Transformation de Fourier : suite et fin

Fourier et dérivation

Proposition 1. *Si f et $x \to xf(x)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$, la transformée de Fourier $\widehat{f}$ est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est obtenue par dérivation sous l'intégrale,*

$$(\widehat{f}\,)'(y) = -\mathrm{i} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,xy}\, xf(x)\,dx.$$

Si f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, avec f et f' intégrables sur $\mathbb{R}$, alors

$$\widehat{f'}\,(y) = \mathrm{i}y\,\widehat{f}(y).$$

Preuve. — Le premier résultat est obtenu par dérivation sous l'intégrale. Pour le second, on écrit

$$(f' * \mathrm{F}_\tau)(x) = \frac{1}{\tau} \int_{x-\tau}^{x} f'(u)\,du = \frac{f(x) - f(x-\tau)}{\tau}\,;$$

comme $f' \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, on sait que $f' * \mathrm{F}_\tau$ tend dans L^1 vers f' quand $\tau \to 0$, donc $\widehat{f' * \mathrm{F}_\tau}$ tend uniformément vers $\widehat{f'}$; d'après la partie droite de l'équation précédente, la transformée de Fourier de $f' * \mathrm{F}_\tau$ est égale à

$$y \to \frac{1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\tau y}}{\tau}\,\widehat{f}(y)$$

qui tend simplement vers $y \to \mathrm{i}y\widehat{f}(y)$ quand $\tau \to 0$, d'où le résultat $\widehat{f'}(y) = \mathrm{i}y\widehat{f}(y)$.

Exemple de la densité gaussienne

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}$$

est intégrable, et $x \to xf(x)$ est intégrable aussi : il en résulte que la fonction g définie par $g(y) = \widehat{f}(y)$ est de classe C^1. On obtient par la proposition ci-dessus, suivie d'une intégration par parties

$$g'(y) = -\mathrm{i} \int_{\mathbb{R}} x\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,xy}\;dx = \mathrm{i}\Bigl(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{i}y\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,xy}\;dx\Bigr) = -y\,g(y).$$

La résolution de l'équation différentielle $g'(y) = -yg(y)$, compte-tenu de l'égalité

$$g(0) = \widehat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2/2}\;dx = \sqrt{2\pi}$$

donne

$$\widehat{f}(y) = g(y) = \sqrt{2\pi}\;\mathrm{e}^{-y^2/2} = \sqrt{2\pi}\,f(y).$$

On peut observer que la fonction f est un vecteur propre de la transformation de Fourier, correspondant à la valeur propre $\sqrt{2\pi}$.

On dira que la fonction g, intégrable sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}$, est la *dérivée généralisée* de la fonction continue G si on a pour tous $u \le v$

$$\mathrm{G}(v) - \mathrm{G}(u) = \int_u^v g(s)\,ds.$$

C'est le cas par exemple si G est linéaire par morceaux, avec $\mathrm{G} = 0$ hors de $[-1,1]$, $\mathrm{G}(0) = 1$ et G linéaire sur $[-1,0]$ et $[0,1]$. La dérivée généralisée g de cette fonction G est égale à $g = \mathbf{1}_{[-1,0]} - \mathbf{1}_{[0,1]}$ dans ce cas. Lorsque G est de classe C^1, la dérivée généralisée g est simplement la dérivée usuelle G'. La première partie de la proposition suivante correspond au deuxième cas de la proposition 1 : lorsque G est de classe C^1 avec G, G' à la fois dans L^1 et L^2, les deux énoncés peuvent être appliqués à la fonction G.

Proposition 2. *On suppose que g et G sont deux fonctions de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ telles que G soit continue sur $\mathbb{R}$ et*

$$\mathrm{G}(v) - \mathrm{G}(u) = \int_u^v g(s)\,ds$$

pour tous $u \le v$; on a alors pour presque tout y

$$(\mathcal{F}g)(y) = \mathrm{i}y\,(\mathcal{F}\mathrm{G})(y).$$

Inversement, si $\mathrm{G} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ et si $y \to y\,(\mathcal{F}\mathrm{G})(y)$ est de carré intégrable, il existe une fonction $g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ telle que

$$\mathrm{G}(v) - \mathrm{G}(u) = \int_u^v g(s)\,ds$$

pour tous $u \le v$.

