Dans la première séance on a introduit la famille X des fonctions qui vérifient les hypothèses suivantes : ce sont les fonctions g sur $\mathbb{R}$, qui sont continues, bornées, intégrables et telles que $\widehat{g}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$. On voit facilement que X est un espace vectoriel de fonctions. On a vu que pour toute fonction $g \in \mathrm{X}$, on a d'abord la *formule d'inversion de Fourier*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2\pi\, g(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xy}\, \widehat{g}(y)\, dy,$$

et il en résulte un cas particulier de *l'identité de Parseval*,

$$\|\widehat{g}\|_2 = \sqrt{2\pi}\, \|g\|_2. \tag{1}$$

Cette propriété va nous servir pour prolonger la transformation de Fourier à l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.

Retards, convolutions

Si un signal f est transmis avec un retard $s > 0$, le signal retardé est $f_s : t \to f(t-s)$; on a

$$\widehat{f_s}(\xi) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\xi}\, \widehat{f}(\xi).$$

On peut envisager un signal qui soit composé d'un mélange de signaux retardés, avec une mesure de mélange $g(s)\, ds$; on obtient alors le signal composé

$$t \to \int_{\mathbb{R}} f(t-s) g(s)\, ds.$$

On voit apparaître la *convolution* des fonctions f et g, qui a été définie dans le cours d'intégration. On va rappeler les propriétés de cette opération.

Proposition. *Si $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, on peut poser pour presque tout $x \in \mathbb{R}$*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-s) g(s)\, ds = (g * f)(x)\,;$$

on obtient de cette façon une classe de fonctions $f * g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et

$$\|f * g\|_1 \le \|f\|_1\, \|g\|_1, \qquad \int_{\mathbb{R}} (f * g)(x)\, dx = \Bigl(\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx\Bigr) \Bigl(\int_{\mathbb{R}} g(x)\, dx\Bigr).$$

Preuve. — Supposons f et g mesurables ≥ 0 ; en admettant la valeur $+\infty$, on peut toujours écrire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-s) g(s)\, ds = (g * f)(x).$$

On a par Fubini positif

$$\int_{\mathbb{R}} (f * g)(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \Bigl(\int_{\mathbb{R}} f(x-s) g(s)\, ds\Bigr)\, dx = \int_{\mathbb{R}^2} f(x-s) g(s)\, ds\, dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \Bigl(\int_{\mathbb{R}} f(x-s)\,dx \Bigr) g(s)\,ds = \Bigl(\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx \Bigr) \Bigl(\int_{\mathbb{R}} g(s)\,ds \Bigr).$$

Si f, g sont intégrables positives, on a donc

$$\text{(2)} \qquad \int_{\mathbb{R}} (f*g)(x)\,dx = \Bigl(\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx \Bigr) \Bigl(\int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx \Bigr) < +\infty$$

ce qui implique en particulier que $(f*g)(x)$ est fini pour presque tout x. Si $f, g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, les fonctions $|f| : x \to |f(x)|$ et $|g|$ sont intégrables positives, donc l'ensemble N des $x \in \mathbb{R}$ tels que

$$(|f| * |g|)(x) = \int_{\mathbb{R}} |f(x-s)|\,|g(s)|\,ds = +\infty$$

est négligeable ; on voit que pour tout $x \notin \mathrm{N}$, la fonction

$$s \to f(x-s)g(s)$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$, ce qui permet de poser

$$\forall x \notin \mathrm{N}, \quad (f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-s)g(s)\,ds.$$

