Projections, décompositions

Rappel, projection sur un convexe fermé C : pour tout point $x \in \mathrm{H}$ il existe un point y de C qui est le point de C le plus proche de x ; ce point y est unique.

Rappel, projection sur un sev fermé : la projection orthogonale $y = \mathrm{P_F} x$ d'un élément $x \in \mathrm{H}$ sur le sous-espace fermé F de H est caractérisée par

$$y \in \mathrm{F} \quad \text{et} \quad x - y \perp \mathrm{F}.$$

Lemme. *Soit* H *un espace de Hilbert ; on suppose que l'espace* H *est égal à la somme vectorielle* $\mathrm{F} + \mathrm{G}$*, où* F *et* G *sont deux sous-espaces vectoriels orthogonaux (tout vecteur* $f \in \mathrm{F}$ *est orthogonal à tout vecteur* $g \in \mathrm{G}$*) ; alors* H *admet la décomposition en somme directe*

$$\mathrm{H} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G},$$

on a $\mathrm{G} = \mathrm{F}^\perp$, $\mathrm{F} = \mathrm{G}^\perp$*, les sous-espaces* F *et* G *sont fermés, les deux projections* $f + g \to f \in \mathrm{F}$ *et* $f + g \to g \in \mathrm{G}$ *de la somme directe sont les projections orthogonales de* H *sur* F *et* G *respectivement.*

Preuve. — Pour commencer, si $x \in \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$, alors x élément de F est orthogonal à lui-même, élément de G, donc $x = 0$; puisque $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0\}$ et $\mathrm{H} = \mathrm{F} + \mathrm{G}$, l'espace H est somme directe de F et G. Par hypothèse on a $\mathrm{G} \subset \mathrm{F}^\perp$; inversement, si $v \in \mathrm{H}$ est orthogonal à F, écrivons $v = f + g$, avec $f \in \mathrm{F}$ et $g \in \mathrm{G}$; on a

$$0 = \langle v, f \rangle = \langle f + g, f \rangle = \langle f, f \rangle + \langle f, g \rangle = \langle f, f \rangle,$$

ce qui montre que $f = 0$, donc $v = g$ est dans G et on a montré que $\mathrm{G} = \mathrm{F}^\perp$. On montre de la même façon que $\mathrm{F} = \mathrm{G}^\perp$, et il en résulte que F et G sont fermés.

Si $x = f + g$, avec $f \in \mathrm{F}$ et $g \in \mathrm{G}$, le vecteur f est dans F, et $x - f = g$ est orthogonal à F, donc f est la projection orthogonale de x sur F. De même, g est la projection orthogonale de x sur G.

Théorème. *Soit* F *un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert* H *; l'espace* H *admet la décomposition en somme directe orthogonale*

$$\mathrm{H} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^\perp.$$

Les deux projecteurs de la somme directe sont les projections orthogonales sur les sous-espaces F *et* $\mathrm{F}^\perp$*. On a de plus*

$$(\mathrm{F}^\perp)^\perp = \mathrm{F}.$$

Preuve. — Pour tout $x \in \mathrm{H}$ on a

$$x = \mathrm{P_F}(x) + (x - \mathrm{P_F}(x))$$

avec $\mathrm{P_F} x \in \mathrm{F}$ et $x - \mathrm{P_F} x \perp \mathrm{F}$; ceci montre que $\mathrm{H} = \mathrm{F} + \mathrm{F}^\perp$. D'après le lemme précédent, l'espace H est somme directe des deux sous-espaces vectoriels orthogonaux F et $\mathrm{G} = \mathrm{F}^\perp$, les deux projections de la somme directe sont les projections orthogonales sur les facteurs, et de plus F est l'orthogonal de $\mathrm{G} = \mathrm{F}^\perp$.

On notera que la projection orthogonale sur $\mathrm{F}^\perp$ est égale à $\mathrm{Id} - \mathrm{P_F}$.

Dual d'un espace de Hilbert H

On a vu que pour tout vecteur $v \in \mathrm{H}$, l'application $\ell_v : x \in \mathrm{H} \to \langle x, v\rangle$ est une forme linéaire continue sur H. On va voir une réciproque.

