Séries de Fourier 2

Exercice. On a introduit les fonctions de Bessel (J_n) en disant que $\mathrm{J}_n(x)$ est le coefficient de Fourier d'indice n de la fonction 2π-périodique $g_x : \theta \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x \sin\theta}$. On va calculer

$$\mathrm{J}_1(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x\sin(\theta)}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}\,\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}.$$

On rappelle le calcul du produit scalaire dans une base orthonormée : si v, w sont deux vecteurs d'un espace de Hilbert qui a une base hilbertienne $(e_n)_{n\geq 0}$, on a

$$\langle v, w\rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} \langle v, e_k\rangle\,\overline{\langle w, e_k\rangle}.$$

Ici on utilisera la base hilbertienne $e_n(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nx}$, $n \in \mathbb{Z}$. Pour x fixé on a considéré la fonction f_x définie par

$$f_x(\theta) = \exp\Bigl(\frac{x}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\Bigr),$$

et on a vu que $f_x(\theta)\overline{f_{-x}(\theta)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x\sin\theta}$; on a donc

$$\mathrm{J}_1(x) = \langle g_x, e_1\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f_x(\theta)\overline{f_{-x}(\theta)\,e_1(x)}\,\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} = \langle f_x\,e_{-1}, f_{-x}\rangle.$$

En développant l'exponentielle dans f_x, on voit que

$$f_x(\theta)\,e_{-1}(\theta) = \Bigl(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n n!}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n\theta}\Bigr)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta} = \sum_{m=-1}^{+\infty} \frac{x^{m+1}}{2^{m+1}(m+1)!}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,m\theta}\,.$$

On voit donc que les coefficients de Fourier de $f_x\,e_{-1}$ sont égaux à

$$c_m(f_x\,e_{-1}) = \frac{x^{m+1}}{2^{m+1}(m+1)!}\quad\text{pour}\quad m \geq -1,$$

et $c_m(f_x\,e_{-1}) = 0$ pour tout $m < -1$; de même

$$c_m(f_{-x}) = \frac{(-x)^m}{2^m m!}\quad\text{pour}\quad m \geq 0,$$

et $c_m(f_x) = 0$ pour $m < 0$, donc

$$\mathrm{J}_1(x) = \langle f_x\,e_{-1}, f_{-x}\rangle = \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m(f_x\,e_{-1})\,\overline{c_m(f_{-x})} = \sum_{m\geq 0} c_m(f_x\,e_{-1})\,\overline{c_m(f_{-x})}$$

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{x^{m+1}}{2^{m+1}(m+1)!}\,\frac{(-x)^m}{2^m m!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2^{2n+1} n!(n+1)!}.$$

On trouve en fait pour tout $k \geq 0$

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \mathrm{J}_k(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+k}}{2^{2n+k} n!(n+k)!}.$$

Rappel : Riemann-Lebesgue appliqué à une fonction 2π-périodique. On sait que $\widehat{g}(y)$ tend vers 0 lorsque $|y| \to +\infty$, pour toute fonction g intégrable sur $\mathbb{R}$. Si f est une fonction intégrable sur $[0, 2\pi]$ et si g est la fonction sur $\mathbb{R}$ qui est égale à f dans $[0, 2\pi]$ et qui est nulle en dehors de $[0, 2\pi]$, on voit que pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$\widehat{g}(n) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xn}\, \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xn}\, \mathrm{d}x = 2\pi\, c_n(f)\,;$$

il en résulte que $\lim c_n(f) = 0$ lorsque $|n| \to +\infty$.

Théorème 1. *Soient f une fonction 2π-périodique mesurable, ℓ une valeur scalaire et x_0 un point tels que*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Bigl| \frac{f(x_0 - t) - \ell}{t} \Bigr|\, \mathrm{d}t < +\infty\,;$$

alors la série de Fourier de f converge au point x_0 et

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx_0} = \ell.$$

Preuve. — On peut remarquer que f est intégrable sur la période $[x_0 - \pi, x_0 + \pi]$, puisque

$$|f(x_0 - t) - \ell| \le \pi \Bigl| \frac{f(x_0 - t) - \ell}{t} \Bigr|$$

lorsque $|t| \le \pi$, ce qui permet de considérer ses coefficients de Fourier $c_n(f)$. On a pour tous les entiers $m, n \ge 0$