Preuve.— La première partie se fait comme dans le cas de L^1, en disant ici que $g * \mathrm{F}_\tau$ tend vers g dans L^2, et en exploitant la définition de la dérivée généralisée,

$$(g * \mathrm{F}_\tau)(x) = \frac{1}{\tau}\int_{x-\tau}^x g(s)\,ds = \frac{\mathrm{G}(x) - \mathrm{G}(x-\tau)}{\tau}.$$

Pour la seconde partie : d'après la preuve du résultat sur la dérivabilité de la transformée de Fourier des fonctions de L^1 on voit que la fonction G_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\mathrm{G}_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-n}^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}xy}(\mathcal{F}\mathrm{G})(y)\,dy$$

est continûment dérivable, avec dérivée $g_n = \mathrm{G}_n'$ exprimée par

$$g_n(x) = \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_{-n}^n y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xy}(\mathcal{F}\mathrm{G})(y)\,dy$$

ce qui implique que pour tous $u \le v$,

$$\mathrm{G}_n(v) - \mathrm{G}_n(u) = \int_u^v g_n(s)\,ds.$$

D'après la définition de la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ sur L^2, les fonctions

$$x \to 2\pi\, \mathrm{G}_n(x) = \int_{-n}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xy} (\mathcal{F}\mathrm{G})(y)\, dy = \int_{-n}^{n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xs} (\mathcal{F}\mathrm{G})(-s)\, ds$$

tendent dans L^2 vers la transformée de Fourier de $(\sigma \circ \mathcal{F})(\mathrm{G}) : s \to (\mathcal{F}\mathrm{G})(-s)$; d'après la formule d'inversion de Fourier dans L^2, on voit que (G_n) tend dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ vers

$$\mathrm{G} = \frac{1}{2\pi}\, (\mathcal{F} \circ \sigma \circ \mathcal{F})(\mathrm{G}),$$

pendant que g_n tend dans L_2 vers une fonction g. Si on choisit un point u et une sous-suite (n_k) tels que $\mathrm{G}(u) = \lim_k \mathrm{G}_{n_k}(u)$, on obtiendra pour tout $v \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{H}(v) := \mathrm{G}(u) + \int_u^v g(s)\, ds = \lim_k \Bigl(\mathrm{G}_{n_k}(u) + \int_u^v g_{n_k}(s)\, ds \Bigr) = \lim_k \mathrm{G}_{n_k}(v)$$

ce qui montre que $\mathrm{H} = \mathrm{G}$ et termine la preuve.

Corollaire 1. *On suppose que* G *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}$*, que* G *et* G' *sont dans* $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ *; alors, pour presque tout* y

$$(\mathcal{F}\mathrm{G}')(y) = \mathrm{i}y(\mathcal{F}\mathrm{G})(y).$$

Comme on l'a déjà dit, cet énoncé correspond, pour L^2, à la deuxième partie de la proposition 1, qui s'appliquait à L^1.

Corollaire 2. *On suppose que* G *et* $\mathrm{H} : x \to x\mathrm{G}(x)$ *sont deux fonctions de* $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ *; alors* $\mathcal{F}\mathrm{G}$ *admet une dérivée généralisée égale à*

$$-\mathrm{i}\mathcal{F}\mathrm{H} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}).$$

C'est la deuxième partie de la proposition 2, lue à l'envers (Fourier au lieu de Fourier inverse). Cet énoncé correspond, pour L^2, à la première partie de la proposition 1.

