**Analyse hilbertienne et de Fourier, séance 11**

**Séries de Fourier 4**

*Équation des ondes*

On veut étudier le mouvement d'une corde vibrante (guitare, violon par exemple), qu'on suppose de longueur $\pi$ pour simplifier un peu l'écriture des formules. On repère chaque point P de la corde par un nombre réel $x$ entre 0 et $\pi$, la quantité $x$ représentant la distance entre le point P et l'origine de la corde associée à la valeur 0. On désigne par $f(x,t)$ l'écart du point $x$ de la corde, $0 \le x \le \pi$, à l'instant $t$, par rapport à sa position au repos. La corde étant fixée aux deux bouts, on doit supposer que

$$f(0,t) = f(\pi,t) = 0$$

pour tout temps $t \ge 0$. La théorie physique (essentiellement, l'équation fondamentale de la dynamique) conduit à chercher une fonction $f(x,t)$ qui vérifie *l'équation des ondes*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \kappa \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

où $\kappa$ est un paramètre $> 0$ dépendant de la tension de la corde et de sa masse par unité de longueur. Des solutions particulières sont données par

$$u_n(x,t) = \cos(n\sqrt{\kappa}\, t)\sin(nx),$$

pour tout $n \ge 1$. Si la position de la corde au temps 0 est donnée par une fonction $g$, nulle en 0 et en $\pi$, de classe $\mathrm{C}^1$ par morceaux, on sait qu'on peut représenter $g$ par

$$\forall x \in [0,\pi], \quad g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx),$$

où $\sum |b_n| < +\infty$ ; pour arranger nos affaires mathématiques, supposons même que $\sum n^2 |b_n| < +\infty$, et considérons

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \cos(n\sqrt{\kappa}\, t)\sin(nx).$$

Pour $t = 0$, on a bien $f(x,0) = g(x)$, la position initiale donnée, et nos hypothèses nous permettent de dériver deux fois terme à terme, pour vérifier que $f$ est bien solution de l'équation des ondes, correspondant à la donnée initiale $f(x,0) = g(x)$. La question de l'unicité de la solution est une question trop délicate pour ce cours.

On peut traiter de façon analogue un cas particulier de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \kappa\, \frac{\partial^2 f}{\partial\, x^2},$$

à savoir celui d'une barre homogène, toujours de longueur $\pi$ pour simplifier, et dont les deux extrémités sont maintenues à température 0. Ici $f(x,t)$ représente la température au point $x$ à l'instant $t$. Si la température à l'instant $t = 0$ est donnée par la même fonction $g$ que ci-dessus, on posera

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n\, \mathrm{e}^{-n^2 \kappa\, t} \sin(nx).$$

Les exponentielles négatives permettent à la série et aux séries dérivées de converger plus facilement que dans le cas des ondes : l'hypothèse $\sum |b_n| < +\infty$ suffit pour donner un sens à nos dérivations de séries de fonctions.

*Changement de période*

On veut travailler avec des fonctions de période $\mathrm{T} > 0$. Pour le faire, il suffit de ramener le problème à la période $2\pi$ par changement de variable, d'appliquer les résultats connus dans ce cas et de revenir. Il est tout de même bon de retenir quelques formules qui s'appliquent au cas de la période T.

Tout d'abord, on travaille avec la mesure $\mathrm{d}x/\mathrm{T}$ qui donne la masse 1 à tous les intervalles-périodes tels que $[0, \mathrm{T}]$ ou $[-\mathrm{T}/2, \mathrm{T}/2]$. Ensuite, on introduit pour tout $n \in \mathbb{Z}$ l'exponentielle

$$e_{n,\mathrm{T}} : x \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi n x/\mathrm{T}}$$

qui est de période T. Les fonctions $(e_{n,\mathrm{T}})_{n\in\mathbb{Z}}$ forment une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2([0,\mathrm{T}])$. Si $f$ est continue, T-périodique et de classe $\mathrm{C}^1$ par morceaux, on sait d'après le cas $2\pi$-périodique que les coefficients dans la base sont absolument sommables, et on a pour tout $x$

