Espaces de Hilbert, suite 2

Il nous reste à finir la preuve de deux résultats énoncés dans la séance précédente.

Théorème. *Les fonctions $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définies par $e_n(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$ forment une base hilbertienne de l'espace de Hilbert $\mathrm{L}^2([0, 2\pi], dx/(2\pi))$.*

Comme on sait que les fonctions continues qui sont nulles en 0 et en 2π sont denses([a]) dans l'espace $\mathrm{L}^2([0, 2\pi])$, on a dit qu'il suffit de voir que toute fonction continue nulle en 0 et 2π peut être approchée uniformément par un *polynôme trigonométrique*

$$\mathrm{P} = \sum_{k=-\mathrm{N}}^{\mathrm{N}} c_k e_k.$$

C'est le théorème qui suit qui donne cette information.

Théorème (Weierstrass périodique). *Si f est une fonction continue 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, on peut l'approcher uniformément par des polynômes trigonométriques.*

Avant de se lancer dans la preuve, on va faire quelques rappels et introduire de nouveaux éléments utiles.

Rappel : norme uniforme, convergence uniforme. Si $\mathrm{C}([a, b])$ désigne l'espace vectoriel des fonctions continues sur l'intervalle fermé borné sur $[a, b]$, on le munit de la *norme uniforme* $\|f\|_u$ définie pour toute fonction continue f par

$$\|f\|_u = \max\{|f(t)| : t \in [a, b]\}$$

(on pourrait aussi noter cette norme $\|f\|_\infty$, la norme induite par l'espace $\mathrm{L}^\infty([a, b])$, où $[a, b]$ est muni de la mesure de Lebesgue). Dire qu'une suite (f_n) de fonctions continues converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f peut s'exprimer au moyen de la norme uniforme,

$$\lim_n \|f_n - f\|_u = 0.$$

Quand f est une fonction continue 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, son maximum sur $\mathbb{R}$ est identique à son maximum sur un intervalle de longueur 2π, par exemple $[a, b] = [0, 2\pi]$.

Intégrale sur une période. Si f est continue 2π-périodique, la dérivée en x de

$$x \to \int_x^{x+2\pi} f(t)\,dt$$

est nulle, puisqu'elle vaut $f(x + 2\pi) - f(x) = 0$, ce qui montre que l'intégrale sur une période ne dépend pas de l'intervalle de longueur 2π choisi. Le même résultat est vrai aussi pour une fonction 2π-périodique intégrable sur $[0, 2\pi]$, en découpant l'intégrale : si $0 < x < 2\pi$ on peut écrire

$$\int_x^{x+2\pi} f(t)\,dt = \int_x^{2\pi} f(t)\,dt + \int_{2\pi}^{x+2\pi} f(t)\,dt = \int_x^{2\pi} f(t)\,dt + \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^{2\pi} f(t)\,dt.$$

La *convolution périodique* de f, g, fonctions 2π-périodiques intégrables sur $[0, 2\pi]$, sera définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f *_{\text{per}} g)(x) = \int_a^{a+2\pi} f(x-t) g(t) \, \frac{dt}{2\pi},$$

où la valeur de l'intégrale ne dépend pas de a, d'après la remarque précédente.

Preuve du théorème. — Pour montrer le théorème de Weierstrass périodique on va se servir du *noyau de Poisson* déjà introduit dans la séance précédente : pour $0 < r < 1$ on a posé

$$\mathrm{P}_r(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i} n\theta} = \frac{1 - r^2}{|1 - r \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,|^2} = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta)}.$$

