Séries de Fourier 3

Rappel : noyau de Dirichlet

Si on note $e_n(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$, on a vu que la convolution périodique avec la fonction e_n d'une fonction 2π-périodique f, intégrable sur chaque période, est égale à

$$f * e_n = c_n(f)\, e_n\,;$$

par conséquent, la somme de Fourier $\mathrm{S}_n f = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\, e_k$ est obtenue par convolution de f avec le *noyau de Dirichlet*

$$\mathrm{D}_n = \sum_{k=-n}^{n} e_k.$$

Il est clair que

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{D}_n(x)\, \frac{\mathrm{d}x}{2\pi} = 1$$

puisque les e_k sont d'intégrale nulle pour tout $k \neq 0$, alors que la fonction $e_0 = \mathbf{1}$ donne la valeur 1. On a vu que

$$\mathrm{D}_n(x) = \frac{\sin\bigl[(n+\frac{1}{2})\, x\bigr]}{\sin(x/2)}.$$

Noyau de Fejér

Il existe des fonctions continues 2π-périodiques f dont la série de Fourier diverge en certains points : pour un certain point t_0, la suite $(\mathrm{S}_n f)(t_0)$ ne converge pas (par translation, on peut se ramener au cas où $t_0 = 0$). Il n'est pas facile d'exhiber ce phénomène désagréable ; cela a été fait vers 1900 (c'est-à-dire longtemps après les débuts de la théorie des séries de Fourier), et peu de temps après Fejér a trouvé un moyen pour atténuer cette difficulté.

Quand une suite numérique (x_n) est convergente vers une limite ℓ, la suite des sommes de Cesàro, qui sont les moyennes de la suite (x_n),

$$y_n = \frac{1}{n+1}(x_0 + \cdots + x_n)$$

converge vers la même limite ℓ. Mais il existe des suites (x_n) qui ne convergent pas, mais telles que la suite des sommes de Cesàro (y_n) converge : on dit alors que (x_n) *converge au sens de Cesàro*. Par exemple, la suite $x_n = (-1)^n$ n'est pas convergente, mais $|y_n| \le 1/(n+1)$, donc (y_n) tend vers 0.

Lorsque la suite des sommes de Fourier $(\mathrm{S}_n f)(t_0)$ ne converge pas, on peut se demander si elle converge au sens plus faible de Cesàro. On introduit donc les sommes de Fejér $(\sigma_n f)$, qui sont les moyennes des sommes de Fourier,

$$(\sigma_n f)(x) = \frac{1}{n+1}\Bigl((\mathrm{S}_0 f)(x) + (\mathrm{S}_1 f)(x) + \cdots + (\mathrm{S}_n f)(x)\Bigr).$$

Comme on a vu que

$$(\mathrm{S}_k f)(x) = (f * \mathrm{D}_k)(x)$$

(convolution périodique), on déduit

$$(\sigma_n f)(x) = \frac{1}{n+1}\Big((f * \mathrm{D}_0)(x) + (f * \mathrm{D}_1)(x) + \cdots + (f * \mathrm{D}_n)(x)\Big) = (f * \mathrm{K}_n)(x)$$

où on a posé

$$\mathrm{K}_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \mathrm{D}_k,$$

fonction appelée *noyau de Fejér*. Comme l'intégrale de chaque D_k est égale à 1, il en résulte que

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{K}_n(x) \, \frac{\mathrm{d}x}{2\pi} = 1.$$

On a calculé K_n avec une somme de sinus :

$$\mathrm{K}_n(x) = \frac{1}{n+1} \frac{\sin^2\big[\frac{n+1}{2}\, x\big]}{\sin^2(x/2)}.$$

On remarque que K_n est une fonction positive, donc la norme L^1 de K_n est égale à son intégrale, $\|\mathrm{K}_n\|_1 = 1$. On en déduit une propriété importante

$$(*) \qquad \|\sigma_n f\|_\infty \le \|f\|_\infty.$$

En effet, pour tout x

$$|(\sigma_n f)(x)| \le \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)| \, \mathrm{K}_n(t) \, \frac{\mathrm{d}t}{2\pi} \le \|f\|_\infty \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{K}_n(t) \, \frac{\mathrm{d}t}{2\pi} = \|f\|_\infty.$$

