Espaces de Hilbert, suite

Rappel (Pythagore). *Si* $u_1, \ldots u_n$ *sont des vecteurs d'un espace de Hilbert* H, *deux à deux orthogonaux, on a*

$$\Bigl\|\sum_{j=1}^{n} u_j\Bigr\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \|u_j\|^2.$$

Conséquence : des vecteurs (u_k), $k = 1, \ldots, n$, orthogonaux et *non nuls* sont libres.
En effet, si $\sum_{k=1}^{n} c_k u_k = 0$, on aura

$$\Bigl\|\sum_{k=1}^{n} c_k u_k\Bigr\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \|u_k\|^2 = 0$$

donc $|c_k|\,\|u_k\| = 0$ pour tout k, et $c_k = 0$ puisque $\|u_k\| \neq 0$ pour $k = 1, \ldots, n$. Ainsi, la seule combinaison linéaire de ces vecteurs qui soit nulle est celle dont tous les coefficients c_k sont nuls : le système de vecteurs est libre.

Si les $e_1, \ldots, e_n$ sont orthonormés, on a

$$\Bigl\|\sum_{k=1}^{n} c_k e_k\Bigr\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2.$$

De plus, si $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$ et si z est un vecteur de F, les coordonnées de z dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ de F sont données par les produits scalaires $\langle z, e_k\rangle$, $k = 1, \ldots, n$

$$z = \sum_{k=1}^{n} \langle z, e_k\rangle\, e_k, \quad \|z\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\langle z, e_k\rangle|^2.$$

En effet, si $z \in \mathrm{F}$, il existe des coefficients c_k tels que $z = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k$; pour tout indice $j = 1, \ldots, n$ on a

$$\langle z, e_j\rangle = \sum_{k=1}^{n} c_k\, \langle e_k, e_j\rangle = c_j.$$

Projection orthogonale, première approche

Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$ engendré par une suite orthonormée finie $e_1, \ldots, e_n$: pour tout vecteur $x \in \mathrm{H}$ on pose

$$\mathrm{P_F} x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle\, e_k.$$

Le point $\mathrm{P_F}x$ *est dans* F *et* $x - \mathrm{P_F}x$ *est orthogonal à* F. *Le point* $\mathrm{P_F}x$ *est le point de* F *le plus proche de* x. *De plus* $\|\mathrm{P_F}x\| \le \|x\|$, *c'est-à-dire que*

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2 \le \|x\|^2.$$

Preuve. — Posons $y = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k\rangle\, e_k$; pour tout $j = 1, \ldots, n$ on a

$$\langle y, e_j\rangle = \langle \sum_{k=1}^n \langle x, e_k\rangle\, e_k, e_j\rangle = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k\rangle\, \langle e_k, e_j\rangle = \langle x, e_j\rangle.$$

On voit ainsi que $\langle e_j, x - y\rangle = 0$ pour tout $j = 1, \ldots, n$; par linéarité du produit scalaire par rapport au premier vecteur, on obtient $\langle \sum_{j=1}^n c_j e_j, x - y\rangle = 0$, ce qui montre que que $x - y$ est orthogonal à F : on a bien que $y \in \mathrm{F}$ et $x - y \perp \mathrm{F}$. Si z est un vecteur de F quelconque, la différence $y - z$ est encore dans F, donc orthogonale à $x - y$ et par Pythagore

$$\|x - z\|^2 = \|(x - y) + (y - z)\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 \geq \|x - y\|^2.$$

En reprenant la ligne précédente avec $z = 0$,

$$\|x\|^2 = \|(x - y) + y\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y\|^2 \geq \|y\|^2.$$

Séries de vecteurs dans un espace vectoriel normé

Si $(u_k)_{k\geq 0}$ est une suite de vecteurs d'un espace normé E, on peut définir les *sommes partielles*

$$\mathrm{U}_n = \sum_{k=0}^n u_k \in \mathrm{E}\,;$$

par définition, la série de vecteurs $\sum u_k$ est *convergente dans* E s'il existe un vecteur $s \in \mathrm{E}$ tel que

$$\lim_n \|s - \mathrm{U}_n\|_{\mathrm{E}} = 0.$$

On pose alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = s = \lim_n \mathrm{U}_n.$$

Proposition. *Soit $(u_k)_{k\geq 0}$ une suite de vecteurs deux à deux orthogonaux dans un espace de Hilbert H ; la série $\sum u_k$ converge dans H si et seulement si $\sum \|u_k\|^2 < +\infty$, et dans ce cas*

$$\Big\|\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\Big\|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \|u_k\|^2.$$

Preuve. Posons pour tout entier $n \geq 0$

$$\mathrm{U}_n = u_0 + \cdots + u_n, \quad \mathrm{V}_n = \|\mathrm{U}_n\|^2 = \|u_0\|^2 + \cdots + \|u_n\|^2.$$

Puisque H est complet, la série de vecteurs $\sum u_k$ converge dans H si et seulement si la suite des sommes partielles (U_n) est de Cauchy dans H. Pour $m < n$ on a $\mathrm{U}_n - \mathrm{U}_m = u_{m+1} + \cdots + u_n$, donc

$$\|\mathrm{U}_n - \mathrm{U}_m\|^2 = \sum_{k=m+1}^n \|u_k\|^2 = \mathrm{V}_n - \mathrm{V}_m.$$

Il en résulte que la suite de vecteurs (U_n) est de Cauchy si et seulement la suite numérique (V_n) est de Cauchy, c'est-à-dire si et seulement si $\sum \|u_k\|^2 < +\infty$. Dans le cas où la série converge,

$$\Big\|\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\Big\|^2 = \lim_n \|\mathrm{U}_n\|^2 = \lim_n \sum_{k=0}^{n} \|u_k\|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \|u_k\|^2.$$

