Transformation de Fourier

Déjà vu au premier semestre : si f est intégrable sur $\mathbb{R}$, on pose

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\, dx.$$

Propriétés : la fonction $\widehat{f}$ est continue bornée, et tend vers 0 à l'infini. On note que $\widehat{f}(0)$ est l'intégrale de f. Pour la majoration de $\widehat{f}$, on écrit simplement

$$|\widehat{f}(y)| = \Bigl| \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\, dx \Bigr| \le \int_{\mathbb{R}} \bigl| f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy} \bigr|\, dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx =: \|f\|_1.$$

Premiers exemples

Si A est un sous-ensemble d'un ensemble X, on notera $\mathbf{1}_{\mathrm{A}}$ la *fonction indicatrice de* A, définie sur X par : $\mathbf{1}_{\mathrm{A}}(x) = 1$ si $x \in \mathrm{A}$, et $\mathbf{1}_{\mathrm{A}}(x) = 0$ si $x \notin \mathrm{A}$. Si $f = \mathbf{1}_{[a,b]}$ est l'indicatrice de l'intervalle $[a, b]$, on a

$$\widehat{\mathbf{1}_{[a,b]}}(y) = \int_a^b \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ty}\, dt = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ay} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}by}}{\mathrm{i}y} \quad \text{pour } y \ne 0, \quad \widehat{\mathbf{1}_{[a,b]}}(0) = b - a\,;$$

en particulier pour l'intervalle symétrique $[-1/2, 1/2]$ on aura comme transformée de Fourier

$$y \to \frac{\sin(y/2)}{y/2}.$$

On peut voir que cette fonction n'est pas Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}$: la transformation de Fourier ne transforme pas en général les fonctions intégrables en fonctions intégrables. On utilisera dans la suite les fonctions «rectangulaires» d'intégrale 1

$$\mathrm{R}_\varepsilon = \frac{1}{2\varepsilon}\, \mathbf{1}_{(-\varepsilon,\varepsilon)}$$

(où ε est > 0 quelconque) et pour elles on trouve que $\widehat{\mathrm{R}_\varepsilon}(y) = \sin(\varepsilon y)/(\varepsilon y)$.

Pour la fonction $f : t \to \mathrm{e}^{-|t|}$ on trouve

$$\widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-|t|-\mathrm{i}ty}\, dt = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t-\mathrm{i}ty}\, dt + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t+\mathrm{i}ty}\, dt$$

$$= \frac{1}{1+\mathrm{i}y} + \frac{1}{1-\mathrm{i}y} = \frac{2}{1+y^2}.$$

Signaux simples périodiques, signaux plus complexes

La variable t représente le temps. Un signal simple (par exemple *l'onde porteuse* émise par une station de radio et reçue par une antenne) se représente en sinus ou cosinus, $t \to \sin(\omega t)$ ou $t \to \cos(\omega t)$, ou avec une phase φ,

$$\sin(\omega t + \varphi) = \cos(\varphi)\sin(\omega t) + \sin(\varphi)\cos(\omega t)\,;$$

l'exponentielle complexe est plus agréable mathématiquement : les deux fonctions $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ et $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ permettent de reconstituer par combinaisons linéaires les fonctions précédentes. Pulsations ou fréquences : si le signal est $t \to \sin(2\pi \mathrm{F} t)$, le nombre F est la *fréquence* du signal, c'est-à-dire le nombre des oscillations de la fonction sur un intervalle de longueur 1 (dans le contexte de la radio : un intervalle de 1 seconde ; une fréquence FM de 100MHz correspond à 100 millions d'oscillations par seconde) ; on utilise aussi l'écriture $\sin(\omega t)$, et $\omega = 2\pi \mathrm{F}$ est alors appelé la *pulsation*.