Théorème. *Toute forme linéaire continue ℓ sur un espace de Hilbert* H *est de la forme $\ell = \ell_v$ pour un certain vecteur $v \in \mathrm{H}$, c'est-à-dire que*

$$\forall x \in \mathrm{H}, \quad \ell(x) = \langle x, v\rangle\,;$$

ce vecteur v est unique.

En d'autres termes, l'application $v \to \ell_v$ est une bijection de l'espace de Hilbert H sur son dual topologique([a]) H′. *Attention !* cette application n'est pas linéaire dans le cas complexe, car l'image du vecteur $\lambda\, v$ est la forme linéaire $\overline{\lambda}\,\ell_v$. On dit qu'une telle application f de H dans un autre $\mathbb{K}$-espace vectoriel, qui vérifie $f(\lambda v + w) = \overline{\lambda}\, f(v) + f(w)$ pour tout scalaire λ et tous vecteurs $v, w \in \mathrm{H}$, est une *application antilinéaire*.

Preuve du théorème.— Si ℓ est nulle, il suffit de prendre $v = 0$. Si ℓ est non nulle, le noyau $\mathrm{F} = \ker \ell$ est un sous-espace vectoriel fermé de H, différent de H, et on peut donc trouver un vecteur $w \in \mathrm{H}$ de norme 1 orthogonal à F ; puisque $w \notin \ker \ell = \mathrm{F}$, on a $\ell(w) \neq 0$. Posons $w_1 = \ell(w)^{-1}\, w$, de sorte que $\ell(w_1) = \ell(w)^{-1}\,\ell(w) = 1$. Pour tout vecteur $x \in \mathrm{H}$, l'égalité

$$x = \bigl(x - \ell(x)\, w_1\bigr) + \ell(x)\, w_1$$

fournit une décomposition de x comme élément de $\mathrm{F} \oplus \mathbb{K}w$; en effet, si $y = x - \ell(x)\, w_1$, alors $\ell(y) = \ell(x) - \ell(x)\,\ell(w_1) = 0$; puisque $y \in \ker \ell = \mathrm{F}$, le vecteur y est orthogonal à w et

$$\langle x, w\rangle = \langle y + \ell(x)\, w_1, w\rangle = \langle y, w\rangle + \ell(x)\,\langle w_1, w\rangle = \frac{\ell(x)}{\ell(w)}\,\langle w, w\rangle = \frac{\ell(x)}{\ell(w)}.$$

On vient ainsi de montrer que

$$\ell(x) = \ell(w)\,\langle x, w\rangle = \langle x, \overline{\ell(w)}\, w\rangle$$

pour tout $x \in \mathrm{H}$. On voit donc que la forme linéaire ℓ est *représentée* par le produit scalaire avec le vecteur $v = \overline{\ell(w)}\, w$.

Montrons l'unicité : si v_1 et v_2 étaient deux vecteurs de H tels que $\ell_{v_1} = \ell_{v_2}$, on aurait $\langle x, v_1\rangle = \ell(x) = \langle x, v_2\rangle$ pour tout vecteur x, donc $\langle x, v_1 - v_2\rangle = 0$; en appliquant ceci à $x = v_1 - v_2$, on déduit que $v_1 - v_2 = 0$.

Exercice. On dit qu'une fonction réelle ou complexe φ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est C-*lipschitzienne* si pour tous $x, y \in \mathrm{I}$ on a

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \le \mathrm{C}\,|x - y|.$$

Avec une fonction 1-lipschitzienne φ sur $[0, 1]$ on va fabriquer une forme linéaire ℓ continue sur $\mathrm{L}^2([0,1])$; on définit d'abord ℓ sur les fonctions en escalier de la façon suivante : si $h = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \mathbf{1}_{[x_j, x_{j+1}[}$, où $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$, on pose

$$\ell(h) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j\bigl(\varphi(x_{j+1}) - \varphi(x_j)\bigr).$$

On a

$$|\ell(h)| \le \sum_{j=0}^{n-1} |c_j| \big|\varphi(x_{j+1}) - \varphi(x_j)\big| \le \sum_{j=0}^{n-1} |c_j| \, (x_{j+1} - x_j) = \|h\|_1 \le \|h\|_2.$$

Ceci permet de prolonger la définition de ℓ par continuité à l'espace $\mathrm{L}^2(0,1)$. La représentation de ℓ par produit scalaire donne une fonction $f \in \mathrm{L}^2(0,1)$ telle que

$$\varphi(x) - \varphi(0) = \ell(\mathbf{1}_{[0,x[}) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

pour tout $x \in [0,1]$; on peut ensuite montrer que f est dans $\mathrm{L}^\infty(0,1)$: *toute fonction lipschitzienne est la «primitive» d'une fonction mesurable bornée* (et inversement, évidemment). Le théorème de représentation du dual de L^2 a permis de faire apparaître une fonction f qui n'était pas du tout visible au départ !

