Fourier dans L^2 *: suite*

Théorème 4 bis. *Si* $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ *on pose* $f_n = \mathbf{1}_{[-n,n]} f$*, pour tout entier* $n \geq 1$ *; alors* f_n *est intégrable, la transformée de Fourier* $\widehat{f_n}$ *est de carré intégrable et la suite* $(\widehat{f_n})$ *converge dans* $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ *; par définition* $\mathcal{F} f$ *est la limite de cette suite,*

$$\mathcal{F} f = \lim_{\mathrm{L}^2} \widehat{f_n}.$$

Si de plus $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$*, on a* $\mathcal{F} f = \widehat{f}$ *presque-partout. L'application* $f \to \mathcal{F} f$ *est une application linéaire continue de* $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ *dans* $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$*, et on a l'identité de Parseval*

$$\forall f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}), \quad \|\mathcal{F} f\|_2 = \sqrt{2\pi}\, \|f\|_2.$$

Preuve.— On voit d'abord que

$$\|f - f_n\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{|x|>n}\, |f(x)|^2 \, dx$$

tend vers 0, par le théorème de convergence dominée ; on voit donc que (f_n) tend vers f dans L^2, donc (f_n) est de Cauchy dans L^2. On a vu dans la séance précédente que pour toute fonction $h \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ nulle en dehors d'un intervalle, on a $\widehat{h} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ et

$$\|\widehat{h}\|_2 = \sqrt{2\pi}\, \|h\|_2.$$

Cette relation s'applique aux fonctions $f_n - f_m$, qui sont nulles hors de $[-a, a]$ quand $a \geq \max(m, n)$,

$$\|\widehat{f_n} - \widehat{f_m}\|_2 = \sqrt{2\pi}\, \|f_n - f_m\|_2 \to 0,$$

puisque (f_n) est de Cauchy ; on voit donc que la suite $(\widehat{f_n})$ est elle aussi de Cauchy dans L^2, et comme $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ est complet cette suite est convergente et on peut poser

$$\mathcal{F} f = \lim_{\mathrm{L}^2} \widehat{f_n}.$$

On obtient l'égalité de Parseval en disant que la norme de la limite est la limite des normes et en rappelant que $\|\widehat{f_n}\|_2 = \sqrt{2\pi}\, \|f_n\|_2$ pour tout n. Si g est une autre fonction de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ on associera à la combinaison linéaire $af + bg \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ la suite

$$(af + bg)_n = \mathbf{1}_{[-n,n]}(af + bg) = a f_n + b g_n,$$

et par l'addition des limites dans un espace vectoriel normé

$$\mathcal{F}(af + bg) = \lim_n\, (a f_n + b g_n) = a \lim_n f_n + b \lim_n g_n = a\, \mathcal{F} f + b\, \mathcal{F} g.$$

Enfin, si f est à la fois dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, on montre que f_n tend vers f pour la norme de L^1, ce qui entraîne que $\widehat{f_n}$ tend vers $\widehat{f}$ uniformément. Comme $(\widehat{f_n})$ tend vers $\mathcal{F} f$ en norme L^2, il existe des sous-suites qui convergent presque partout vers $\mathcal{F} f$, ce qui implique $\mathcal{F} = \widehat{f}$ presque partout.

Proposition. *Si $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ et si la limite*

$$\mathrm{F}(y) = \lim_n \int_{-n}^{n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,xy}\, f(x)\, dx$$

existe pour presque tout $y \in \mathbb{R}$, alors $(\mathcal{F} f)(y) = \mathrm{F}(y)$ pour presque tout $y \in \mathbb{R}$. En particulier, si $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ et si l'intégrale généralisée

$$\mathrm{F}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,xy}\, f(x)\, dx$$

est semi-convergente pour presque tout $y \in \mathbb{R}$, alors $\mathcal{F} f = \mathrm{F}$ presque partout.