On appelle *somme de Fejér* de la fonction f l'expression

$$\sigma_n f = \mathrm{K}_n * f = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \mathrm{D}_k * f = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \mathrm{S}_k f\,;$$

ainsi, la somme de Fejér $\sigma_n f$ est la *moyenne* des sommes de Fourier $\mathrm{S}_k f$ de la fonction f, lorsque k varie de 0 à n. On remarque aussi que

$$\mathrm{K}_n = \sum_{k=-n}^{n} \Big(1 - \frac{|k|}{n+1}\Big) e_k$$

donc

$$\sigma_n f = \sum_{k=-n}^{n} \Big(1 - \frac{|k|}{n+1}\Big) c_k(f) e_k.$$

Théorème de Fejér. *Si f est continue 2π-périodique, les sommes de Fejér $(\sigma_n f)$ convergent uniformément vers f. Si $f \in \mathrm{L}^p([0, 2\pi])$ avec $1 < p < \infty$, la suite $(\sigma_n f)$ converge vers f en norme L^p.*

Preuve. — Pour tout polynôme trigonométrique

$$g = \sum_{k=-\mathrm{N}}^{\mathrm{N}} c_k e_k,$$

il est clair que $\mathrm{S}_n g = g$ pour $n \geq \mathrm{N}$; il en résulte que la suite des moyennes $\sigma_n g$ tend uniformément vers g, puisque

$$\|\sigma_n g - g\|_\infty = \frac{1}{n+1} \Big\| \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} (\mathrm{D}_k g - g) \Big\|_\infty \leq \frac{\mathrm{C(N)}}{n+1}$$

qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Si f est continue, on peut l'approcher par un polynôme trigonométrique g, et d'après l'inégalité $(*)$

$$\|\sigma_n f - \sigma_n g\|_\infty = \|\sigma_n(f-g)\|_\infty \leq \|f-g\|_\infty < \varepsilon/3.$$

Pour n assez grand, on a $\|\sigma_n g - g\|_\infty < \varepsilon/3$ et le résultat en découle par l'inégalité triangulaire. Le théorème dans L_p se montre de façon analogue.

Remarque. On peut montrer que si $1 < p < +\infty$ et $f \in \mathrm{L}^p$, les sommes de Fourier $(\mathrm{S}_n f)$ convergent vers f dans L^p. On l'a vu si $p = 2$, mais les autres cas ne sont pas évidents.

Pour $p = 1$ et $f \in \mathrm{L}^1$, les sommes de Fourier ne convergent pas toujours vers f dans L^1, mais les sommes de Fejér convergent toujours.

Fonctions à valeurs réelles

On va exprimer la somme de Fourier

$$\mathrm{S}_n f = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e_k$$

avec les fonctions réelles cos et sin. Pour chaque $k > 0$, regroupons les deux termes correspondant à k et $-k$,

$$c_k \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + c_{-k} \,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} = (c_k + c_{-k}) \cos(kx) + \mathrm{i}(c_k - c_{-k}) \sin(kx)$$

et écrivons le résultat sous la forme traditionnelle $a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$, où

$$a_k = c_k + c_{-k} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}) \frac{\mathrm{d}x}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(2\cos(kx)) \frac{\mathrm{d}x}{2\pi}$$

et

$$b_k = \mathrm{i}(c_k - c_{-k}) = \mathrm{i} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}) \frac{\mathrm{d}x}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(2\sin(kx)) \frac{\mathrm{d}x}{2\pi}$$

donc pour tout $k \geq 1$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) \,\mathrm{d}x, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) \,\mathrm{d}x.$$

Par raison de cohérence, on pose aussi

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

De cette façon on obtient

$$(\mathrm{S}_n f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\big).$$

Il est clair que les coefficients a_k, b_k sont réels lorsque f est réelle. De plus, les b_k sont nuls pour une fonction paire, et les a_k sont nuls pour une fonction impaire.