Expression du produit scalaire dans une base hilbertienne

Si $(e_n)_{n\ge 0}$ est une base hilbertienne d'un espace de Hilbert H, si $x, y \in \mathrm{H}$, le vecteur x est limite dans H de la suite

$$x_{\mathrm{N}} = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \langle x, e_k\rangle \, e_k \,;$$

puisque la forme linéaire ℓ_y est continue sur H, on obtient

$$\langle x, y\rangle = \lim_{\mathrm{N}} \langle x_{\mathrm{N}}, y\rangle = \lim_{\mathrm{N}} \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \langle x, e_k\rangle \, \langle e_k, y\rangle = \lim_{\mathrm{N}} \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \langle x, e_k\rangle \, \overline{\langle y, e_k\rangle}$$

c'est-à-dire que

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} \langle x, e_k\rangle \, \overline{\langle y, e_k\rangle}.$$

Séries de Fourier

On munira les intervalles de longueur 2π de la mesure $dx/(2\pi)$; dans ce chapitre, on utilisera toujours cette mesure pour définir les normes L^p, le produit scalaire et la convolution périodique par les formules

$$\Big(\int_a^{a+2\pi} |f(x)|^p \, \frac{\mathrm{d}x}{2\pi}\Big)^{1/p}, \quad \int_a^{a+2\pi} f(x)\overline{g(x)} \, \frac{\mathrm{d}x}{2\pi}, \quad \int_a^{a+2\pi} f(y-x) g(x) \, \frac{\mathrm{d}x}{2\pi}.$$

On introduit les fonctions $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définies par $e_n(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$. Lorsque $f \in \mathrm{L}^1([0,2\pi])$, on peut considérer les coefficients de Fourier de f, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n(f) = \int_0^{2\pi} f(x) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx} \, \frac{\mathrm{d}x}{2\pi},$$

et les sommes de Fourier

$$\mathrm{S}_n f = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e_k.$$

Quand $f \in \mathrm{L}^2([0, 2\pi])$, on peut écrire aussi

$$c_n(f) = \langle f, e_n \rangle, \quad \mathrm{S}_n f = \sum_{k=-n}^{n} \langle f, e_k \rangle \, e_k,$$

et on voit ainsi que $\mathrm{S}_n f$ est la projection orthogonale de f sur $\mathrm{Vect}(e_k : |k| \le n)$. On a vu que les fonctions $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\, nx})_{n \in \mathbb{Z}}$ forment une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2([0, 2\pi])$; on en déduit que

$$\|f - \mathrm{S}_n f\|_2^2 = \int_0^{2\pi} \Big| f(x) - (\mathrm{S}_n f)(x) \Big|^2 \, \frac{\mathrm{d}x}{2\pi}$$

tend vers 0 quand $n \to +\infty$, c'est-à-dire qu'on a une représentation de toute fonction $f \in \mathrm{L}^2([0, 2\pi])$ par sa série de Fourier

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, e_n \rangle \, e_n,$$

la somme de la série étant prise au sens de l'espace L^2.