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Bigl(\frac{1}{\mathrm{T}} \int_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2} f(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi n t/\mathrm{T}}\, \mathrm{d}t\Bigr)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi n x/\mathrm{T}}.$$

*Transformée de Fourier et séries de Fourier : des séries de Fourier à la transformée*

Supposons que $g$ soit de classe $\mathrm{C}^2$ à support compact sur $\mathbb{R}$. Pour T assez grand, la fonction $g$ sera nulle en dehors de l'intervalle $[-\mathrm{T}/2, \mathrm{T}/2]$ ; si on regarde $g$ comme la restriction à $[-\mathrm{T}/2, \mathrm{T}/2]$ d'une fonction T-périodique $f$ sur $\mathbb{R}$, on aura pour tout $x$ tel que $|x| \le \mathrm{T}/2$

$$g(x) = f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Bigl(\frac{1}{\mathrm{T}} \int_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2} f(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi n t/\mathrm{T}}\, \mathrm{d}t\Bigr)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi n x/\mathrm{T}}.$$

Comme $g$ est nulle hors de $[-\mathrm{T}/2, \mathrm{T}/2]$, l'intégrale de $f$ sur cet intervalle est aussi l'intégrale de $g$ sur $\mathbb{R}$ et

$$g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\mathrm{T}}\, \widehat{g}(2\pi n/\mathrm{T})\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi n x/\mathrm{T}}.$$

Posant $h = 2\pi/\mathrm{T}$, il vient

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} h\widehat{g}(nh)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}xnh}\,.$$

Il s'agit d'une somme de Riemann généralisée pour la fonction

$$\varphi : y \to \frac{1}{2\pi}\, \widehat{g}(y)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}xy},$$

correspondant à un découpage de $\mathbb{R}$ en petits intervalles de longueur $h$. Grâce à l'hypothèse que $g$ est de classe $\mathrm{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, on peut montrer que ces sommes de Riemann tendent vers l'intégrale de $-\infty$ à $+\infty$ de la fonction $\varphi$ lorsque $h \to 0$, ce qui donne

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{g}(y)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}xy}\, \mathrm{d}y.$$

C'est la formule d'inversion de Fourier, qui était à la base de la théorie $\mathrm{L}^2$ de l'intégrale de Fourier. Ainsi dans cette approche l'intégrale de Fourier apparaît comme limite des séries de Fourier de période T lorsque $\mathrm{T} \to +\infty$.

*Signal périodique tronqué*

Si on envisage un signal T-périodique $f(t)$ non nul, on ne peut pas considérer sa transformée de Fourier, car $f$ n'est ni intégrable ni de carré intégrable, les seuls cas que nous savons traiter. Mais si on considère une fonction $\theta(t)$ qui soit à support compact, mais égale à 1 sur un loong intervalle, on pourra appliquer la transformation de Fourier à la fonction $t \to \theta(t)f(t)$, en nous disant que cela nous donnera peut-être une idée de ce que devrait être la transformée de Fourier de $f$, si elle existait. Supposons pour simplifier que $f$ soit de classe $\mathrm{C}^1$, ce qui implique que la série de Fourier est normalement convergente,

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi nt/\mathrm{T}}, \qquad \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n| < +\infty.$$

Comme fonction $\theta$, prenons d'abord une fonction $\varphi$ continue à support compact, égale à 1 sur un voisinage de 0, puis $\theta(t) = \varphi(ct)$, $c > 0$ petit ; quand $c$ devient petit, la fonction $\theta$ est égale à 1 sur un intervalle de plus en plus grand autour de 0. D'un autre côté,

$$\widehat{\theta}(\xi) = c^{-1}\widehat{\varphi}(c^{-1}\xi)$$

se concentre en 0 : le graphe de $\widehat{\theta}$ se présente essentiellement comme une raie verticale de largeur $\sim c$, située à l'abscisse $\xi = 0$, et l'intégrale de $\widehat{\theta}$ vaut $2\pi\,\theta(0) = 2\pi$. On aura

$$\begin{aligned}\widehat{(\theta f)}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \theta(t)\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi nt/\mathrm{T}}\Big)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi t}\, \mathrm{d}t = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \int_{\mathbb{R}} \theta(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\xi - 2\pi n/\mathrm{T})t}\, \mathrm{d}t \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\, \widehat{\theta}(\xi - 2\pi n/\mathrm{T}).\end{aligned}$$

Le spectre de $\theta f$ est donc formé de raies situées autour des abscisses multiples entiers de $2\pi/\mathrm{T}$, et dont l'altitude est proportionnelle au coefficient de Fourier $a_n$ de la fonction $f$.