Si on veut, on peut poser $(f*g)(x) = 0$ pour $x \in \mathrm{N}$, et on obtient de cette façon une fonction mesurable $f*g$ définie partout sur $\mathbb{R}$ (l'affirmation de mesurabilité fait partie de l'énoncé du théorème de Fubini). On a ensuite

$$|(f*g)(x)| = \Bigl| \int_{\mathbb{R}} f(x-s)\,g(s)\,ds \Bigr| \le \int_{\mathbb{R}} |f(x-s)|\,|g(s)|\,ds = (|f|*|g|)(x)$$

et en utilisant (2) on obtient

$$\|f*g\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f*g| \le \int_{\mathbb{R}} (|f|*|g|) = \Bigl(\int_{\mathbb{R}} |f| \Bigr) \Bigl(\int_{\mathbb{R}} |g| \Bigr) = \|f\|_1\,\|g\|_1.$$

Pour l'intégrale de $f*g$, on reprend le calcul du début de la preuve, mais en utilisant maintenant Fubini général au lieu de Fubini positif.

Exemple. Convolution avec une fonction indicatrice d'intervalle

Si $\tau > 0$ et si on introduit la fonction $\mathrm{F}_\tau = \tau^{-1}\mathbf{1}_{[0,\tau]}$, on voit que pour toute $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et tout t, on a

$$(f*\mathrm{F}_\tau)(t) = \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^{t} f(s)\,ds.$$

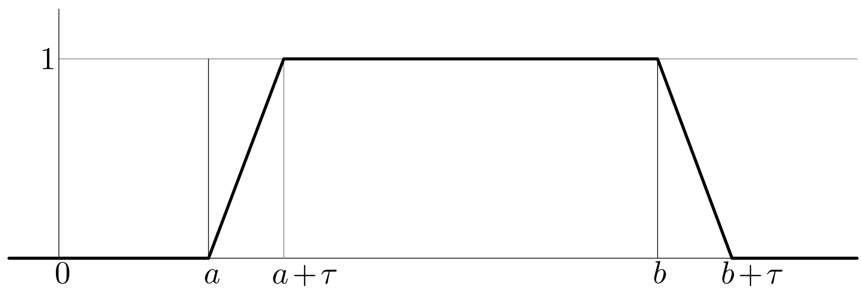
Il en résulte que $f*\mathrm{F}_\tau$ est continue, dérivable si f est continue. La fonction $f*\mathrm{F}_\tau$ est bornée par $\tau^{-1}\|f\|_1$ et elle est intégrable par la proposition précédente ; en résumé :

(R) *si $f \in \mathrm{L}^1$, la fonction $f*\mathrm{F}_\tau$ est continue bornée et intégrable.*

Si $f = \mathbf{1}_{[a,b]}$ avec $b - a > \tau$, on voit que $\mathbf{1}_{[a,b]} * \mathrm{F}_\tau$ est nulle en dehors de $[a, b+\tau]$, égale à 1 dans $[a+\tau, b]$, avec un raccord linéaire entre les deux cas,

$$(\mathbf{1}_{[a,b]} * \mathrm{F}_\tau)(x) = (x-a)/\tau \quad \text{si} \quad a \le x \le a+\tau,$$

$$(\mathbf{1}_{[a,b]} * \mathrm{F}_\tau)(x) = (b+\tau-x)/\tau \quad \text{si} \quad b \le x \le b+\tau.$$



Graphe de $\mathbf{1}_{[a,b]} * \mathrm{F}_\tau$

En particulier, la valeur absolue de la différence entre $\mathbf{1}_{[a,b]}$ et $\mathbf{1}_{[a,b]} * \mathrm{F}_\tau$ est majorée par la somme $\mathbf{1}_{[a,a+\tau]} + \mathbf{1}_{[b,b+\tau]}$, fonction dont la norme est petite quand $\tau \to 0$. Plus précisément, pour tout p tel que $1 \le p < +\infty$, on peut majorer la norme L^p de la différence

$$\begin{aligned} \|\mathbf{1}_{[a,b]} - \mathbf{1}_{[a,b]} * \mathrm{F}_\tau\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}} \Bigl|\mathbf{1}_{[a,b]}(t) - (\mathbf{1}_{[a,b]} * \mathrm{F}_\tau)(t)\Bigr|^p \, dt \\ &\le \int_{\mathbb{R}} \Bigl|\mathbf{1}_{[a,a+\tau]}(t) + \mathbf{1}_{[b,b+\tau]}(t)\Bigr|^p \, dt = 2\tau. \end{aligned} \tag{3}$$

