F}\mathrm{G}$ et $h : y \to \mathrm{i}y(\mathcal{F}\mathrm{G})(y)$ respectivement. Puisque $\mathcal{F}^{-1}$ est continue de L^2 dans L^2, il en résulte que G_n tend dans L^2 vers $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\mathrm{G} = \mathrm{G}$, et g_n tend dans L_2 vers la fonction $g = \mathcal{F}^{-1}h$. Puisque G_n tend vers G dans L^2, on peut trouver une sous-suite (G_{n_k}) telle que $\mathrm{G}(u) = \lim_k \mathrm{G}_{n_k}(u)$ pour presque tout u. Si on choisit un point u_0 tel que $\mathrm{G}(u_0) = \lim_k \mathrm{G}_{n_k}(u_0)$, on obtiendra ($\mathbf{f}$) pour tout $v \in \mathbb{R}$

$$\Psi(v) := \mathrm{G}(u_0) + \int_{u_0}^v g(s)\,\mathrm{d}s = \lim_k \Bigl(\mathrm{G}_{n_k}(u_0) + \int_{u_0}^v g_{n_k}(s)\,\mathrm{d}s\Bigr) = \lim_k \mathrm{G}_{n_k}(v).$$

Il en résulte que la fonction continue Ψ définie à la ligne précédente est égale à G presque partout, donc partout (théorème A5). Ceci termine la preuve : on a bien trouvé une fonction $g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ telle que

$$\mathrm{G}(v) - \mathrm{G}(u) = \Psi(v) - \Psi(u) = \int_u^v g(s)\,\mathrm{d}s$$

pour tous $u < v$.

Corollaire 2. *On suppose que* G *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}$, *que* G *et* G' *sont dans* $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ *; alors, pour presque tout* y

$$(\mathcal{F}(\mathrm{G}'))(y) = \mathrm{i}y(\mathcal{F}\mathrm{G})(y).$$

Comme on l'a déjà dit, cet énoncé correspond, pour L^2, à la deuxième partie de la proposition 6, qui s'appliquait à L^1.

Corollaire 3. *On suppose que* G *et* $\mathrm{H} : x \to x\mathrm{G}(x)$ *sont deux fonctions de* $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ *; alors* $\mathcal{F}\mathrm{G}$ *admet une dérivée généralisée égale à*

$$-\mathrm{i}\mathcal{F}\mathrm{H} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}).$$

C'est la deuxième partie de la proposition 7, lue à l'envers (Fourier au lieu de Fourier inverse). Cet énoncé correspond, pour L^2, à la première partie de la proposition 6.

Équation de la chaleur sur la droite

On suppose donnée une fonction v sur $\mathbb{R}$ où $v(x)$ représente la température au point x d'une barre rectiligne infinie, à l'instant 0. Si la barre est homogène, la théorie physique prévoit que l'évolution de la température au cours du temps $t \geq 0$ est régie par *l'équation de la chaleur*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

où k est une constante dépendant de la barre, et où $u(x, t)$ représente la température au point x à l'instant $t \geq 0$. On cherche donc une fonction de deux variables $u(x, t)$ telle que $u(x, 0) = v(x)$, et telle que pour tous $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial}{\partial t} \, u(x, t) = k \, \frac{\partial^2}{\partial x^2} \, u(x, t).$$

En utilisant les rapports entre Fourier et dérivation, on peut transformer cette *équation aux dérivées partielles* en une équation différentielle ordinaire, moyennant quelques hypothèses optimistes : on va supposer qu'on peut trouver une solution telle que $x \to u(x, t)$ soit de classe C^2, intégrable ainsi que ses deux dérivées en x, pour tout $t > 0$. Posons alors

$$w(x, t) = w_t(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} \, u(x, t) \, \mathrm{d}x.$$