Exercice. La fonction de Bessel J_0, qui est définie par la formule

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{J}_0(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, x \sin\theta} \, \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}$$

est développable en série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$, on va trouver les coefficients (c_n) de cette série entière. Pour x fixé considérons la fonction f_x définie par

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad f_x(\theta) = \exp\Big(\frac{x}{2} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} \Big).$$

On voit que

$$\overline{f_{-x}(\theta)} = \overline{\exp\big(-\frac{x}{2} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\big)} = \exp\big(-\frac{x}{2} \, \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}}\big) = \exp\big(-\frac{x}{2} \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}\big)$$

donc $f_x(\theta) \overline{f_{-x}(\theta)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, x \sin\theta}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{J}_0(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f_x(\theta) \overline{f_{-x}(\theta)} \, \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} = \langle f_x, f_{-x} \rangle.$$

En développant l'exponentielle dans f_x, on voit que

$$f_x(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n n!} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, n\theta} .$$

La série converge normalement, donc uniformément, donc en norme L^2, ce qui montre que le développement ci-dessus est le développement de Fourier de f_x,

$$c_n(f_x) = \langle f_x, e_n \rangle = \frac{x^n}{2^n n!}$$

pour tout $n \ge 0$, et $c_n(f_x) = 0$ pour $n < 0$. Alors

$$\mathrm{J}_0(x) = \langle f_x, f_{-x} \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(f_x) \, \overline{c_n(f_{-x})} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n n!} \frac{(-x)^n}{2^n n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2}.$$

On va s'intéresser à des aspects de convergence ponctuelle de la série de Fourier d'une fonction f : la question de base est de savoir si en un point x donné, la série de Fourier $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ converge, et si la somme de la série est bien égale à la valeur $f(x)$.

Un premier cas : fonction de classe C^1

Proposition. *Si f est une fonction continue 2π-périodique et si*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| < +\infty$$

alors $f(x)$ est égal pour tout x à la somme de la série de Fourier,

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}.$$

Preuve. — La série de Fourier de f

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$$

est normalement convergente vers une fonction continue g, et convergente dans $\mathrm{L}^2([0,2\pi])$ vers la fonction f. Il en résulte que $g = f$ partout, par un argument qui a déjà été utilisé plusieurs fois (par exemple : cours n° 2, Note ($^{\mathbf{c}}$), et cours n° 6, Note ($^{\mathbf{c}}$) pour une autre partie de l'argument).

Théorème. *Soit f continue 2π-périodique, et continûment dérivable sur une période $[a, a+2\pi]$; alors $f(x)$ est égal pour tout x à la somme de la série de Fourier,*

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}.$$

Preuve. — Posons $g(t) = f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}$ pour un $n\in\mathbb{Z}$ quelconque ; on voit que g est 2π-périodique, continûment dérivable sur $[a, a+2\pi]$, donc

$$0 = \frac{g(a+2\pi)-g(a)}{2\pi} = \int_a^{a+2\pi} g'(t)\,\frac{\mathrm{d}t}{2\pi} = \int_a^{a+2\pi} \bigl(f'(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} - \mathrm{i}nf(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\bigr)\,\frac{\mathrm{d}t}{2\pi}$$

et on a par conséquent

$$\forall n\in\mathbb{Z},\quad c_n(f') = \mathrm{i}n\,c_n(f).$$

La fonction f' est bornée, donc de carré intégrable sur chaque période. Il en résulte que $\sum |c_n(f')|^2 < +\infty$, et par Cauchy-Schwarz

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| \le |c_0(f)| + \Bigl(2\sum_{n\ge 1}\frac{1}{n^2}\Bigr)^{1/2}\Bigl(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f')|^2\Bigr)^{1/2} < +\infty.$$

Il suffit maintenant d'appliquer la proposition précédente.

Exemple

Pour chaque x fixé, considérons la fonction g_x définie par

$$\forall\theta \in \mathbb{R}, \quad g_x(\theta) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x\sin\theta}\,.$$

Il est clair que cette fonction g_x est 2π-périodique, de classe C^1 (en fait de classe C^∞), donc ses coefficients de Fourier sont absolument sommables et $g_x(\theta)$ est la somme de la série de Fourier. Le coefficient d'indice 0 est

$$c_0(g_x) = \langle g_x, e_0\rangle = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x\sin\theta}\,\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} = \mathrm{J}_0(x)\,;$$

la valeur $\mathrm{J}_0(x)$ apparaît donc comme le coefficient de Fourier c_0 (coefficient d'indice 0) de la fonction 2π-périodique g_x ; on peut définir les autres fonctions de Bessel (J_n) d'indice entier $n \in \mathbb{Z}$ en considérant tous les coefficients de Fourier de la fonction g_x précédente,

$$\mathrm{J}_n(x) = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x\sin\theta - \mathrm{i}\,n\theta}\,\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} = c_n(g_x).$$