Fourier et convolution

Théorème 3. *Si $f, g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, on a*

$$\widehat{f * g} = \widehat{f}\ \widehat{g}.$$

Preuve. — On a

$$(\widehat{f * g})(y) = \int_{\mathbb{R}} (f * g)(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\, dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} f(x-s) g(s)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\, dx\, ds = \int_{\mathbb{R}} \Bigl(\int_{\mathbb{R}} f(x-s)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x-s)y}\, g(s)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}sy}\, ds \Bigr)\, dx$$

qui apparaît comme l'intégrale de $f_1 * g_1$, où on aurait posé $f_1(u) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}uy} f(u)$ et $g_1(u) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}uy} g(u)$; d'après les rappels sur la convolution,

$$(\widehat{f * g})(x) = \int_{\mathbb{R}} f_1 * g_1 = \Bigl(\int_{\mathbb{R}} f_1 \Bigr) \Bigl(\int_{\mathbb{R}} g_1 \Bigr) =$$

$$= \Bigl(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}uy}\, f(u)\, du \Bigr) \Bigl(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}uy}\, g(u)\, du \Bigr) = \widehat{f}(y)\ \widehat{g}(y).$$

Calcul de la transformée de Fourier de F_τ

On voit que

$$\widehat{\mathrm{F}_\tau}(\xi) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi t}\, dt = \frac{1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau\xi}}{\mathrm{i}\tau\xi} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau\xi/2}\, \frac{\sin(\tau\xi/2)}{\tau\xi/2}.$$

Si on pense à F_τ comme un filtre (un filtre mathématique, pas un filtre réaliste) agissant sur le signal f pour donner le «signal filtré» $f * \mathrm{F}_\tau$, on voit que les pulsations $\xi \neq 0$ telles que $\sin(\tau\xi/2) = 0$ seront «tuées» par la convolution avec F_τ, ce qui correspond à $\tau\xi \in 2\pi\,\mathbb{Z}$, et ξ non nul ; en terme de fréquence $\mathrm{F} = \xi/(2\pi)$, la première fréquence annulée est $\mathrm{F} = \tau^{-1}$, et les autres sont les multiples de τ^{-1}. Si on veut écouter une radio qui émet sur 100MHz$=$ 10^8Hz, il ne faut sûrement pas commencer par faire la moyenne de son signal sur un intervalle de temps de $\tau = 10^{-8}$ s !

Fourier dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$

Avant de se lancer on va rassembler quelques propriétés simples. Si $g = \mathbf{1}_{[a,b]}$ on a deux majorations pour $\widehat{g}$: la majoration générale par $\|\widehat{g}\|_\infty \le \|g\|_1 = b - a$ et une autre majoration qui provient du calcul explicite

$$|\widehat{g}(y)| = \Bigl| \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ay} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}by}}{\mathrm{i}y} \Bigr| \le \frac{2}{|y|},$$

de sorte qu'en utilisant l'une ou l'autre au bon moment, on trouve

$$(1 + y^2)\, |\widehat{g}(y)|^2 = |\widehat{g}(y)|^2 + y^2\, |\widehat{g}(y)|^2 \le (b - a)^2 + 4.$$

Il en résulte que $|\widehat{g}(y)| \le \mathrm{C}\,(1 + |y|^2)^{-1/2}$ pour une certaine constante C, et $\widehat{g}$ est de carré intégrable :

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{g}(y)|^2\, dy \le \mathrm{C}^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{dy}{1 + y^2} < +\infty.$$