Pour tout $t > 0$ fixé, w_t est la transformée de Fourier de $u_t(x) = u(x, t)$. En utilisant les théorèmes précédents, on verra que la transformée de Fourier de $u_t'' = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ est égale à

$$\widehat{u_t''}(\xi) = -\xi^2 w_t(\xi).$$

Si on peut dériver w_t par rapport à t sous l'intégrale, on obtient

$$\frac{\partial w_t}{\partial t} \, (\xi) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} \, \frac{\partial u}{\partial t} \, (x, t) \, \mathrm{d}x$$

qui est égal d'après l'équation de la chaleur à

$$k \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} \, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \, (x, t) \, \mathrm{d}x = k \, \widehat{u_t''}(\xi) = -k\xi^2 w_t(\xi).$$

On a ainsi transformé l'équation de la chaleur en l'équation différentielle ordinaire (on raisonne pour ξ fixé)

$$\frac{\partial w}{\partial t}(\xi, t) = -k\,\xi^2 w(\xi, t)$$

Cette équation différentielle se résout facilement, pour chaque ξ fixé : on obtient

$$w_t(\xi) = w(\xi, t) = \mathrm{e}^{-k\xi^2 t}\, w(\xi, 0) = \mathrm{e}^{-k\xi^2 t}\, \widehat{v}(\xi).$$

On voit apparaître des densités gaussiennes (et leurs transformées de Fourier) : la fonction w_t, qui est la transformée de Fourier de u_t, apparaît comme le produit de la transformée de Fourier $\xi \to \mathrm{e}^{-k\xi^2 t}$ d'une certaine densité gaussienne g_t avec la transformée de Fourier de v. Par l'injectivité de Fourier, on en déduit que la fonction $x \to u(x, t)$ est la convolution de la donnée initiale v avec la densité gaussienne g_t dont la transformée de Fourier est $\widehat{g_t}(\xi) = \mathrm{e}^{-k\xi^2 t}$, c'est à dire

$$g_t(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x^2/(4kt)}}{\sqrt{4\pi\, kt}},$$

et pour tout $t > 0$,

$$u(x, t) = (v * g_t)(x) = \int_{\mathbb{R}} v(x - y)\, \frac{\mathrm{e}^{-y^2/(4kt)}}{\sqrt{4\pi\, kt}}\, \mathrm{d}y.$$

Fourier multi-dimensionnel

Si $x = (x_1, \ldots, x_d)$ et $y = (y_1, \ldots, y_d)$ sont deux éléments de $\mathbb{R}^d$, on introduit leur produit scalaire

$$x \cdot y = \sum_{j=1}^{d} x_j\, y_j$$

et si f est intégrable sur $\mathbb{R}^d$ on pose

$$\forall y \in \mathbb{R}^d, \quad \widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, x \cdot y}\, f(x)\, \mathrm{d}x.$$

Dans le cas d'une fonction «décomposée» de la forme

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_d) = f_1(x_1) f_2(x_2) \ldots f_d(x_d),$$

le théorème de Fubini donne

$$\widehat{f}(y_1, y_2, \ldots, y_d) = \widehat{f_1}(y_1)\, \widehat{f_2}(y_2) \ldots \widehat{f_d}(y_d).$$

Ainsi, la densité gaussienne 2-dimensionnelle $g(x_1, x_2) = \mathrm{e}^{-x_1^2/2 - x_2^2/2}$ admet pour transformée de Fourier

$$(y_1, y_2) \to \sqrt{2\pi}\ \mathrm{e}^{-y_1^2/2}\ \sqrt{2\pi}\ \mathrm{e}^{-y_2^2/2} = 2\pi\ \mathrm{e}^{-y_1^2/2 - y_2^2/2} = 2\pi\, g(y_1, y_2).$$

Fourier dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$

On peut définir $\mathcal{F}$ sur l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$, et l'égalité de Parseval devient, pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\mathcal{F}f(y)|^2 \,\mathrm{d}y = (2\pi)^d \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x.$$