$$\sum_{k=-m}^{n} c_k(f)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx_0} = \sum_{k=-m}^{n} \Bigl(\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ks}\, \frac{\mathrm{d}s}{2\pi} \Bigr)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx_0}$$

$$= \sum_{k=-m}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} f(s)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x_0 - s)}\, \frac{\mathrm{d}s}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} \Bigl(\sum_{k=-m}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} \Bigr) f(x_0 - t)\, \frac{\mathrm{d}t}{2\pi}\ ;$$

comme l'entier $k = 0$ est entre $-m$ et n on a aussi

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Bigl(\sum_{k=-m}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} \Bigr) \frac{\mathrm{d}t}{2\pi} = \sum_{k=-m}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\, \frac{\mathrm{d}t}{2\pi} = 1.$$

Il en résulte que

$$(1) \qquad \Bigl(\sum_{k=-m}^{n} c_k(f)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx_0} \Bigr) - \ell = \int_{-\pi}^{\pi} \Bigl(\sum_{k=-m}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} \Bigr) \bigl(f(x_0 - t) - \ell \bigr)\, \frac{\mathrm{d}t}{2\pi}.$$

Un calcul de somme de progression géométrique donne

$$\sum_{k=-m}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}mt} \sum_{p=0}^{n+m} \mathrm{e}^{\mathrm{i}pt} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}mt}\, \frac{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+m+1)t}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}mt} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}.$$

Introduisons la fonction périodique g définie pour $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$ par

$$g(t) = \frac{f(x_0 - t) - \ell}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}} \;;$$

quand $|t| \le \pi$, on a([a])

$$|1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}\,| = 2\,|\sin(t/2)| \ge \frac{2\,|t|}{\pi},$$

ce qui montre que l'hypothèse du théorème implique que g est intégrable sur $[-\pi, \pi]$. L'équation (1) devient

$$\Bigl(\sum_{k=-m}^{n} c_k(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx_0}\Bigr) - \ell = \int_{-\pi}^{\pi} \bigl(\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}mt} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(n+1)t}\bigr)\,\frac{f(x_0 - t) - \ell}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\,\frac{\mathrm{d}t}{2\pi} = c_m(g) - c_{-n-1}(g).$$

Comme la fonction $t \to g(t)$ est intégrable sur $[-\pi, \pi]$, ses coefficients de Fourier tendent vers 0 d'après Riemann-Lebesgue. Si on fait tendre n tout seul vers $+\infty$, en gardant par exemple $m = 0$, on constate que

$$\Bigl(\sum_{k=0}^{n} c_k(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx_0}\Bigr) - \ell$$

tend vers $c_0(g)$, ce qui montre que la partie positive de la série de Fourier de f au point x_0 converge ; on voit de même que la partie négative converge, et quand on fait tendre m et n vers $+\infty$ on obtient le résultat annoncé,

$$\ell = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx_0}\,.$$

Exemple. Soit f la fonction impaire 2π-périodique définie par $f(x) = 1 - x/\pi$ lorsque $0 < x \le \pi$; pour tout point x tel que $0 < x < \pi$, on a

$$(*) \qquad 1 - \frac{x}{\pi} = f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}.$$

On va appliquer le théorème 1 avec $x_0 = x$ et $\ell = f(x)$. Si t est assez petit pour que $0 < x \pm t < \pi$, c'est-à-dire si $|t| < \min(x, \pi - x)$,

$$|f(x+t) - f(x)| = \bigl|\bigl(1 - (x+t)/\pi\bigr) - \bigl(1 - x/\pi\bigr)\bigr| = |t|/\pi\,;$$

il en résulte que la fonction $t \to (f(x+t) - f(x))/t$ est bornée, donc intégrable, et le théorème précédent s'applique : on a donc

$$(**) \qquad 1 - \frac{x}{\pi} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\,.$$

Puisque f est impaire, $c_0(f) = 0$ et pour $n \ne 0$

$$2\pi\,c_n(f) = -\mathrm{i}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = -2\mathrm{i}\int_0^{\pi} (1 - t/\pi)\sin(nt)\mathrm{d}t\,;$$

par intégration par parties

$$\pi\, c_n(f) = \mathrm{i}\Big(\Big[(1-t/\pi)\frac{\cos(nt)}{n}\Big]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos(nt)}{\pi n}\,\mathrm{d}t\Big) = -\frac{\mathrm{i}}{n}\cdot$$