La série converge normalement, ce qui permet par exemple d'intervertir intégrale et série, et de voir ainsi que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{P}_r(\theta) \, \frac{d\theta}{2\pi} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i} n\theta} \, \frac{d\theta}{2\pi} = 1,$$

car les intégrales sont nulles, sauf si $n = 0$. Cette fonction continue P_r « pique » à l'origine ; elle est paire, décroissante sur $[0, \pi]$ ce qui implique quand $0 < \delta < \pi$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{1}_{\{|t| \ge \delta\}} \mathrm{P}_r(t) \, \frac{dt}{2\pi} = 2 \int_{\delta}^{\pi} \mathrm{P}_r(t) \, \frac{dt}{2\pi} \le 2\mathrm{P}_r(\delta) \int_{\delta}^{\pi} \frac{dt}{2\pi} \le \mathrm{P}_r(\delta) = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\delta)}$$

qui tend vers 0 quand $r \to 1$, avec δ fixé. Autrement dit, la « masse » de P_r (limitée à l'intervalle $[-\pi, \pi]$) se concentre à l'origine quand $r \to 1$; c'est un cas particulier du phénomène *d'approximation de l'unité*. On montre alors que

a. La convolée $f *_{\text{per}} \mathrm{P}_r$ tend uniformément vers f quand $r \to 1$.

b. La convolée $f *_{\text{per}} \mathrm{P}_r$ est une série trigonométrique, limite uniforme de polynômes trigonométriques.

Pour le point *a*, on se donne $\varepsilon > 0$ et on trouve, parce que f est[b] uniformément continue sur $\mathbb{R}$, un réel $\delta > 0$ tel que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$ dès que $|x - y| < \delta$; on choisit ensuite r suffisamment proche de 1 pour que

$$\int_{\delta}^{\pi} \mathrm{P}_r(t) \, \frac{dt}{2\pi} < \frac{\varepsilon}{1 + 8\|f\|_u} \, ;$$

on écrit

$$f(x) - (f * \mathrm{P}_r)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f(x-t)) \, \mathrm{P}_r(t) \, \frac{dt}{2\pi} \, ;$$

on découpe l'intégrale selon que $|t| < \delta$ ou bien $|t| \ge \delta$; dans le premier cas, on a $|f(x) - f(x-t)| < \varepsilon/2$ par le choix de δ, et dans le deuxième cas on majore la différence par $2\,\|f\|_u$; on obtient ainsi, pour tout x réel

$$|f(x) - (f * \mathrm{P}_r)(x)| \le \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{P}_r(t) \, \frac{dt}{2\pi} + 2\,\|f\|_u \int_{\delta \le |t| \le \pi} \mathrm{P}_r(t) \, \frac{dt}{2\pi} < \varepsilon,$$

donc $\|f - f * \mathrm{P}_r\|_u < \varepsilon$. Pour le point b, on trouve par le changement de variable $s = x - t$

$$(f * \mathrm{P}_r)(x) = \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(s)\mathrm{P}_r(x-s)\,\frac{ds}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} f(s)\mathrm{P}_r(x-s)\,\frac{ds}{2\pi}$$

$$(*) \qquad = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} \int_{-\pi}^{\pi} f(s)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n(x-s)}\,\frac{ds}{2\pi} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} c_n(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx},$$

où

$$c_n(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(s)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ns}\,\frac{ds}{2\pi}$$

est le n ième *coefficient de Fourier complexe* de la fonction f. Il est clair que $|c_n(f)| \le \|f\|_u$ pour tout n, donc la série dans l'équation $(*)$ est normalement convergente ; ceci implique que la fonction somme $f *_{\mathrm{per}} \mathrm{P}_r$ est limite uniforme des sommes partielles

$$x \to \sum_{n=-\mathrm{N}}^{\mathrm{N}} r^{|n|} c_n(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx},$$

comme on voulait le montrer. Ceci termine la démonstration du théorème de Weierstrass périodique.

Il résulte de tout ceci que le système trigonométrique est une base hilbertienne : pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^2([0, 2\pi])$, on a dans l'espace L^2

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f, e_n\rangle\, e_n$$

où

$$\langle f, e_n\rangle = \int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\frac{dt}{2\pi} = c_n(f).$$

Ce résultat n'indique pas s'il y a égalité pour des valeurs de x, ni même si la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ converge pour des valeurs de x. C'est vrai d'après le théorème suivant, qui est un résultat très difficile datant du milieu des années 1960 (l'article du mathématicien suédois Lennart Carleson est paru en 1966).