Notes

([a]) Dans le poly d'Intégration, Chap. 6 p. 42, il est montré que toute fonction $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ peut être approchée en norme L^1 par des fonctions en escalier. Si $g = \mathbf{1}_{[a,b]}$ est une indicatrice d'intervalle, on a

$$\widehat{g}(y) = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ay} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}by}}{\mathrm{i}y}$$

pour $y \neq 0$, qui tend vers 0 à l'infini. Il en résulte, par combinaison linéaire, que $\widehat{g}$ tend vers 0 à l'infini lorsque g est en escalier. Si $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et si $\varepsilon > 0$ est donné, on peut trouver g en escalier telle que $\|f - g\|_1 < \varepsilon/2$; pour $|y|$ assez grand, on aura $|\widehat{g}(y)| < \varepsilon/2$, et par la relation (1) on aura pour tout y on l'inégalité $|\widehat{f}(y) - \widehat{g}(y)| \le \|f - g\|_1 < \varepsilon/2$. Pour $|y|$ assez grand, on a donc $|\widehat{f}(y)| < \varepsilon$.

([b]) Un élément f de $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$ est une *classe* de fonctions mesurables qui admet des représentants bornés. La quantité $\|f\|_\infty$ est le plus petit nombre M tel que f admette un représentant f_1 (une vraie fonction mesurable) qui vérifie $|f_1(x)| \le \mathrm{M}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Cela revient à dire que M est le min des nombres réels m tels que l'ensemble

$$\{x \in \mathbb{R} : |f(x)| > m\}$$

soit de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$: l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} : |f(x)| > m\}$ est de mesure nulle si et seulement si $\|f\|_\infty \le m$.

([c]) Si la suite (g_n) tend vers f dans L^2, on voit facilement que $\mathbf{1}_{[-a,a]}\, g_n$ tend vers $\mathbf{1}_{[-a,a]}\, f = f$, ce qui montre qu'on peut de toute façon remplacer les (g_n) par les $\mathbf{1}_{[-a,a]}\, g_n$, qui sont encore en escalier, et qui de plus sont nulles hors de $[-a, a]$.

([d]) Si une suite (u_n) tend vers u en norme $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ et uniformément vers v, alors $u = v$ presque partout, d'après le corollaire A4 de l'annexe.

([e]) Pour tout $a > 0$, on trouve par intégration par parties

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x} \,\mathrm{d}x = \Big[\frac{1 - \cos x}{x}\Big]_0^a + \int_0^a \frac{1 - \cos x}{x^2} \,\mathrm{d}x = \frac{1 - \cos a}{a} + \int_0^a \frac{1 - \cos x}{x^2} \,\mathrm{d}x.$$

Quand a tend vers l'infini, le premier terme tend vers 0 et l'intégrale en $1/x^2$ est absolument convergente à l'infini, donc

$$\lim_{a \to +\infty} \int_0^a \frac{\sin x}{x} \,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} \,\mathrm{d}x.$$

([f]) Si une suite (g_n) tend vers g dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, alors pour tous $a < b$

$$\int_a^b g(t) \,\mathrm{d}t = \lim_n \int_a^b g_n(t) \,\mathrm{d}t.$$

En effet par Cauchy-Schwarz

$$\Big|\int_a^b (g(t) - g_n(t)) \,\mathrm{d}t\Big| \le \Big(\int_a^b 1^2 \,\mathrm{d}t\Big)^{1/2} \Big(\int_a^b |g(t) - g_n(t)|^2 \,\mathrm{d}t\Big)^{1/2} \to 0.$$

Annexe : rappels d'intégration

Quand on développe la théorie de l'intégrale de Lebesgue des fonctions positives sur un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, on admet les fonctions mesurables à valeurs dans $[0, +\infty]$, c'est-à-dire qui peuvent prendre la valeur $+\infty$; l'intégrale peut aussi être égale à $+\infty$. Si (u_n) est une suite de fonctions mesurables positives sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, on peut toujours considérer la fonction mesurable S définie par

$$\mathrm{S}(\omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(\omega)$$

où la somme de la série numérique vaut $+\infty$ lorsqu'elle n'est pas convergente au sens usuel.