Il est facile de montrer que J_n est, comme J_0, la somme d'une série entière. Comme la fonction g_x est de classe C^1 on sait que son développement de Fourier est absolument convergent,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(g_x)| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\mathrm{J}_n(x)| < +\infty,$$

et on a pour tout x et tout θ

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x\sin\theta} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{J}_n(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n\theta}\,.$$

Bessel et FM

En modulation de fréquence, le signal $s_m(t)$ (musical par exemple ; on le supposera à valeurs réelles) qu'on veut transmettre est d'abord intégré (à partir d'une certaine origine de temps)

$$\mathrm{S}_m(t) = \int_0^t s_m(u)\,\mathrm{d}u$$

et il est transmis en modifiant un signal porteur $s_p(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_p t}$ de la façon suivante : c'est la *fréquence* du signal porteur qui est modifiée, en introduisant le signal *modulé en fréquence*

$$(*) \qquad t \to \exp\bigl(\mathrm{i}\omega_p t + \mathrm{i}\kappa\,\mathrm{S}_m(t)\bigr),$$

où κ est un coefficient convenablement choisi. Cette expression est en général très difficile à étudier mathématiquement. Examinons un cas très particulier, celui d'une émission musicale assez ennuyeuse qui transmettrait un son constant,

$$s_m : t \to \cos(\omega_m t)$$

où ω_m correspond à la fréquence du son musical, très inférieure à la fréquence $\omega_p/(2\pi)$ de la porteuse (par exemple : $\omega_m/(2\pi) = 440\,\mathrm{Hz}$, $\omega_p/(2\pi) = 101.1\,\mathrm{MHz}$). Dans ce cas on a $\mathrm{S}_m(t) = \omega_m^{-1}\sin(\omega_m t)$ et on obtient pour le signal $(*)$ l'expression

$$t \to \exp\bigl(\mathrm{i}\omega_p t + \mathrm{i}k\,\sin(\omega_m t)\bigr) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_p t}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\,\sin(\omega_m t)},$$

où $k = \kappa\,\omega_m^{-1}$. On reconnaît l'expression qu'on a développée avec les fonctions de Bessel,

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_p t}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{J}_n(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega_m t} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{J}_n(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_p+n\omega_m)t}\,.$$

On voit que le signal total occupe les fréquences $(\omega_p + n\,\omega_m)/(2\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$; dans la pratique, il est important de pouvoir limiter les valeurs de n vraiment utilisées, pour rester à l'intérieur de la plage de fréquences attribuée à la station !

Revenons sur le terme « modulation de fréquence ». Dans l'équation de la porteuse, l'expression est $\mathrm{e}^{\mathrm{i}f(t)}$ avec $f(t) = \omega_p t$ et on obtient la pulsation ω_p en dérivant f,

$$f'(t) = \omega_p.$$

Dans l'équation du signal $(*)$, on a

$$f(t) = \omega_p t + k\,\sin(\omega_m t)$$

dont la dérivée est

$$f'(t) = \omega_p + \kappa\,\cos(\omega_m t)\,;$$

cette expression représente la *pulsation instantanée* : si on découpe un intervalle de temps d'une seconde en dix mille fractions d'un dix millième de seconde, le nombre des oscillations du signal $(*)$ n'est pas le même sur tous les petits intervalles de temps ; dans certains de ces petits intervalles I, on aura $\cos(\omega_m t) \simeq 1$ pour tout $t \in \mathrm{I}$, alors que $\cos(\omega_m t) \simeq -1$ pour d'autres intervalles ; on peut dire que la « fréquence varie » entre les valeurs $(\omega_p + \kappa)/(2\pi)$ et $(\omega_p - \kappa)/(2\pi)$: la fréquence est « modulée », et on retrouve l'information musicale ω_m en examinant la rapidité de la variation de la fréquence.

Notes

([a]) Le *dual topologique* E' d'un espace normé E est l'espace vectoriel des formes linéaires *continues* sur E. Il est normé de la façon suivante : si ℓ est une forme linéaire continue sur E, on pose

$$\|\ell\| = \sup\{|\ell(x)| : x \in \mathrm{E},\ \|x\| \le 1\}.$$

Muni de cette norme, l'espace E' est complet.