Théorème de Carleson : *pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^2([0, 2\pi])$ et pour presque tout x, la série de Fourier*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$$

converge et sa somme est égale à $f(x)$.

Dire que la série converge signifie que *les deux* séries $\sum_{-\infty}^{-1}$ et $\sum_0^{+\infty}$ convergent.

Exemple : développement en série de Fourier de la fonction périodique f définie par $f(x) = 1 - |x|/\pi$ lorsque $|x| \le \pi$. Pour $n \ne 0$, on voit en utilisant la parité de f que

$$c_n(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,\frac{dx}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\frac{dx}{2\pi} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(1 - x/\pi)\cos(nx)\,dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\Bigl(\frac{1}{n}\Bigl[(1 - x/\pi)\sin(nx)\Bigr]_0^{\pi} + \frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx\Bigr) = \frac{1-\cos(n\pi)}{\pi^2 n^2},$$

qui est égal à 0 pour n pair non nul, et à $2/(\pi^2 n^2)$ pour n impair. On voit aussi que $c_0(f) = 1/2$. La série de Fourier de f est donc

$$\frac{1}{2} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1-\cos(n\pi)}{\pi^2 n^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}.$$

La série précédente est normalement convergente, et sa somme $g(x)$ définit donc une fonction continue ; comme f et g sont continues et doivent être égales presque partout (puisqu'elles représentent la même classe dans L^2) il en résulte[c] que $f(x) = g(x)$ pour tout x. La valeur en $x = 0$ ou $x = \pi$ donne les égalités classiques

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

Gram-Schmidt et bases hilbertiennes

Proposition. *Si on a une suite $(v_n)_{n\ge 0}$ de vecteurs linéairement indépendants dans un espace de Hilbert* H, *il existe une suite orthonormée $(f_n)_{n\ge 0}$ telle que*

$$\mathrm{Vect}(f_k : 0 \le k \le n) = \mathrm{Vect}(v_k : 0 \le k \le n)$$

pour tout $n \ge 0$.

Preuve. — Le vecteur v_0 est non nul, puisqu'il fait partie d'un système libre ; on introduit pour commencer le vecteur de norme 1

$$f_0 = \|v_0\|^{-1} v_0,$$

et on a bien que $\mathrm{Vect}(f_0) = \mathrm{Vect}(v_0)$. Supposons que $f_0, \ldots, f_n$ aient été déterminés et que

$$\mathrm{Vect}(v_0, \ldots, v_n) = \mathrm{F}_n = \mathrm{Vect}(f_0, \ldots, f_n)\,;$$

la projection orthogonale P_n sur F_n est donnée pour tout vecteur $x \in \mathrm{H}$ par

$$\mathrm{P}_n x = \sum_{k=0}^{n} \langle x, f_k\rangle\, f_k.$$

Puisque les vecteurs (v_j) sont indépendants, on sait que $v_{n+1} \notin \mathrm{Vect}(v_0, \ldots, v_n) = \mathrm{F}_n$, donc $y_{n+1} = \mathrm{P}_n v_{n+1} \ne v_{n+1}$; posons

$$f_{n+1} = \|v_{n+1} - y_{n+1}\|^{-1}(v_{n+1} - y_{n+1}).$$

Ce vecteur de norme 1 est orthogonal à F_n, donc à $f_0, \ldots, f_n$ ce qui montre que les vecteurs $f_0, \ldots, f_{n+1}$ sont orthonormés. Par ailleurs, $f_{n+1} \in \mathrm{F}_{n+1} = \mathrm{Vect}(v_0, \ldots, v_{n+1})$; les $n+2$ vecteurs $f_0, \ldots, f_{n+1}$ sont libres, et ils sont tous dans l'espace F_{n+1}, qui est de dimension $n+2$. Ils forment donc une base de F_{n+1}) et par conséquent

$$\mathrm{Vect}(v_0, \ldots, v_{n+1}) = \mathrm{Vect}(f_0, \ldots, f_{n+1}).$$

Définition : espaces séparables. Un espace métrique (X, d) est *séparable* s'il existe une suite $(x_n)_{n\ge 0}$ de points de X qui est dense dans X.