On peut envisager un signal plus complexe qui soit un mélange de signaux de fréquences différentes,

$$t \to \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \varphi_j \, \mathrm{e}^{\mathrm{i} t \xi_j}\,;$$

plus particulièrement, il pourrait être de la forme

$$t \to \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} (\xi_j - \xi_{j-1}) \varphi(\xi_j) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i} t \xi_j}$$

où φ est une fonction continue sur $[a, b]$ et $\xi_0 = a < \xi_1 < \ldots < \xi_{\mathrm{N}} = b$ une subdivision de l'intervalle $[a, b]$. Les signaux pratiquement étudiés dans ce cours seront de la forme limite suivante, qui est obtenue quand le pas de la subdivision tend vers 0,

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i} t \xi} \, \varphi(\xi) \, d\xi,$$

où on fera des hypothèses permettant un traitement mathématique raisonnable du problème.

Décryptage du spectre des fréquences

Théorème 1. *Si φ est continue, bornée et intégrable sur $\mathbb{R}$, et si la fonction signal f définie par*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i} t \xi} \, \varphi(\xi) \, d\xi$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$, alors

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f}(\xi) = 2\pi \, \varphi(\xi).$$

La transformée de Fourier permet donc d'analyser la contribution au signal f des différentes fréquences/pulsations ξ ; cette contribution est donnée, dans la formule ci-dessus qui définit f, par la fonction φ, qui est en principe connue de l'émetteur de l'émission, mais pas du récepteur qui ne voit que le signal f. La transformation de Fourier permet au récepteur de retrouver cette information φ sur la composition du signal.

On commence par montrer un cas particulier du théorème.

Lemme. *Si ψ est continue, bornée et intégrable sur $\mathbb{R}$, et si la fonction g définie par*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, t\xi}\, \psi(\xi)\, d\xi$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$, alors

$$\widehat{g}(0) = 2\pi\, \psi(0).$$

Démonstration. On suppose que k est une fonction sur $\mathbb{R}$ qui vérifie les hypothèses suivantes : k est continue bornée intégrable sur $\mathbb{R}$, et sa transformée de Fourier $\widehat{k}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, puisque $t \to k(\varepsilon t)$ et ψ sont intégrables, on peut écrire d'après le théorème de Fubini que

$$\int_{\mathbb{R}} g(t) k(\varepsilon t)\, dt = \int_{\mathbb{R}^2} \psi(\xi) k(\varepsilon t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, t\xi}\, dt\, d\xi\, ;$$

ensuite, en posant $s = \varepsilon t$ et $v = \varepsilon^{-1}\xi$, on obtient $dt\, d\xi = ds\, dv$ par changement de variable et

$$\int_{\mathbb{R}} g(t) k(\varepsilon t)\, dt = \int_{\mathbb{R}^2} \psi(\xi) k(\varepsilon t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, t\xi}\, dt\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^2} \psi(\varepsilon v) k(s)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, sv}\, ds\, dv = \int_{\mathbb{R}} \psi(\varepsilon v) \widehat{k}(-v)\, dv.$$

Puisque k et ψ sont continues bornées, g et $\widehat{k}$ intégrables, on obtient par deux applications du théorème de convergence dominée, quand $\varepsilon \to 0$

$$\int_{\mathbb{R}} g(t) k(\varepsilon t)\, dt \to k(0) \int_{\mathbb{R}} g(t)\, dt$$

et

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(\varepsilon v) \widehat{k}(-v)\, dv \to \psi(0) \int_{\mathbb{R}} \widehat{k}(-v)\, dv.$$

Il en résulte que

$$k(0) \int_{\mathbb{R}} g(t)\, dt = \psi(0) \int_{\mathbb{R}} \widehat{k}(-v)\, dv.$$

On applique avec $k(t) = \mathrm{e}^{-|t|}$. Alors $k(0) = 1$ et $\widehat{k}(v) = 2/(1 + v^2)$, donc

$$\widehat{g}(0) = \int_{\mathbb{R}} g(t)\, dt = \psi(0) \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{1 + v^2}\, dv = 2\pi\, \psi(0),$$

et le lemme est démontré.