Preuve. — Si on pose comme avant $f_n = \mathbf{1}_{[-n,n]} f$, on a

$$\int_{-n}^{n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,xy}\, f(x)\, dx = \widehat{f}_n(y),$$

donc l'hypothèse de la proposition est que $(\widehat{f}_n)$ converge vers F presque partout ; mais comme on sait que $(\widehat{f}_n)$ tend vers $\mathcal{F} f$ dans L^2, il résulte que $\mathcal{F} = \mathrm{F}$ presque partout.

Inversion de Fourier dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$

Désignons par σ l'application qui associe à chaque fonction f la fonction σf définie sur $\mathbb{R}$ par $(\sigma f)(x) = f(-x)$. Il est clair que σ est isométrique sur $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$,

$$\forall f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}), \quad \|\sigma f\|_p = \|f\|_p,$$

et que $\sigma \circ \sigma = \mathrm{Id}$. Sur l'espace X formé des fonctions f continues bornées intégrables avec $\widehat{f}$ intégrable, on a $\mathcal{F} \circ \mathcal{F} = 2\pi\, \sigma$ et $\mathcal{F} \circ \sigma = \sigma \circ \mathcal{F}$: en effet, si $f \in \mathrm{X}$ on sait (théorème 2, cours n° 1) que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$2\pi\, f(-x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(-x)y}\, \widehat{f}(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,xy}\, \widehat{f}(y)\, dy = (\mathcal{F} \widehat{f})(x) = (\mathcal{F} \circ \mathcal{F})(f)(x)$$

et

$$(\mathcal{F} \circ \sigma)(f)(y) = \mathcal{F}(\sigma f)(y) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,xy}\, f(-x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,u(-y)}\, f(u)\, du = (\mathcal{F} f)(-y).$$

Par la densité de l'espace vectoriel X dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ on déduit le résultat qui suit.

Théorème. *Pour la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ agissant de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ on a*

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{F} = 2\pi\, \sigma, \quad \mathcal{F} \circ \sigma = \sigma \circ \mathcal{F}$$

donc $\mathcal{F}$ est inversible et

$$\mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{2\pi}\, \mathcal{F} \circ \sigma = \frac{1}{2\pi}\, \sigma \circ \mathcal{F}.$$

Pour trouver l'inverse à partir des premières conclusions, on remarque que

$$\big(\mathcal{F} \circ \sigma\big) \circ \mathcal{F} = \mathcal{F} \circ \big(\mathcal{F} \circ \sigma\big) = \mathcal{F} \circ \mathcal{F} \circ \sigma = 2\pi\, \sigma \circ \sigma = 2\pi\, \mathrm{Id}_{\mathrm{L}^2}\,.$$

Exemple de $\sin(y)/y$

Puisque $g(y) = \sin(y)/y$ est la transformée de Fourier de $f = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[-1,1]}$ et que g est paire, on a $g = g \circ \sigma$ et l'inversion de Fourier dans L^2 nous dit que

$$\mathbf{1}_{[-1,1]} = \frac{1}{\pi}\,\mathcal{F}g$$

en tant que classe de fonctions. Par ailleurs on montre que

$$\int_{-n}^{n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\, g(y)\, dy = \int_{-n}^{n} \cos(xy)\sin(y)\,\frac{dy}{y}$$

tend vers $2\mathrm{V}$ lorsque $|x| < 1$, où

$$\mathrm{V} := \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\, du,$$

et vers 0 quand $|x| > 1$ (on utilise les formules d'addition des sinus, et le calcul de

$$\int_0^{+\infty} \sin(ay)\,\frac{dy}{y} = \pm\mathrm{V}$$

selon que $a > 0$ ou bien $a < 0$). On déduit $\mathrm{V} = \pi/2$. On note que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(y)}{y^2}\, dy = \frac{\pi}{2},$$

car $\int_{\mathbb{R}} g^2 = 2\pi \int_{\mathbb{R}} f^2 = \pi$ par l'identité de Parseval.