Il est clair que $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$ sont séparables. On peut montrer que l'espace $\mathrm{L}^2([a,b])$ est séparable.

Corollaire. *Si* H *est un espace de Hilbert de dimension infinie et séparable, il existe une base hilbertienne* $(e_n)_{n\ge 0}$ *pour* H*, indexée par l'ensemble* $\mathbb{N}$ *des entiers* ≥ 0*.*

Preuve. — Par définition il existe une suite dense (x_k) dans H ; on peut([d]) construire par récurrence une sous-suite $v_n = x_{k_n}$ formée de vecteurs indépendants et telle que $x_j \in \mathrm{Vect}(v_0, \ldots, v_n)$ pour tout $j \le k_n$. D'après Gram-Schmidt, il existe une suite orthonormée $(e_j)_{j\ge 0}$ telle que $\mathrm{Vect}(e_j, j \ge 0)$ contienne tous les $\mathrm{Vect}(v_0, \ldots, v_n)$ et en particulier tous les vecteurs $(x_k)_{k\ge 0}$. Il en résulte que $\mathrm{Vect}(e_j, j \ge 0)$ est dense dans H, donc $(e_j)_{j\ge 0}$ est une base hilbertienne, par définition.

Projection orthogonale

Lemme. *Soient* H *un espace de Hilbert sur* $\mathbb{K}$*,* F *un* $\mathbb{K}$*-sous-espace vectoriel de* H*,* $x \in \mathrm{H}$ *et* $y \in \mathrm{F}$ *; alors* $x - y$ *est orthogonal à* F *si et seulement si* y *est le point de* F *le plus proche de* x*,*

$$\|x - y\| = d(x, \mathrm{F}) = \min\{\|x - z\| : z \in \mathrm{F}\}.$$

Preuve. — Supposons d'abord que $x - y \perp \mathrm{F}$; pour tout vecteur $z \in \mathrm{F}$, on voit que $y - z \in \mathrm{F}$, donc $y - z$ est orthogonal à $x - y$ et

$$\|x - z\|^2 = \|(x - y) + (y - z)\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 \ge \|x - y\|^2,$$

donc y est le point de F le plus proche de x. Supposons inversement que y soit le point de F le plus proche de x ; si v est un vecteur de F, le vecteur $y + tv$ est dans F pour tout réel t, donc

$$\|x - (y + tv)\|^2 \ge \|x - y\|^2$$

pour tout t ; la fonction

$$t \to \|x - (y + tv)\|^2 = \|x - y\|^2 - 2t\,\mathrm{Re}\langle x - y, v\rangle + t^2\|v\|^2$$

atteint son minimum en $t = 0$, donc sa dérivée en $t = 0$ est nulle, ce qui donne

$$\mathrm{Re}\,\langle x - y, v\rangle = 0$$

pour tout vecteur $v \in \mathrm{F}$; ceci est suffisant quand $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, mais quand $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ il faut faire un pas de plus : comme F est alors un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de H, on peut choisir θ réel de façon que si $v_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\, v$, on ait $\langle x - y, v_1\rangle \in \mathbb{R}$. On a encore $v_1 \in \mathrm{F}$: la première partie du raisonnement montre que $\langle x - y, v_1\rangle = 0$, donc $\langle x - y, v\rangle = 0$, pour tout vecteur $v \in \mathrm{F}$, ce qui signifie que $x - y$ est orthogonal à F.

Notes

([a]) Pour chaque entier $n \ge 1$ soit φ_n la fonction qui vaut 0 en $x = 0$ et en $x = 2\pi$, qui vaut 1 sur l'intervalle $[1/n, 2\pi - 1/n]$, et qui est affine sur les deux intervalles $[0, 1/n]$ et $[2\pi - 1/n, 2\pi]$. Cette suite de fonctions positives tend simplement vers l'indicatrice de l'intervalle ouvert $]0, 2\pi[$, en restant majorée par 1. Si f est une fonction continue sur $[0, 2\pi]$, la suite $|f - f\varphi_n|^2$ tend presque partout vers 0 en restant majorée par la fonction $|f|^2$, qui est intégrable sur $[0, 2\pi]$; il en résulte par convergence dominée que f est limite dans L^2 de la suite des fonctions continues $f\varphi_n$, qui sont nulles en 0 et en 2π.