Démonstration du théorème 1. — Pour montrer le théorème 1 à partir du lemme on fixe un ω quelconque et on effectue un décalage en fréquence en posant

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \psi(\xi) = \varphi(\xi + \omega).$$

Il est facile de voir que la fonction g qui correspond à ψ dans l'énoncé du lemme est égale à

$$g(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, t\xi}\, \psi(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, t\xi}\, \varphi(\xi + \omega)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, t(v - \omega)}\, \varphi(v)\, dv = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, t\omega}\, f(t)$$

donc

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, t\omega}\, f(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} g(t)\, dt = \widehat{g}(0) = 2\pi\, \psi(0) = 2\pi\, \varphi(\omega).$$

Première formule d'inversion de Fourier

Théorème 2. *Si φ est continue, bornée et intégrable sur $\mathbb{R}$, et si $\widehat{\varphi}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, alors*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xy}\, \widehat{\varphi}(y)\, dy.$$

Pour montrer le théorème 2, il suffit de changer de point de vue dans le théorème 1, en oubliant le sens physique des variables t et ξ, et en considérant la formule du théorème 1 d'un point de vue purement mathématique : si φ est continue, bornée et intégrable, et si on sait que $f(y) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xy}\, \varphi(x)\, dx$ est intégrable, le théorème 1 nous dira que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f}(x) = 2\pi\, \varphi(x).$$

Or on voit que

$$f(y) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xy}\, \varphi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x(-y)}\, \varphi(x)\, dx = \widehat{\varphi}(-y)$$

ce qui garantit que f est intégrable, puisque $\widehat{\varphi}$ est intégrable, d'après l'hypothèse du théorème 2 ; on a donc bien par application du théorème 1

$$2\pi\, \varphi(x) = \widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\, f(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\, \widehat{\varphi}(-y)\, dy = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xu}\, \widehat{\varphi}(u)\, du\,;$$

c'est le résultat voulu.

Première estimation en norme L^2

Dans la suite on se servira de la famille X des fonctions qui vérifient les hypothèses du théorème 2 : ce sont les fonctions g sur $\mathbb{R}$, qui sont continues, bornées, intégrables et telles que $\widehat{g}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$. On voit facilement que X est un espace vectoriel de fonctions. On a pour toute fonction $g \in \mathrm{X}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2\pi\, \overline{g(x)} = \overline{\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xy}\, \widehat{g}(y)\, dy} = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\, \overline{\widehat{g}(y)}\, dy\,;$$

ensuite, en appliquant le théorème de Fubini

$$2\pi \int_{\mathbb{R}} g(x)\overline{g(x)}\, dx = \int_{\mathbb{R}^2} g(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ty}\, \overline{\widehat{g}(y)}\, dx\, dy = \int_{\mathbb{R}} \widehat{g}(y)\, \overline{\widehat{g}(y)}\, dy$$

c'est-à-dire

$$\|\widehat{g}\|_2 = \sqrt{2\pi}\, \|g\|_2.$$

Cette propriété nous servira plus loin pour prolonger la transformation de Fourier à l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.

Retards, convolutions

Si un signal f est transmis avec un retard $s > 0$, le signal retardé est $f_s : t \to f(t-s)$; on a

$$\widehat{f_s}(\xi) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, s\xi}\, \widehat{f}(\xi).$$

On peut envisager un signal qui soit composé d'un mélange de signaux retardés, avec une mesure de mélange $g(s)\, ds$; on obtient

$$t \to \int_{\mathbb{R}} f(t-s)g(s)\, ds.$$

D'une façon générale, on écrit si $f, g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, pour presque tout x

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-s)g(s)\, ds = (g * f)(x).$$

Fourier et convolution

Théorème. *Si $f, g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, on a*

$$\widehat{f * g} = \widehat{f}\, \widehat{g}.$$

On verra la preuve dans la prochaine séance.