Si on considère $g * \mathrm{F}_\tau$, on sait déjà que cette fonction est continue bornée intégrable, d'après le résumé (R) ; puisque F_τ est un multiple de fonction indicatrice, la transformée de Fourier $\widehat{\mathrm{F}}_\tau$ est elle aussi dans L^2 et $\widehat{g * \mathrm{F}_\tau} = \widehat{g}\, \widehat{\mathrm{F}}_\tau$ est intégrable comme produit de deux fonctions L^2 (appliquer l'inégalité de Hölder, poly d'Intégration, Chap. 8 p. 49, avec $p = q = 2$). On a vu aussi à l'équation (3) que

$$\|g - g * \mathrm{F}_\tau\|_2 \le \sqrt{2\tau} \to 0$$

lorsque $\tau \to 0$. En résumé :

si g est une fonction indicatrice d'intervalle, la transformée de Fourier $\widehat{g}$ est dans L^2*, la fonction $g * \mathrm{F}_\tau$ appartient à l'espace* X *pour tout $\tau > 0$, et $g * \mathrm{F}_\tau$ tend vers g dans* L^2 *lorsque $\tau \to 0$.*

Par combinaison linéaire de fonctions indicatrices d'intervalles on obtient les fonctions en escalier, et il résulte des lignes précédentes, par linéarité, le lemme qui suit.

Lemme. *Si g est en escalier, la transformée de Fourier $\widehat{g}$ est dans L^2, la fonction $g * \mathrm{F}_\tau$ appartient à l'espace X pour tout $\tau > 0$, et $g * \mathrm{F}_\tau$ tend vers g dans L^2 lorsque $\tau \to 0$.*

Preuve. — On va indiquer le principe, qui est très simple. Une *fonction en escalier* g est une fonction sur $\mathbb{R}$ de la forme

$$g = \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} c_j \mathbf{1}_{[a_j, b_j]}$$

où $a_j \le b_j$ pour tout j. La transformation de Fourier est linéaire, donc

$$\widehat{g} = \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} c_j \widehat{\mathbf{1}_{[a_j, b_j]}}\,;$$

d'après les remarques qui précèdent le lemme, chaque $\widehat{\mathbf{1}_{[a_j, b_j]}}$ est dans L^2, donc $\widehat{g}$ est dans L^2 par combinaison linéaire, puisque L^2 est un espace vectoriel de fonctions. De même

$$g * \mathrm{F}_\tau = \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} c_j \mathbf{1}_{[a_j, b_j]} * \mathrm{F}_\tau$$

est dans X comme combinaison linéaire des $\mathbf{1}_{[a_j, b_j]} * \mathrm{F}_\tau$ qui sont dans l'espace vectoriel X. Enfin, la limite dans L^2 d'une somme finie étant la somme des limites,

$$\lim_{\tau \to 0} g * \mathrm{F}_\tau = \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} c_j \lim_{\tau \to 0} \mathbf{1}_{[a_j, b_j]} * \mathrm{F}_\tau = \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} c_j \mathbf{1}_{[a_j, b_j]} = g.$$

Corollaire. *Si g est en escalier, sa transformée de Fourier $\widehat{g}$ est dans L^2 et*

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{g}(y)|^2 \, dy = 2\pi \int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 \, dx.$$

Preuve. — La convolée $g * \mathrm{F}_\tau$ tend vers g dans L^2 quand $\tau \to 0$ d'après le lemme précédent, donc la norme L^2 de la limite est la limite des normes,

$$\int_{\mathbb{R}} |g|^2 = \|g\|_2^2 = \lim_{\tau \to 0} \|g * \mathrm{F}_\tau\|_2^2 = \lim_{\tau \to 0} \int_{\mathbb{R}} |g * \mathrm{F}_\tau|^2.$$