Proposition. *Si $(e_k)_{k\ge 0}$ est une suite orthonormée infinie dans un espace de Hilbert* H, *tout vecteur x du sous-espace vectoriel fermé engendré par cette suite peut s'écrire*

$$x = \sum_{k=0}^{+\infty} \langle x, e_k\rangle\, e_k.$$

Preuve. — Pour tout $n \ge 0$, posons $\mathrm{F}_n = \mathrm{Vect}(e_0, \ldots, e_n)$ et désignons par P_n la projection orthogonale sur F_n. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un vecteur z de $\mathrm{Vect}(e_k, k \ge 0)$ tel que $\|x - z\| < \varepsilon$; il existe un entier N tel que $z \in \mathrm{Vect}(e_0, \ldots, e_\mathrm{N})$; pour tout $n \ge \mathrm{N}$, on sait que $\mathrm{P}_n x$ est plus proche de x que le vecteur $z \in \mathrm{F}_n$, donc

$$\Big\|x - \sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k\rangle\, e_k\Big\| \le \|x - z\| < \varepsilon.$$

Exemple : les fonctions $e_n(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$, $n \in \mathbb{Z}$, sont une suite orthonormée dans l'espace $\mathrm{H} = \mathrm{L}^2([0, 2\pi], dt/(2\pi))$.

Définition. Une *base hilbertienne* d'un espace de Hilbert H est une famille de vecteurs $(e_i)_{i\in\mathrm{I}}$ indexée par un ensemble fini ou dénombrable I, et telle que

– les vecteurs sont de norme un, et deux à deux orthogonaux ;
– l'espace vectoriel engendré $\mathrm{Vect}(e_i, i \in \mathrm{I})$ est dense dans H.

Si I est infini dénombrable et si $(i_n)_{n\ge 0}$ est une énumération quelconque des vecteurs $(e_i)_{i\in\mathrm{I}}$, on a pour tout $x \in \mathrm{H}$

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_{i_n}\rangle\, e_{i_n}, \qquad \|x\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle x, e_{i_n}\rangle|^2.$$

Exemple de base hilbertienne : le système de Haar

Pour chaque intervalle borné $\mathrm{I} = [a, b[$ posons $m = (a + b)/2$, puis $\mathrm{I}_- = [a, m[$ et $\mathrm{I}_+ = [m, b[$; on décrit une famille infinie d'intervalles par récurrence : la famille $\mathcal{G}_0$ est formée du seul intervalle $[0, 1[$; si $\mathcal{G}_n$ est définie, la famille $\mathcal{G}_{n+1}$ est formée de tous les intervalles $\mathrm{I}_-, \mathrm{I}_+$ lorsque I varie dans $\mathcal{G}_n$.

On voit que $\mathcal{G}_n$ est formée de 2^n intervalles disjoints qui recouvrent $[0, 1[$. On considère la famille de fonctions formée de $h_\emptyset = 1$, puis de toutes les fonctions

$$h_\mathrm{I} = |\mathrm{I}|^{-1/2}\big(\mathbf{1}_{\mathrm{I}_-} - \mathbf{1}_{\mathrm{I}_+}\big)$$

où I varie dans toutes les familles $\mathcal{G}_n$, $n \geq 0$. Cette famille est une base hilbertienne de l'espace de Hilbert $\mathrm{L}^2(0,1)$.

Théorème. *Les fonctions* $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *définies par* $e_n(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$ *forment une base hilbertienne de l'espace de Hilbert* $\mathrm{L}^2([0,2\pi])$.

La preuve un peu longue sera finie la prochaine fois. On sait déjà qu'il s'agit d'une suite orthonormée, il reste à prouver qu'elle engendre un sous-espace vectoriel qui est dense dans L^2. Comme on sait que les fonctions continues nulles en 0 et en 2π sont denses dans $\mathrm{L}^2([0,2\pi])$, il suffit de voir que toute fonction continue nulle en 0 et 2π peut être approchée par un *polynôme trigonométrique*

$$\mathrm{P} = \sum_{k=-\mathrm{N}}^{\mathrm{N}} c_k e_k.$$

Comme la mesure est finie, il suffit de montrer une approximation uniforme ; comme toute fonction continue nulle aux deux bouts peut être étendue en fonction 2π-périodique continue sur $\mathbb{R}$, il suffit de prouver le théorème qui suit.

Théorème (Weierstrass périodique). *Si f est une fonction continue 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, on peut l'approcher uniformément par des polynômes trigonométriques.*

Pour la preuve on va se servir du *noyau de Poisson* : pour $0 < r < 1$ on pose

$$\mathrm{P}_r(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta)}.$$

La série converge normalement, ce qui permet par exemple de voir que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{P}_r(t)\,\frac{dt}{2\pi} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\,\frac{d\theta}{2\pi} = 1.$$

Cette fonction continue P_r «pique» à l'origine. Elle est paire, décroissante sur $[0,\pi]$ ce qui implique quand $0 < \delta < \pi$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{1}_{\{|t|\geq\delta\}} \mathrm{P}_r(t)\,\frac{dt}{2\pi} = 2\int_{\delta}^{\pi} \mathrm{P}_r(t)\,\frac{dt}{2\pi} \leq 2\mathrm{P}_r(\delta)\int_{\delta}^{\pi}\frac{dt}{2\pi} \leq \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\delta)}$$

qui tend vers 0 quand $r \to 1$.