Théorème A1. *Si (u_n) est une suite de fonctions mesurables positives sur un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, on a*

$$\int_\Omega \Bigl(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(\omega) \Bigr) \,\mathrm{d}\mu(\omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_\Omega u_n(\omega) \,\mathrm{d}\mu(\omega).$$

Preuve. — Pour chaque entier n, on a

$$\int_\Omega \Bigl(\sum_{k=0}^{n} u_k(\omega) \Bigr) \,\mathrm{d}\mu(\omega) = \sum_{k=0}^{n} \int_\Omega u_k(\omega) \,\mathrm{d}\mu(\omega).$$

La suite $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ tend en croissant vers $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ (valeur $+\infty$ admise), et on a par le théorème de convergence monotone

$$\int_\Omega \Bigl(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(\omega) \Bigr) \,\mathrm{d}\mu(\omega) = \lim_n \int_\Omega s_n(\omega) \,\mathrm{d}\mu(\omega)$$

$$= \lim_n \sum_{k=0}^{n} \int_\Omega u_k(\omega) \,\mathrm{d}\mu(\omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_\Omega u_k(\omega) \,\mathrm{d}\mu(\omega).$$

Le théorème suivant donne un critère assez efficace pour pouvoir intervertir une intégrale et une série.

Théorème A2. *Si (u_n) est une suite de fonctions mesurables sur un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, telle que la fonction $\sum |u_n|$ soit μ-intégrable, on a*

$$\int_\Omega \Bigl(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(\omega) \Bigr) \,\mathrm{d}\mu(\omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_\Omega u_n(\omega) \,\mathrm{d}\mu(\omega).$$

Preuve. — Définissons une fonction T mesurable à valeurs dans $[0, +\infty]$ (valeur $+\infty$ admise) en posant

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \mathrm{T}(\omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k(\omega)|.$$

Par hypothèse, T est intégrable ; il en résulte que $\mathrm{T}(\omega) < +\infty$ pour presque tout ω, c'est-à-dire que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k(\omega)|$ est absolument convergente pour presque tout ω. Si on pose $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, on voit que $|s_n| \le \mathrm{T}$ (la fonction T est un majorant intégrable indépendant de n) et (s_n) tend presque partout vers

$$\mathrm{S}(\omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(\omega).$$

Par le théorème de convergence dominée, on conclut.

Théorème A3. *Si (f_n) est une suite de fonctions mesurables, si $1 \le p < +\infty$ et si $\int |f_n(\omega) - f(\omega)|^p \,\mathrm{d}\mu(\omega)$ tend vers 0, il existe une sous-suite (f_{n_k}) telle que $f_{n_k}(\omega)$ tende vers $f(\omega)$ pour presque tout $\omega \in \Omega$.*

Preuve. — En effet, puisque $\int_\Omega |f_n(\omega)-f(\omega)|^p \,\mathrm{d}\mu(\omega)$ tend vers 0, on peut, par récurrence, trouver pour tout entier $k \ge 0$ un entier $n_k > n_{k-1}$ tel que

$$\int_\Omega |f_{n_k}(\omega) - f(\omega)|^p \,\mathrm{d}\mu(\omega) < 2^{-k}\,;$$

on en déduit, en appliquant le théorème A1, que

$$\int_\Omega \Bigl(\sum_{k\ge 0} |f_{n_k}(\omega) - f(\omega)|^p \Bigr) \,\mathrm{d}\mu(\omega) = \sum_{k\ge 0} \int_\Omega |f_{n_k}(\omega) - f(\omega)|^p \,\mathrm{d}\mu(\omega) < \sum_{k\ge 0} 2^{-k} = 2 < \infty.$$

Il en résulte que $\sum_{k\ge 0} |f_{n_k}(\omega) - f(\omega)|^p$ est fini μ-presque partout, et en particulier, le terme général de cette série tend vers 0 pour presque tout ω, donc

$$|f_{n_k}(\omega) - f(\omega)|^p \to 0, \quad \text{c'est-à-dire} \;\; f_{n_k}(\omega) \to f(\omega)$$

pour presque tout ω, comme annoncé.

Corollaire A4. *Si une suite de fonctions (u_n) tend vers u dans $\mathrm{L}^p(\Omega, \mu)$, avec $1 \le p < \infty$ et si (u_n) tend simplement vers une autre fonction v, alors $u = v$ μ-presque partout.*

Preuve. — Pour tout $\omega \in \Omega$ la suite $u_n(\omega)$ tend vers $v(\omega)$, et il existe par le théorème précédent une sous-suite (n_k) et un ensemble μ-négligeable N tels que $u_{n_k}(\omega)$ tende vers $u(\omega)$ pour tout $\omega \notin \mathrm{N}$; il en résulte que $u(\omega) = v(\omega)$ pour tout $\omega \notin \mathrm{N}$, c'est-à-dire que $u = v$ μ-presque partout.