On sait que $|\widehat{\mathrm{F}}_\tau(y)| \le 1$ et

$$\widehat{\mathrm{F}}_\tau(y) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau y/2} \frac{\sin(\tau y/2)}{\tau y/2}$$

tend vers 1 quand $\tau \to 0$ pour tout y fixé, ce qui permet de voir que

$$|\widehat{g}(y)|^2 \, |\widehat{\mathrm{F}}_\tau(y)|^2 \to |\widehat{g}(y)|^2$$

en restant majoré par la fonction intégrable $|\widehat{g}|^2$; il en résulte avec Lebesgue dominé que

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{g}|^2 = \lim_{\tau \to 0} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{g}|^2 \, |\widehat{\mathrm{F}}_\tau|^2 = \lim_{\tau \to 0} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{g * \mathrm{F}_\tau}|^2.$$

Par ailleurs, puisque $g * \mathrm{F}_\tau$ est un élément de l'espace X, on sait d'après l'équation (1) que

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{g * \mathrm{F}_\tau}|^2 = 2\pi \int_{\mathbb{R}} |g * \mathrm{F}_\tau|^2$$

pour tout τ, donc

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{g}|^2 = \lim_{\tau \to 0} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{g * \mathrm{F}_\tau}|^2 = 2\pi \lim_{\tau \to 0} \int_{\mathbb{R}} |g * \mathrm{F}_\tau|^2 = 2\pi \int_{\mathbb{R}} |g|^2.$$

Lemme. *Si $\varphi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ est nulle hors de l'intervalle $[-a, a]$, on a*

$$\|\varphi\|_1 \le \sqrt{2a}\, \|\varphi\|_2.$$

Preuve. — Puisque φ est nulle hors de $[-a, a]$, on a $\varphi = \mathbf{1}_{[-a,a]}\, \varphi$, donc par Cauchy-Schwarz (c'est-à-dire Hölder pour $p = 2$)

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)| \, dx = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[-a,a]}(x) \, |\varphi(x)| \, dx \le$$

$$\le \Bigl(\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[-a,a]}(x)^2 \, dx \Bigr)^{1/2} \Bigl(\int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|^2 \, dx \Bigr)^{1/2} = \sqrt{2a}\, \|\varphi\|_2.$$

Théorème 4. *La transformation de Fourier se prolonge à l'espace* $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ *en une application linéaire $\mathcal{F}$ de* $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ *dans lui-même, vérifiant* l'égalité de Parseval

$$\forall f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}), \quad \|\mathcal{F} f\|_2 = \sqrt{2\pi}\, \|f\|_2.$$

Preuve. — On traite dans un premier temps le cas où $f \in \mathrm{L}^2$ est nulle en dehors d'un intervalle borné $[-a, a]$. Dans ce cas f est aussi dans L^1 (d'après le lemme précédent) et la fonction $\widehat{f}$ est bien définie.

D'après le cours d'intégration([a]) il existe une suite (g_n) de fonctions en escalier qui converge vers f dans L^2 ; on peut supposer([b]) que les (g_n) sont nulles en dehors de $[-a, a]$, ce qui implique qu'elles tendent vers f au sens de L^1 également, puisqu'on sait alors que $\|f - g_n\|_1 \le \sqrt{2a}\, \|f - g_n\|_2$ d'après le lemme précédent. Il en résulte que $\widehat{g}_n$ tend uniformément vers $\widehat{f}$, puisque

$$\|\widehat{f} - \widehat{g}_n\|_\infty \le \|f - g_n\|_1 \to 0.$$

Par ailleurs la suite (g_n) est de Cauchy dans L^2 puisqu'elle converge vers f, et la relation

$$\|\widehat{g}_n - \widehat{g}_m\|_2 = \sqrt{2\pi}\, \|g_n - g_m\|_2$$

obtenue au corollaire précédent montre que la suite $(\widehat{g}_n)$ est elle aussi de Cauchy, donc converge dans l'espace complet L^2 vers une fonction h. Puisque $\widehat{g}_n$ tend uniformément vers $\widehat{f}$, cette fonction h ne peut être[c] que $\widehat{f}$. Finalement $\widehat{g}_n$ tend vers $\widehat{f}$ dans L^2 et

$$\|\widehat{f}\|_2 = \lim_n \|\widehat{g}_n\|_2 = \sqrt{2\pi}\, \lim_n \|g_n\|_2 = \sqrt{2\pi}\, \|f\|_2.$$