On considère une fonction $\mathrm{F}$ sur $\mathbb{R}$, suffisamment régulière et suffisamment décroissante à l'infini, par exemple :

*la fonction* $\mathrm{F}$ *est de classe* $\mathrm{C}^2$ *sur* $\mathbb{R}$, *avec* $\mathrm{F}''$ *intégrable ; de plus, il existe une constante* $\mathrm{C}$ *et* $\alpha > 1$ *tels que* $|\mathrm{F}(x)| \le \mathrm{C}\,(1+|x|)^{-\alpha}$ *pour tout* $x$.

On se donne $\mathrm{T} > 0$ et on pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{F}(x + k\mathrm{T}).$$

On obtient une fonction continue sur $\mathbb{R}$, qui est T-périodique. La continuité de $f$ se justifie ainsi : pour $y \in [0, \mathrm{T}]$, posons $u_k(y) = \mathrm{F}(y + k\mathrm{T})$ ; alors

$$|u_k(y)| \le \mathrm{C}\,(1+|y+k\mathrm{T}|)^{-\alpha} \le \mathrm{C}_1\,(2\mathrm{T}+|y+k\mathrm{T}|)^{-\alpha} \le \mathrm{C}_1\,(|k|+1)^{-\alpha}\,\mathrm{T}^{-\alpha}$$

ce qui donne une série majorante convergente pour la série de fonctions : il y a convergence normale de la série de fonctions, donc continuité de la somme $f$. Calculons les coefficients de Fourier de la fonction T-périodique $f$,

$$c_{n,\mathrm{T}}(f) = \int_0^{\mathrm{T}} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi nx/\mathrm{T}}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{T}} = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{F}(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi nx/\mathrm{T}}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{T}} = \frac{\widehat{\mathrm{F}}(2\pi n/\mathrm{T})}{\mathrm{T}}.$$

Si $\sum |\widehat{\mathrm{F}}(2\pi n/\mathrm{T})| < +\infty$, on sait que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_{n,\mathrm{T}}(f)| < +\infty$, donc $f$ est égale en tout point à la somme de sa série de Fourier. On a donc

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{n,\mathrm{T}}(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi nx/\mathrm{T}}.$$

On obtient ainsi la formule de Poisson

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{F}(x+k\mathrm{T}) = \frac{1}{\mathrm{T}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\mathrm{F}}(2\pi n/\mathrm{T})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi nx/\mathrm{T}}.$$

Justifions la convergence de la série des coefficients de Fourier : d'après l'hypothèse de majoration de $\mathrm{F}$, on sait que $\mathrm{F}$ est intégrable, et $\mathrm{F}''$ est intégrable par hypothèse. Les transformées de Fourier $\widehat{\mathrm{F}}$ et $\widehat{\mathrm{F}''}(\xi) = -\xi^2\,\widehat{\mathrm{F}}(\xi)$ sont donc bornées, donc $(1+\xi^2)\widehat{\mathrm{F}}(\xi)$ est borné sur $\mathbb{R}$. Puisqu'il existe une constante $\mathrm{M}$ telle que

$$|\widehat{\mathrm{F}}(\xi)| \le \frac{\mathrm{M}}{1+\xi^2}$$

on déduit que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{\mathrm{F}}(2\pi n/\mathrm{T})| < +\infty$.

*Échantillonnage, formule de Shannon*

Étant donné un signal $\mathrm{G}(t)$ dépendant du temps, on cherche à pouvoir le coder en remplaçant l'information continue, quand le temps $t$ prend toutes les valeurs réelles, par la connaissance des valeurs de G en une suite discrète de temps multiples $k\mathrm{T}$ d'une valeur $\mathrm{T} > 0$ petite : c'est *l'échantillonnage*.