En regroupant $n>0$ et $-n$,

$$c_n(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} + c_{-n}(f)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx} = \frac{-\mathrm{i}}{n\pi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} + \frac{\mathrm{i}}{n\pi}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx} = \frac{2}{n\pi}\sin(nx).$$

On voit donc que la série de Fourier complexe de $(**)$ se transforme en la relation $(*)$. En intégrant la relation $(*)$ en prenant les primitives nulles en 0 on obtient pour $0 \le x \le \pi$

$$x - \frac{x^2}{2\pi} = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-\cos(nx)}{n^2}\cdot$$

La valeur en $x=\pi$ permet de retrouver la relation $\sum n^{-2} = \pi^2/6$, d'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6}\cdot$$

En continuant d'intégrer, on peut trouver les valeurs de $\sum n^{-4}$, $\sum n^{-6}$, $\sum n^{-8}$, etc., qui sont des valeurs particulières de la *fonction zeta de Riemann*

$$\forall s>1, \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}\cdot$$

Corollaire 1. *Soit f une fonction 2π-périodique et lipschitzienne ; en tout point x_0, la série de Fourier de f converge et*([b])

$$f(x_0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx_0}\,.$$

Preuve. — On applique le théorème précédent avec $\ell = f(x_0)$. Puisque la fonction f est lipschitzienne, il existe une constante C telle que $|f(x_0-t)-f(x_0)| \le \mathrm{C}\,|t|$, donc

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Big|\frac{f(x_0-t)-\ell}{t}\Big|\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \Big|\frac{f(x_0-t)-f(x_0)}{t}\Big|\,\mathrm{d}t \le \mathrm{C}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}t < +\infty\,;$$

le résultat du corollaire 1 est donc obtenu en appliquant le théorème précédent.

On définit les *sommes de Fourier* d'une fonction 2π-périodique f, intégrable sur chaque période, en procédant à la sommation de façon symétrique :

$$(\mathrm{S}_n f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,.$$

Corollaire 2 (théorème de Dirichlet-Dini). *Soient f une fonction 2π-périodique mesurable, ℓ_+, ℓ_- deux valeurs scalaires et x_0 un point tels que*

$$\int_0^\pi \frac{|f(x_0-t)-\ell_-|}{t}\,\mathrm{d}t + \int_0^\pi \frac{|f(x_0+t)-\ell_+|}{t}\,\mathrm{d}t < +\infty\,;$$

alors les sommes de Fourier de f au point x_0 convergent et

$$\lim_n\, (\mathrm{S}_n f)(x_0) = \frac{\ell_+ + \ell_-}{2}\cdot$$

Preuve. — Pour simplifier, prenons $x_0 = 0$ et introduisons la fonction $\mathrm{F}(t) = f(-t)+f(t)$, qui est 2π-périodique sur $\mathbb{R}$. Cette fonction F est paire et elle vérifie l'hypothèse du théorème précédent au point 0, avec la valeur $\ell = \ell_+ + \ell_-$: l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Bigl|\frac{\mathrm{F}(t)-\ell}{t}\Bigr|\,\mathrm{d}t = 2\int_0^\pi \frac{|\mathrm{F}(t)-\ell|}{t}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^\pi \frac{|f(-t)+f(t)-\ell_- - \ell_+|}{t}\,\mathrm{d}t$$

$$\le 2\int_0^\pi \frac{|f(-t)-\ell_-|}{t}\,\mathrm{d}t + 2\int_0^\pi \frac{|f(t)-\ell_+|}{t}\,\mathrm{d}t < +\infty$$

est finie par hypothèse, donc la série de Fourier de F au point 0 converge vers ℓ d'après le théorème 1. Mais

$$c_k(\mathrm{F}) = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{F}(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\frac{\mathrm{d}t}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} f(-t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\frac{\mathrm{d}t}{2\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\frac{\mathrm{d}t}{2\pi}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(u)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}ku}\,\frac{\mathrm{d}u}{2\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} f(u)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ku}\,\frac{\mathrm{d}u}{2\pi} = c_k(f) + c_{-k}(f).$$

En faisant la somme de $k=-n$ à n, chaque terme $c_k(f)$ sera sommé deux fois, donc

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k(\mathrm{F}) = 2\,(\mathrm{S}_n f)(0)$$

qui converge vers ℓ quand $n \to +\infty$, d'après le théorème 1.