Dans un deuxième temps, considérons une fonction $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ quelconque, et posons

$$\forall n \geq 1, \quad f_n = \mathbf{1}_{[-n,n]} f\,;$$

on montre facilement que f_n tend vers f dans L^2, donc (f_n) est de Cauchy dans L^2, donc $\widehat{f}_n$ est de Cauchy dans L^2 aussi puisque

$$\|\widehat{f}_n - \widehat{f}_m\|_2 = \sqrt{2\pi}\, \|f_n - f_m\|_2$$

pour tous m, n, d'après le premier pas ; par définition on pose

$$\mathcal{F} f = \lim_n \widehat{f}_n,$$

limite dans l'espace $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$, qui est complet, de la suite de Cauchy $(\widehat{f}_n)$. On en déduit comme avant

$$\|\mathcal{F} f\|_2 = \lim_n \|\widehat{f}_n\|_2 = \sqrt{2\pi}\, \lim_n \|f_n\|_2 = \sqrt{2\pi}\, \|f\|_2.$$

Notes

[a] Ça n'est pas vraiment vrai : dans le poly d'Intégration, Chap. 6 p. 42, il est montré que toute fonction $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ peut être approchée en norme L^1 par des fonctions en escalier. Le même résultat est vrai pour $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ pour tout p **fini**, $1 \leq p < +\infty$, avec à peu près la même preuve, qu'on va rappeler.

– Si $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ est une fonction complexe, on peut écrire $f = \mathrm{Re}\, f + \mathrm{i}\, \mathrm{Im}\, f$; pour approcher f, il suffit d'approcher séparément les deux fonctions réelles $\mathrm{Re}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ par des fonctions en escalier. On peut donc se contenter du cas des fonctions réelles.

– Si $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ est une fonction réelle, on peut écrire $f = f_+ - f_-$, où f_+ et f_- sont positives ; on peut donc se contenter du cas des fonctions réelles positives.

– Si $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ est une fonction réelle positive, il existe une suite croissante (f_n) de fonctions étagées qui converge simplement vers f, telles que $0 \leq f_n \leq f$; la suite $(f - f_n)^p$ tend simplement vers 0 en étant dominée par la fonction intégrable fixe f^p ; d'après Lebesgue, $\int (f - f_n)^p$ tend vers 0, ce qui veut dire que f_n tend vers f en norme L^p ; il suffit donc d'approcher les fonctions étagées f_n.

– Si $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ est étagée, on peut écrire

$$f = \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} c_j \mathbf{1}_{\mathrm{A}_j}$$

où les A_j sont des ensembles boréliens. Il suffit donc pour finir d'approcher les indicatrices de boréliens $\mathbf{1}_{\mathrm{A}}$ par des fonctions en escalier. Mais ce point a été vu dans le poly d'Intégration : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction en escalier g à valeurs 0 ou 1 telle que

$$\int_{\mathbb{R}} |\mathbf{1}_{\mathrm{A}} - g| < \varepsilon.$$

Comme la fonction $|\mathbf{1}_{\mathrm{A}} - g|$ est bornée par 1, on a $|\mathbf{1}_{\mathrm{A}} - g|^p \le |\mathbf{1}_{\mathrm{A}} - g|$, donc

$$\int_{\mathbb{R}} |\mathbf{1}_{\mathrm{A}} - g|^p \le \int_{\mathbb{R}} |\mathbf{1}_{\mathrm{A}} - g| < \varepsilon,$$

donc $\|\mathbf{1}_{\mathrm{A}} - g\|_p \le \varepsilon^{1/p}$.