Pour pouvoir fonctionner, on supposera que le signal G est à *spectre limité* : on supposera que $\widehat{\mathrm{G}}$ est nulle en dehors d'un intervalle $[-\mathrm{M}, \mathrm{M}]$. On supposera en plus que G vérifie les hypothèses de la formule de Poisson.

Considérons $\lambda \in [-\mathrm{M}, \mathrm{M}]$ et posons

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{G}(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\,;$$

On a $\widehat{\mathrm{F}}(\xi) = \widehat{\mathrm{G}}(\xi + \lambda)$. La formule de Poisson, appliquée à F avec $x = 0$, donne

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{G}(k\mathrm{T})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda k\mathrm{T}} = \frac{1}{\mathrm{T}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\mathrm{G}}(2\pi n/\mathrm{T} + \lambda).$$

Si on suppose que

$$\frac{2\pi}{\mathrm{T}} > 2\mathrm{M}$$

et puisque $|\lambda| \le \mathrm{M}$, on voit facilement qu'il n'y a qu'un terme non nul dans la somme de droite, celui qui correspond à $n = 0$ : en effet si $n \ne 0$, on a

$$|2\pi n/\mathrm{T} + \lambda| \ge 2\pi/\mathrm{T} - |\lambda| \ge 2\mathrm{M} - \mathrm{M} = \mathrm{M} \quad \text{donc} \quad \widehat{\mathrm{G}}(2\pi n/\mathrm{T} + \lambda) = 0,$$

et par conséquent

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{G}(k\mathrm{T})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda k\mathrm{T}} = \frac{1}{\mathrm{T}}\,\widehat{\mathrm{G}}(\lambda)\,;$$

on voit déjà que $\widehat{\mathrm{G}}$ est complètement connue à partir des valeurs $\mathrm{G}(k\mathrm{T})$, $k \in \mathbb{Z}$, puisque ces valeurs permettent de calculer $\widehat{\mathrm{G}}$ sur l'intervalle $[-\mathrm{M}, \mathrm{M}]$, et que $\widehat{\mathrm{G}} = 0$ par hypothèse en dehors de cet intervalle. Si on veut aller plus loin, on écrit pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\widehat{\mathrm{G}}(\lambda) = \widehat{\mathrm{G}}(\lambda)\,\mathbf{1}_{[-\mathrm{M},\mathrm{M}]}(\lambda) = \mathrm{T} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{G}(k\mathrm{T})\,\mathbf{1}_{[-\mathrm{M},\mathrm{M}]}(\lambda)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda k\mathrm{T}},$$

et par Fourier inverse

$$\begin{aligned} \mathrm{G}(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\mathrm{G}}(\lambda)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\,\mathrm{d}\lambda = \frac{\mathrm{T}}{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{G}(k\mathrm{T}) \int_{-\mathrm{M}}^{\mathrm{M}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(x-k\mathrm{T})}\,\mathrm{d}\lambda \\ &= \frac{\mathrm{T}}{\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{G}(k\mathrm{T})\,\frac{\sin(\mathrm{M}(x-k\mathrm{T}))}{x-k\mathrm{T}}\cdot \end{aligned}$$

Comme on a choisi $\pi/\mathrm{T} \ge \mathrm{M}$, la transformée de Fourier $\widehat{\mathrm{G}}$ est nulle $[-\pi/\mathrm{T}, \pi/\mathrm{T}]$, donc on peut aussi bien prendre $\mathrm{M} = \pi/\mathrm{T}$, ce qui donne finalement la *formule de Shannon*

$$\mathrm{G}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{G}(k\mathrm{T})\,\frac{\sin(\pi(x-k\mathrm{T})/\mathrm{T})}{\pi(x-k\mathrm{T})/\mathrm{T}}\cdot$$

La condition de validité est que la *fréquence d'échantillonnage* $1/\mathrm{T}$ soit $\ge 2\,\mathrm{M}/(2\pi)$, donc plus que le *double* de la fréquence maximale $\mathrm{M}/(2\pi)$ attendue dans le signal G.