Convolutions $\mathrm{L}^p * \mathrm{L}^1$

Proposition. *Si* $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ *et* $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, *alors* $f * g \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ *et*

$$\|f * g\|_p \le \|f\|_p\, \|g\|_1.$$

Donnons la preuve du cas $p = 2$. On suppose f et g mesurables positives ; avec Cauchy-Schwarz,

$$\Bigl(\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\, dy\Bigr)^2 = \Bigl(\int_{\mathbb{R}} f(x-y)\sqrt{g(y)}\,\sqrt{g(y)}\, dy\Bigr)^2 \le$$
$$\Bigl(\int_{\mathbb{R}} f^2(x-y)g(y)\, dy\Bigr)\Bigl(\int_{\mathbb{R}} g(y)\, dy\Bigr) = \|g\|_1 \int_{\mathbb{R}} f^2(x-y)g(y)\, dy$$

puis avec Fubini

$$\int_{\mathbb{R}}\Bigl(\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\, dy\Bigr)^2 dx \le \|g\|_1 \int_{\mathbb{R}^2} f^2(x-y)g(y)\, dy\, dx = \|g\|_1^2\, \|f\|_2^2.$$

Approximation de l'unité dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$

Théorème. *Si $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ la convolée $f * \mathrm{F}_\tau$ converge vers f dans L^p lorsque $\tau \to 0$.*

Preuve. — D'après le cours d'intégration (et les Notes à la fin du cours n° 2), on peut trouver une fonction en escalier g telle que $\|f - g\|_p < \varepsilon/3$. Pour τ assez petit, on a vu qu'on aura $\|g - g * \mathrm{F}_\tau\|_p < \varepsilon/3$, et d'après la proposition on a aussi

$$\|f * \mathrm{F}_\tau - g * \mathrm{F}_\tau\|_p = \|(f - g) * \mathrm{F}_\tau\|_p \leq \|f - g\|_p \, \|\mathrm{F}_\tau\|_1 = \|f - g\|_p < \varepsilon/3.$$

Finalement $\|f - f * \mathrm{F}_\tau\|_p < \varepsilon$.

Corollaire. *Si f et $\widehat{f}$ sont dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, on a presque partout*

$$2\pi \, f(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xy} \, \widehat{f}(y) \, dy.$$

Preuve. — Si f vérifie ces hypothèses, on voit que $f * \mathrm{F}_\tau$ est dans X : on a toujours que $f * \mathrm{F}_\tau$ est continue bornée intégrable, lorsque $f \in \mathrm{L}^1$, et de plus ici $\widehat{f * \mathrm{F}_\tau} = \widehat{f} \, \widehat{\mathrm{F}}_\tau$ est bornée en module par $|\widehat{f}|$, donc intégrable d'après l'hypothèse du corollaire. Il en résulte que $f * \mathrm{F}_\tau$ vérifie la formule de Fourier inverse ponctuelle vue dans les leçons précédentes

$$2\pi \, (f * \mathrm{F}_\tau)(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} \, \widehat{f * \mathrm{F}_\tau}(t) \, dt = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} \, \widehat{\mathrm{F}_\tau}(t) \widehat{f}(t) \, dt.$$

Quand τ tend vers 0, l'intégrale

$$2\pi \, (f * \mathrm{F}_\tau)(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} \, \widehat{\mathrm{F}_\tau}(t) \widehat{f}(t) \, dt$$

tend vers

$$\mathrm{F}(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} \, \widehat{f}(t) \, dt$$

par Lebesgue dominé, mais $2\pi \, f * \mathrm{F}_\tau$ tend vers $2\pi f$ dans L^1 par le théorème précédent. Le résultat en découle.

Corollaire. *La transformation de Fourier est injective sur* $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.

En effet, si $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et $\widehat{f} = 0$, on a bien f et $\widehat{f}$ intégrables et le corollaire précédent s'applique. Comme $\widehat{f} = 0$, la formule d'inversion donne $f = 0$.

Fourier et dérivation

Proposition. *Si $f(x)$ et $xf(x)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$, la fonction $\widehat{f}$ est dérivable et sa dérivée est obtenue par dérivation sous l'intégrale,*

$$(\widehat{f})'(y) = -\mathrm{i} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy} \, xf(x) \, dx.$$

Si f et f' sont intégrables, alors

$$\widehat{f'}(y) = \mathrm{i}y \, \widehat{f}(y).$$