Équation de la chaleur sur la droite

On suppose donnée une fonction v sur $\mathbb{R}$ où $v(x)$ représente la température au point x d'une barre rectiligne infinie, à l'instant 0. Si la barre est homogène, la théorie physique prévoit que l'évolution de la température au cours du temps $t \ge 0$ est régie par *l'équation de la chaleur*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

où k est une constante dépendant de la barre, et où $u(x,t)$ représente la température au point x à l'instant $t \ge 0$. On cherche donc une fonction de deux variables $u(x,t)$ telle que $u(x,0) = v(x)$, et telle que pour tous $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial}{\partial t}\, u(x,t) = k\, \frac{\partial^2}{\partial x^2}\, u(x,t).$$

En utilisant les rapports entre Fourier et dérivation, on transforme cette *équation aux dérivées partielles* en l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{\partial}{\partial t} w(\xi,t) = -k\,\xi^2 w(\xi,t)$$

où on a posé

$$w(\xi,t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\, u(x,t)\, dx.$$

Cette équation différentielle se résout facilement, pour chaque ξ fixé

$$w(\xi,t) = \mathrm{e}^{-k\xi^2 t}\, w(\xi,0) = \mathrm{e}^{-k\xi^2 t}\, \widehat{v}(\xi),$$

et fait apparaître des densités gaussiennes : la fonction $x \to u(x,t)$ est la convolution de la donnée initiale v avec la densité gaussienne g_t dont la transformée de Fourier est $\widehat{g}_t(\xi) = \mathrm{e}^{-k\xi^2 t}$.

Fourier multi-dimensionnel

Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ sont deux éléments de $\mathbb{R}^n$, on introduit leur produit scalaire

$$x \cdot y = \sum_{j=1}^{n} x_j\, y_j$$

et si f est intégrable sur $\mathbb{R}^n$ on pose

$$\forall y \in \mathbb{R}^n, \quad \widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x\cdot y}\, f(x)\, dx.$$

Dans le cas d'une fonction «décomposée» de la forme $f(x_1,x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2)$, le théorème de Fubini donne

$$\widehat{f}(y_1,y_2) = \widehat{f_1}(y_1)\, \widehat{f_2}(y_2).$$

Ainsi, la densité gaussienne 2-dimensionnelle $g(x_1,x_2) = \mathrm{e}^{-x_1^2/2 - x_2^2/2}$ admet pour transformée de Fourier

$$(y_1,y_2) \to \sqrt{2\pi}\ \mathrm{e}^{-y_1^2/2}\ \sqrt{2\pi}\ \mathrm{e}^{-y_2^2/2} = 2\pi\ \mathrm{e}^{-y_1^2/2 - y_2^2/2} = 2\pi\, g(y_1,y_2).$$

Fourier dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$

On peut définir $\mathcal{F}$ sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$, et l'égalité de Parseval devient, pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F} f(y)|^2\, dy = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2\, dx.$$

On considère un espace vectoriel E sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Un *produit scalaire* ([a]) sur E est une application $(x, y) \in \mathrm{E} \times \mathrm{E} \to \langle x, y \rangle \in \mathbb{K}$ telle que

– l'application $x \in \mathrm{E} \to \langle x, y \rangle$ est $\mathbb{K}$-linéaire pour tout $y \in \mathrm{E}$ fixé ;
– pour tous $x, y \in \mathrm{E}$, on a $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$;
– le nombre $\langle x, x \rangle$, qui est réel d'après la ligne précédente, vérifie $\langle x, x \rangle \ge 0$.

On a

$$\langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2 \,\mathrm{Re}\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle.$$

Proposition (Cauchy-Schwarz). Pour tous les vecteurs x, y de E on a

$$|\langle x, y \rangle| \le \sqrt{\langle x, x \rangle}\,\sqrt{\langle y, y \rangle}.$$

Preuve. — Écrivons en coordonnées polaires $\langle x, y \rangle = |\langle x, y \rangle|\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, pour un certain nombre réel θ, de sorte que $\langle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} x, y \rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \langle x, y \rangle = |\langle x, y \rangle|$. Choisissons deux nombres réels $\lambda > \sqrt{\langle y, y \rangle}$ et $\mu > \sqrt{\langle x, x \rangle}$. On écrit

$$0 \le \langle \lambda\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} x - \mu y, \lambda\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} x - \mu y \rangle = \lambda^2 \langle x, x \rangle - 2\lambda\mu \,\mathrm{Re}\langle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} x, y \rangle + \mu^2 \langle y, y \rangle.$$