Théorème A5. *Si $a < b$, si f est une fonction continue sur $[a, b]$, sa norme uniforme $\|f\|_u$ est égale à sa norme $\|f\|_\infty$ dans l'espace $\mathrm{L}^\infty([a, b], \mathrm{d}x)$. Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, et si f est une fonction continue nulle presque partout pour la mesure de Lebesgue sur I, alors f est nulle ; si deux fonctions continues f, g sont égales en presque tout point de I, elles sont égales partout.*

Preuve. — Soit f continue sur $[a, b]$, et posons $\mathrm{M} = \|f\|_u$; alors $|f(x)| \le \mathrm{M}$ pour tout x, donc l'ensemble $\{x : |f(x)| > \mathrm{M}\}$ est de mesure nulle, puisqu'il est vide ! Il en résulte que $\|f\|_\infty \le \|f\|_u$. Inversement, si on a $m < \mathrm{M}$, l'ensemble $\mathrm{V} = \{x \in [a, b] : |f(x)| > m\}$ est un ouvert non vide de $[a, b]$; il existe donc un intervalle $]c, d[$ avec $a \le c < d \le b$ contenu dans V. Mais cet intervalle est de mesure de Lebesgue $d - c > 0$. La mesure de V est donc non nulle, et on en déduit que $\|f\|_\infty \ge m$, ce qui permet de terminer la preuve de ce premier point.

Si f continue sur I n'est pas nulle en tout point de I, on peut trouver par continuité un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$, contenu dans I et sur lequel f est non nulle ; puisque $[a, b]$ est de mesure > 0, la fonction f n'est pas presque partout nulle. L'affirmation sur l'égalité de f et g en résulte immédiatement, en considérant la fonction $f - g$.

Théorème A6. *L'espace des fonctions en escalier est dense dans* $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$, *pour tout* p *tel que* $1 \le p < +\infty$.

Dans le poly d'Intégration, Chap. 6 p. 42, il est montré que toute fonction $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ peut être approchée en norme L^1 par des fonctions en escalier. Le même résultat est vrai pour $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ pour tout p **fini**, $1 \le p < +\infty$, avec à peu près la même preuve, qu'on va rappeler.

– Si $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ est une fonction complexe, on peut écrire $f = \mathrm{Re}\, f + \mathrm{i}\, \mathrm{Im}\, f$; pour approcher f, il suffit d'approcher séparément les deux fonctions réelles $\mathrm{Re}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ par des fonctions en escalier. On peut donc se contenter du cas des fonctions réelles.

– Si $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ est une fonction réelle, on peut écrire $f = f_+ - f_-$, où f_+ et f_- sont positives ; on peut donc se contenter du cas des fonctions réelles positives.

– Si $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ est une fonction réelle positive, il existe une suite croissante (f_n) de fonctions étagées qui converge simplement vers f, telles que $0 \le f_n \le f$; la suite $(f - f_n)^p$ tend simplement vers 0 en étant dominée par la fonction intégrable fixe f^p ; d'après Lebesgue, $\int (f - f_n)^p$ tend vers 0, ce qui veut dire que f_n tend vers f en norme L^p ; il suffit donc d'approcher les fonctions étagées f_n.