Noyaux de Dirichlet, de Fejér

Si on note $e_n(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$, on voit que la convolution périodique avec la fonction e_n d'une fonction 2π-périodique f, intégrable sur chaque période, est égale à

$$(f * e_n)(x) = \int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n(x-t)}\ \frac{\mathrm{d}t}{2\pi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} \int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\ \frac{\mathrm{d}t}{2\pi} = c_n(f)\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx},$$

ce qui montre que $f * e_n = c_n(f)\, e_n$; par conséquent, la somme $\mathrm{S}_n f = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\, e_k$ est obtenue par convolution de f avec la fonction

$$\mathrm{D}_n = \sum_{k=-n}^{n} e_k.$$

Cette fonction D_n est appelée *noyau de Dirichlet*. Il est clair que

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{D}_n(x)\,\frac{\mathrm{d}x}{2\pi} = 1$$

puisque les e_k sont d'intégrale nulle pour tout $k \neq 0$, alors que la fonction $e_0 = \mathbf{1}$ donne la valeur 1. Calculons explicitement la valeur de $\mathrm{D}_n(x)$

$$2\mathrm{i}\ \sin(x/2)\,\mathrm{D}_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \bigl(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+\frac12)\,x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-\frac12)\,x}\bigr) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+\frac12)\,x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n+\frac12)\,x}$$

donc

$$\mathrm{D}_n(x) = \frac{\sin\bigl[(n+\frac12)\,x\bigr]}{\sin(x/2)}.$$

Noyau de Fejér

On pose

$$\mathrm{K}_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \mathrm{D}_k\ ;$$

comme l'intégrale de chaque D_k est égale à 1, il en résulte que

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{K}_n(x)\,\frac{\mathrm{d}x}{2\pi} = 1.$$

On va calculer K_n avec une somme de sinus :

$$(n+1)\mathrm{K}_n(x)\ \sin(x/2) = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx + x/2)$$

$$= \mathrm{Im}\Bigl(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx+x/2)}\Bigr) = \mathrm{Im}\Bigl(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x/2}\ \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x} - 1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - 1}\Bigr) = \mathrm{Im}\Bigl(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x} - 1}{2\mathrm{i}\sin(x/2)}\Bigr)$$

$$= \mathrm{Re}\Big(\frac{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(n+1)x}}{2\sin(x/2)} \Big) = \frac{1-\cos(nx+x)}{2\sin(x/2)} = \frac{\sin^2(nx/2+x/2)}{\sin(x/2)}.$$

On obtient ainsi

$$\mathrm{K}_n(x) = \frac{1}{n+1} \frac{\sin^2\big[\frac{n+1}{2}\,x\big]}{\sin^2(x/2)}.$$

On remarque que K_n est une fonction positive, donc la norme L^1 de K_n est égale à son intégrale, $\|\mathrm{K}_n\|_1 = 1$. On appelle *somme de Fejér* de la fonction f l'expression

$$\sigma_n f = \mathrm{K}_n * f = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \mathrm{D}_k * f = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \mathrm{S}_k f\,;$$

ainsi, la somme de Fejér $\sigma_n f$ est la *moyenne* des sommes de Fourier $\mathrm{S}_k f$ de la fonction f, lorsque k varie de 0 à n. On verra la prochaine fois le théorème qui suit.

Théorème de Fejér. *Si f est continue 2π-périodique, les sommes de Fejér $(\sigma_n f)$ convergent uniformément vers f.*

Notes

([a]) La fonction sinus est concave sur l'intervalle $[0, \pi/2]$, puisque sa dérivée seconde $-\sin$ est négative ou nulle sur cet intervalle. Sur l'intervalle $[0, \pi/2]$, la fonction sin est donc au dessus de la fonction affine qui coïncide avec sin en 0 et $\pi/2$, à savoir

$$x \to \frac{2}{\pi}\, x\,;$$

on a donc $\sin(x) \ge 2x/\pi$ pour $0 \le x \le \pi/2$.

([b]) Pour faire fonctionner la démonstration qui suit, il suffirait que la fonction vérifie une *condition de Hölder* d'un ordre $\alpha > 0$, c'est-à-dire qu'il existe une constante C telle que

$$|f(x) - f(y)| \le \mathrm{C}\,|x-y|^\alpha$$

pour tous x, y. Néanmoins, une restriction plus forte que la seule continuité de f est nécessaire pour que le corollaire soit exact : il existe des fonctions continues telles qu'en certains points, la série de Fourier soit divergente.