([b]) Considérons la fonction f sur un intervalle de deux périodes, par exemple $[0, 4\pi]$; sur ce compact, on sait que la fonction f est uniformément continue, donc il existe $\delta > 0$ tel que tel que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$ dès que $x, y \in [0, 4\pi]$ vérifient $|x - y| < \delta$; on peut choisir $\delta < 2\pi$; si x_1, y_1 sont deux points quelconques de $\mathbb{R}$ tels que $|x_1 - y_1| < \delta < 2\pi$, on peut toujours trouver un entier k tel que $x = x_1 - 2k\pi$ et $y = y_1 - 2k\pi$ soient tous les deux dans $[0, 4\pi]$: si $x_1 \le y_1$ par exemple, on choisit k tel que $x = x_1 - 2k\pi \in [0, 2\pi[$; alors si $y = y_1 - 2k\pi$, on a $0 \le y - x = y_1 - x_1 < 2\pi$ donc

$$0 \le x \le y \le x + 2\pi < 4\pi.$$

On aura $|x - y| = |x_1 - y_1| < \delta$, et $|f(x_1) - f(y_1)| = |f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$ par périodicité.

([c]) Il s'agit de voir qu'une fonction continue h nulle presque partout sur $[0, 2\pi]$ est en fait nulle *partout*. Si h n'est pas identiquement nulle, l'ensemble $\{x : h(x) \neq 0\}$ est un ouvert non vide, donc il contient un intervalle non vide $]a, b[$, avec $0 \le a < b \le 2\pi$. Mais cet intervalle est de mesure $(b - a)/(2\pi) > 0$: la fonction h est non nulle sur un ensemble de mesure > 0, ce qui contredit l'hypothèse.

Par le même type d'argument on montre que la norme uniforme $\|h\|_u$ d'une fonction h continue sur $[0, 2\pi]$ est égale à sa norme $\|h\|_\infty$ dans l'espace $\mathrm{L}^\infty([0, 2\pi])$ (la mesure étant la mesure de Lebesgue, ou un multiple non nul de la mesure de Lebesgue).

([d]) Puisque H est de dimension infinie, il existe au moins un vecteur $w \neq 0$ dans H, et puisque (x_k) est dense, il existe un entier k tel que $\|w - x_k\| < \frac{1}{2}\,\|w\|$, ce qui implique que x_k n'est pas nul. On définit k_0 comme le plus petit entier k tel que $x_k \neq 0$ et on pose $v_0 = x_{k_0}$.

Si $k_0, \ldots, k_{n-1}$ ont été définis et si on a posé $v_j = x_{k_j}$ pour $0 \le j < n$, on dit que H, qui est de dimension infinie, ne peut être égal à $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(v_0, \ldots, v_{n-1})$; le sous-espace F est complet (à cause de sa dimension finie), donc fermé dans H. Si w est un vecteur de H qui n'est pas dans le fermé F, on peut trouver une boule ouverte B qui contient w et ne rencontre pas F ; comme (x_k) est dense, il existe des vecteurs x_k qui sont dans B, donc pas dans F. On peut alors définir k_n comme le plus petit entier k tel que $x_k \notin \mathrm{F}$ et on pose $v_n = x_{k_n}$.

Pour tous les entiers $j < k_n$ on a $x_j \in \mathrm{F} \subset \mathrm{Vect}(v_0, \ldots, v_n)$, et pour $j = k_n$ on a aussi $x_{k_n} = v_n \in \mathrm{Vect}(v_0, \ldots, v_n)$. Les vecteurs (v_n) sont indépendants puisque $v_0 \neq 0$ et $v_n \notin \mathrm{Vect}(v_0, \ldots, v_{n-1})$, pour tout $n \ge 1$.