– Si $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ est étagée, on peut écrire

$$f = \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} c_j \mathbf{1}_{\mathrm{A}_j}$$

où les A_j sont des ensembles boréliens de mesure finie. Il suffit donc pour finir d'approcher les indicatrices de boréliens de mesure finie $\mathbf{1}_\mathrm{A}$ par des fonctions en escalier. Mais ce point a été vu dans le poly d'Intégration : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction en escalier g à valeurs 0 ou 1 telle que

$$\int_\mathbb{R} |\mathbf{1}_\mathrm{A} - g| < \varepsilon.$$

Comme la fonction $|\mathbf{1}_\mathrm{A} - g|$ est bornée par 1, on a $|\mathbf{1}_\mathrm{A} - g|^p \le |\mathbf{1}_\mathrm{A} - g|$, donc

$$\int_\mathbb{R} |\mathbf{1}_\mathrm{A} - g|^p \le \int_\mathbb{R} |\mathbf{1}_\mathrm{A} - g| < \varepsilon,$$

donc $\|\mathbf{1}_\mathrm{A} - g\|_p \le \varepsilon^{1/p}$.

Théorème A7. *Le produit de deux fonctions* f, g *de* $\mathrm{L}^2(\Omega, \mu)$ *est* μ*-intégrable, et*

$$\|fg\|_1 \le \|f\|_2 \, \|g\|_2.$$

Preuve. — Il suffit d'appliquer l'inégalité de Hölder, poly d'Intégration, Chap. 8 p. 49 : lorsque $p, q \ge 1$ vérifient $1/p + 1/q = 1$, on a

$$\int_\Omega |f(\omega) g(\omega)| \,\mathrm{d}\mu(\omega) \le \Bigl(\int_\Omega |f(\omega)|^p \,\mathrm{d}\mu(\omega) \Bigr)^{1/p} \Bigl(\int_\Omega |g(\omega)|^q \,\mathrm{d}\mu(\omega) \Bigr)^{1/q}.$$

En prenant $p = q = 2$, on obtient le résultat voulu.

Lemme A8. *Si* $\varphi \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mu)$ *est nulle hors d'un ensemble mesurable* A *de mesure finie, alors* $\varphi \in \mathrm{L}^1(\Omega, \mu)$ *et on a*

$$\|\varphi\|_1 \le \sqrt{\mu(\mathrm{A})}\, \|\varphi\|_2.$$

Preuve. — Puisque φ est nulle hors de A, on a $\varphi = \mathbf{1}_\mathrm{A}\, \varphi$, donc par Cauchy-Schwarz (c'est-à-dire Hölder pour $p = 2$)

$$\int_\Omega |\varphi(\omega)|\, \mathrm{d}\mu(\omega) = \int_\Omega \mathbf{1}_\mathrm{A}(\omega)\, |\varphi(\omega)|\, \mathrm{d}\mu(\omega) \le$$

$$\le \Bigl(\int_\Omega \mathbf{1}_\mathrm{A}(\omega)^2\, \mathrm{d}\mu(\omega)\Bigr)^{1/2} \Bigl(\int_\Omega |\varphi(\omega)|^2\, \mathrm{d}\mu(\omega)\Bigr)^{1/2} = \sqrt{\mu(\mathrm{A})}\, \|\varphi\|_2.$$

Lemme A9. *Soit* (a_n) *une suite de réels qui tend vers* $-\infty$ *et soit* (b_n) *une suite de réels qui tend vers* $+\infty$ *; pour tout* p *tel que* $1 \le p < +\infty$ *et toute fonction* $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$*, la suite* $f_n = \mathbf{1}_{[a_n, b_n]}\, f$ *tend vers* f *dans* $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$.

Preuve. — On remarque que

$$|f(x) - f_n(x)|^p \le |f(x)|^p,$$

ce qui fournit un majorant intégrable indépendant de n pour la suite des fonctions intégrables (g_n) définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_n(x) = |f(x) - f_n(x)|^p\,;$$

par ailleurs, $|f(x) - f_n(x)|^p$ tend vers 0 pour tout $x \in \mathbb{R}$, car on aura $a_n \le x \le b_n$ et donc $f_n(x) = f(x)$ à partir d'un certain rang, d'après les hypothèses sur (a_n) et (b_n). Par le théorème de convergence dominée appliqué à la suite (g_n), on déduit que

$$\|f - f_n\|_p^p = \int_\mathbb{R} |f(x) - f_n(x)|^p\, \mathrm{d}x = \int_\mathbb{R} g_n(x)\, \mathrm{d}x$$

tend vers 0 quand n tend vers l'infini, comme annoncé.