Il en résulte que

$$2\lambda\mu\, |\langle x, y \rangle| \le \lambda^2 \langle x, x \rangle + \mu^2 \langle y, y \rangle \le 2\lambda^2\mu^2,$$

d'où $|\langle x, y \rangle| \le \lambda\, \mu$ par simplification, puisque $\lambda\mu > 0$. Pour finir, on fait tendre λ vers $\sqrt{\langle y, y \rangle}$ et μ vers $\sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Semi-norme déduite du produit scalaire

L'application

$$x \in \mathrm{E} \to \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

est une *semi-norme* sur E, c'est-à-dire qu'elle vérifie $\|x\| \ge 0$, $\|\lambda x\| = |\lambda|\, \|x\|$ et $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$. Le dernier point résulte de Cauchy-Schwarz,

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2 \,\mathrm{Re}\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \le \langle x, x \rangle + 2|\langle x, y \rangle| + \langle y, y \rangle$$

$$\le \langle x, x \rangle + 2\sqrt{\langle x, x \rangle}\sqrt{\langle y, y \rangle} + \langle y, y \rangle = \bigl(\sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle}\bigr)^2 = \bigl(\|x\| + \|y\|\bigr)^2.$$

Exemple : l'espace $\mathrm{E} = \mathcal{L}^2(\Omega, \mu)$, muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega f(\omega) \overline{g(\omega)}\, d\mu(\omega)$$

et de la semi-norme

$$\|f\|_2 = \Bigl(\int_\Omega |f(\omega)|^2 \, d\mu(\omega) \Bigr)^{1/2}.$$

On dit que deux vecteurs $u, v \in \mathrm{E}$ sont *orthogonaux* quand $\langle u, v \rangle = 0$; on note que cette relation est symétrique : $\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle} = \overline{0} = 0$.

Proposition (Pythagore). *Si* $u_1, \dots u_n$ *sont des vecteurs de l'espace* E, *deux à deux orthogonaux, on a*

$$\Big\|\sum_{j=1}^{n} u_j\Big\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \|u_j\|^2.$$

Preuve. — Si u et v sont orthogonaux,

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \langle u,u\rangle + 2\,\mathrm{Re}\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle = \langle u,u\rangle + \langle v,v\rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Ensuite, on montre la proposition par récurrence sur n : on pose $v = \sum_{j=1}^{n} u_j$, on remarque que u_{n+1} est orthogonal à v (linéarité du produit scalaire) et

$$\Big\|\sum_{j=1}^{n+1} u_j\Big\|^2 = \|v + u_{n+1}\|^2 = \|v\|^2 + \|u_{n+1}\|^2 = \Big(\sum_{j=1}^{n} \|u_j\|^2\Big) + \|u_{n+1}\|^2.$$

Définition. Un *espace de Hilbert* est un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire tel que la semi-norme associée soit une *norme*, pour laquelle E soit complet.

Exemple : $\mathrm{E} = \mathrm{L}^2(\Omega, \mu)$, muni du produit scalaire

$$\langle \widetilde{f}, \widetilde{g}\rangle = \int_\Omega f(\omega)\overline{g(\omega)}\, d\mu(\omega)$$

où f, g sont des représentants quelconques des classes $\widetilde{f}, \widetilde{g} \in \mathrm{L}^2$. Dans la suite on ne mentionnera plus les classes ; on fera « comme si » $\widetilde{f}$ et $\widetilde{g}$ étaient des vraies fonctions.

Notes

([a]) La plupart des gens exige qu'un produit scalaire sur l'espace vectoriel E vérifie la propriété suivante : si $x \neq 0_{\mathrm{E}}$, alors $\langle x, x\rangle \neq 0$. Comme nous supposons seulement $\langle x, x\rangle \geq 0$, nous devrions peut-être dire *semi-produit scalaire*, comme on dit *semi-norme*. Je trouve ça trop lourd et on ne le fera pas, mais vous êtes prévenus.