($^{\mathbf{b}}$) Si la suite (g_n) tend vers f dans L^2, on voit facilement que $\mathbf{1}_{[-a,a]}\, g_n$ tend vers $\mathbf{1}_{[-a,a]}\, f = f$, ce qui montre qu'on peut de toute façon remplacer les (g_n) par les $\mathbf{1}_{[-a,a]}\, g_n$, qui sont encore en escalier, et qui de plus sont nulles hors de $[-a, a]$.

($^{\mathbf{c}}$) Si une suite (u_n) tend vers u en norme $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ et uniformément vers v, alors $u = v$ presque partout. En effet, si $[a, b]$ est un intervalle borné, on voit facilement que $\mathbf{1}_{[a,b]} u_n$ tend vers $\mathbf{1}_{[a,b]} u$ dans L^p ; mais par convergence uniforme on voit aussi que

$$\|\mathbf{1}_{[a,b]} u_n - \mathbf{1}_{[a,b]} v\|_p^p = \int_a^b |u_n(x) - v(x)|^p \, dx \le \|u_n - v\|_\infty^p \,(b - a)$$

tend vers 0 ; par unicité de la limite dans L^p, on déduit que $\mathbf{1}_{[a,b]}(x) u(x) = \mathbf{1}_{[a,b]}(x) v(x)$ pour presque tout x ; en prenant $[a, b] = [-n, n]$ pour tous les entiers n, on conclut que $u = v$ presque partout, c'est-à-dire que $u = v$ comme classes de fonctions. On peut énoncer aussi un autre principe :

si une suite de fonctions (u_n) tend vers u dans $\mathrm{L}^p(\Omega, \mu)$, avec $1 \le p < \infty$, il existe une sous-suite (u_{n_k}) telle que $u_{n_k}(\omega)$ converge vers $u(\omega)$ pour μ-presque tout $\omega \in \Omega$.

En effet, puisque

$$\|u_n - u\|_p^p = \int_\Omega |u_n(\omega) - u(\omega)|^p \, d\mu(\omega)$$

tend vers 0, on peut trouver pour tout entier $k \ge 0$ un entier $n_k > n_{k-1}$ tel que

$$\int_\Omega |u_{n_k}(\omega) - u(\omega)|^p \, d\mu(\omega) < 2^{-k} \,;$$

on en déduit, en appliquant le théorème de convergence monotone, que

$$\int_\Omega \Bigl(\sum_{k \ge 0} |u_{n_k}(\omega) - u(\omega)|^p\Bigr) \, d\mu(\omega) = \sum_{k \ge 0} \int_\Omega |u_{n_k}(\omega) - u(\omega)|^p \, d\mu(\omega) < \sum_{k \ge 0} 2^{-k} = 2 < \infty.$$

Il en résulte que $\sum_{k \ge 0} |u_{n_k}(\omega) - u(\omega)|^p$ est fini μ-presque partout, et en particulier, le terme général de cette série tend vers 0 pour presque tout ω, donc

$$|u_{n_k}(\omega) - u(\omega)|^p \to 0, \quad \text{c'est-à-dire} \;\; u_{n_k}(\omega) \to u(\omega)$$

pour presque tout ω, comme annoncé.

Corollaire. *Si une suite de fonctions (u_n) tend vers u dans $\mathrm{L}^p(\Omega, \mu)$, avec $1 \le p < \infty$ et si (u_n) tend simplement vers une autre fonction v, alors $u = v$ μ-presque partout.*

Preuve.— Pour tout $\omega \in \Omega$ la suite $u_n(\omega)$ tend vers $v(\omega)$, et il existe une suite (n_k) et un ensemble μ-négligeable N tels que $u_{n_k}(\omega)$ tende vers $u(\omega)$ pour tout $\omega \notin \mathrm{N}$; il en résulte que $u(\omega) = v(\omega)$ pour tout $\omega \notin \mathrm{N}$, c'est-à-dire μ-presque partout.