Proposition. *Les fonctions* $\mathbf{1}$, $x \to \sqrt{2}\cos(kx)$, $x \to \sqrt{2}\sin(kx)$ *pour* $k = 1, 2, \ldots$ *forment une base hilbertienne de l'espace réel* $\mathrm{L}^2_{\mathbb{R}}([0, 2\pi])$.

Preuve.— Les formules d'addition de trigonométrie permettent de montrer que la suite est orthonormée. Si $f \in \mathrm{L}^2([0, 2\pi])$ est une fonction réelle, on sait d'après le cas complexe que f est limite de la suite $(\mathrm{S}_n(f))$; mais on a vu que $\mathrm{S}_n f$ est une combinaison linéaire à coefficients réels des fonctions proposées. On a bien une base hilbertienne de l'espace réel $\mathrm{L}^2_{\mathbb{R}}([0, 2\pi])$.

Exemple. Considérons la fonction $f = \mathbf{1}_{[-\varepsilon,\varepsilon]}$ où $0 < \varepsilon < \pi$. Cette fonction est paire, donc tous les coefficients b_k sont nuls. Pour tout $k \geq 1$,

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} \int_0^{\varepsilon} \cos(kt)\,\mathrm{d}t = \frac{2\sin(k\varepsilon)}{k\pi}.$$

On voit que $a_0 = \varepsilon/\pi$, et le théorème de Dirichlet au point $x = \varepsilon$ donne

$$\frac{1}{2} = \frac{\varepsilon}{\pi} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2\sin(k\varepsilon)\cos(k\varepsilon)}{k\pi} = \frac{\varepsilon}{\pi} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(2k\varepsilon)}{k\pi} \ ;$$

si on pose $y = 2\varepsilon$, on voit que si $0 < y < 2\pi$,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(ky)}{k} = \frac{1}{2}\,(\pi - y).$$

Cordes vibrantes, base de sinus

À chaque fonction $f \in \mathrm{L}^2([0, \pi])$ on associe la fonction impaire $\mathrm{F} \in \mathrm{L}^2([-\pi, \pi])$ qui est égale à f sur $[0, \pi]$. La fonction impaire F se représente comme série de sinus, convergente dans $\mathrm{L}^2([-\pi, \pi])$

$$\lim_n \int_{-\pi}^{\pi} \Big|\mathrm{F}(x) - \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(kx)\Big|^2 \,\mathrm{d}x = 0.$$

Il en résulte immédiatement, en limitant l'intégrale à $[0, \pi]$, que

$$\lim_n \int_0^{\pi} \Big|f(x) - \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(kx)\Big|^2 \,\mathrm{d}x = 0.$$

Par ailleurs
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\sin(\ell x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi} \sin(kx)\sin(\ell x)\,\mathrm{d}x$$
ce qui montre que les fonctions $\sin(kx)$, restreintes à $[0,\pi]$, sont orthogonales. Si on choisit de définir la norme par
$$\|f\|_2^2 = \int_0^{\pi} |f(x)|^2\,\frac{\mathrm{d}x}{\pi}$$
on voit que les fonctions $x \to \sqrt{2}\,\sin(kx)$, $k = 1, 2, \ldots$ forment une base hilbertienne de l'espace (réel) $\mathrm{L}^2([0,\pi])$.

Si f est continue sur $[0,\pi]$, de classe C^1 par morceaux, avec $f(0) = f(\pi) = 0$, alors la fonction impaire F sur $[-\pi,\pi]$ vérifie les mêmes hypothèses, donc ses coefficients de Fourier sont absolument sommables et l'égalité
$$\mathrm{F}(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(kx)$$
est vraie pour tout x dans $[-\pi,\pi]$; en particulier pour tout x dans $[0,\pi]$, on a
$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(kx).$$
Cette représentation est bien adaptée à la description du phénomène des cordes vibrantes.

Si la position d'une corde est donnée par $f(x,t)$ où x varie entre les limites de la corde, t représente le temps et f l'écart du point x de la corde par rapport à la position de repos, on a
$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\mathrm{T}}{m}\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$
l'équation des ondes : le paramètre T est la tension de la corde, et m la masse de la corde par unité de longueur.