Université Paris 7 - Denis Diderot
L3 Maths Appliquées
Analyse de Hilbert et de Fourier
Année 05/06

Devoir n° 1

Dans un circuit RLC, la tension $f(t)$ imposée à l'entrée du circuit et la tension $g(t)$ qui s'en déduit à la sortie (toutes deux fonctions du temps) sont reliées par l'équation différentielle :

$$(E) \qquad ag''(t) + bg'(t) + g(t) = f(t),$$

où a $(= LC)$ et b $(= RC)$ sont deux constantes strictement positives.

Partie I.

On suppose ici que $f \in \mathbf{L^1}(\mathbb{R})$ et on s'intéresse aux solutions g de (E) qui sont de classe C^2 et telles que g, g' et g'' soient éléments de $\mathbf{L^1}(\mathbb{R})$: l'ensemble de ces fonctions sera noté G.

1) Montrer que le polynôme $Q(z) = az^2 + bz + 1$ n'a pas de racine complexe imaginaire pure, et que $g \in G$ est solution de (E) si et seulement si g vérifie :

$$\widehat{g}(\xi) = \frac{1}{Q(i\xi)} \cdot \widehat{f}(\xi) \qquad (\xi \in \mathbb{R}).$$

2) Calculer la transformée de Fourier de la fonction $h_\alpha(t) = \mathrm{e}^{-\alpha t} .1\!\!1_{[0,+\infty[}(t)$ où $\alpha > 0$.

En déduire celle de $h_{\alpha,\beta}(t) = \mathrm{e}^{(-\alpha+i\beta)t} .1\!\!1_{[0,+\infty[}(t)$ pour $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

3) On veut trouver une fonction explicite $h \in \mathbf{L^1}(\mathbb{R})$ telle que

$$(F) \qquad \frac{1}{Q(i\xi)} = \widehat{h}(\xi) \qquad (\xi \in \mathbb{R}).$$

a) On suppose que $b^2 > 4a$.

Montrer que Q a deux racines réelles strictement négatives $-\alpha_1$ et $-\alpha_2$.

Décomposer la fraction rationnelle $\dfrac{1}{Q(z)}$ en éléments simples et en déduire une fonction $h \in \mathbf{L^1}(\mathbb{R})$ qui vérifie (F).

b) On suppose maintenant que $b^2 = 4a$. Trouver h à l'aide de 2).

c) On suppose enfin que $b^2 < 4a$.

Montrer que Q a deux racines complexes conjuguées $-\alpha + i\beta$ et $-\alpha - i\beta$ $(\beta > 0)$ de partie réelle $-\alpha$ strictement négative.

Trouver h en procédant comme en a).

4) Conclure que, dans tous les cas, (E) a au plus une solution dans G, donnée par : $g = h * f$.

5) Inversement, montrer que si f est de classe C^2, élément de $\mathbf{L^1}(\mathbb{R})$, bornée et de dérivées f' et f'' bornées et éléments de $\mathbf{L^1}(\mathbb{R})$, la fonction $g = h * f$ est élément de G et solution (unique) de (E) dans G (la fonction h étant la fonction construite à la question 3) ci-dessus).

6) On fait les mêmes hypothèses sur f que dans la question précédente, et on suppose de plus que f est nulle sur $]-\infty, 0]$. Montrer que $g = h * f$ est nulle sur $]-\infty, 0]$, et que, parmi toutes les solutions de l'équation différentielle (E), c'est la seule à posséder cette propriété.

Pour f satisfaisant les hypothèses précédentes, $h * f$ est donc la seule solution de (E) qui soit acceptable du point de vue de la physique, car la réponse du circuit électrique ne doit pas précéder la mise sous tension : c'est le principe de causalité.

h étant la fonction obtenue en 3)a), b) ou c) selon le cas, on admettra que pour toute fonction f telle que $h * f$ ait un sens (en particulier pour $f \in L^p(\mathbb{R})$ avec $1 \leq p \leq +\infty$), la fonction $h * f$ est la réponse effective du circuit à une tension f fournie à l'entrée.

Partie II.

1) Montrer que lorsqu'on décale dans le temps, d'un retard s, la tension f d'entrée, la réponse du système s'en trouve décalée du même s (*principe d'invariance, vérifié pour tout "filtre de convolution" : $f \mapsto h * f$).*

2) Tracer le graphe de h dans les trois cas a), b), c) du I-3).

(Remarque : h est appelée la "réponse impulsionnelle" du circuit; c'est la réponse limite à un signal très bref, concentré autour de $t = 0$ et d'intégrale 1, comme par exemple $f = 1/\tau \mathbb{1}_{[0,\tau]}$ avec $\tau \to 0$: en effet $h * F_\tau \to h$ dans $L^1(\mathbb{R})$ quand $\tau \to 0$.)

3) Calculer dans les trois cas a), b) c) la réponse g du circuit à la tension $f = \mathbb{1}_{[0,+\infty[}$.

4) On suppose ici que $b^2 = 2a$.

Que vaut la fonction h dans ce cas ?

Calculer $|\widehat{h}(\xi)|^2$ pour $\xi \in \mathbb{R}$.

Remarques : noter que pour $|\xi| < 1/\sqrt{a}$, le nombre $|\widehat{h}(\xi)|$ est proche de 1 (donc $\widehat{h}(\xi).\widehat{f}(\xi)$ est proche, en module du moins, de $\widehat{f}(\xi)$); et que pour $|\xi| > 1/\sqrt{a}$, $|\widehat{h}(\xi)|$ est proche de 0 (donc $\widehat{h}(\xi).\widehat{f}(\xi)$ aussi).

Le filtre $f \mapsto h * f$ a donc la propriété de restituer convenablement les fréquences inférieures à $1/\sqrt{a}$ et d'atténuer les autres : c'est un filtre "passe-bas".

Il existe un filtre de convolution $f \mapsto \varphi * f$ qui a la propriété de restituer parfaitement les fréquences $\xi \leq \xi_c$ (pour un $\xi_c > 0$) et de supprimer celles $> \xi_c$ (filtre passe-bas idéal) : il est tout simplement donné par

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \mathbb{1}_{[-\xi_c,\xi_c]}(\xi) \qquad \text{soit} \qquad \varphi(t) = \frac{\sin \xi_c t}{\pi\, t} \qquad (\text{ici } \varphi \in L^2(\mathbb{R})),$$

mais il ne satisfait pas le principe de causalité (car $\varphi * f(t)$ dépend des valeurs de f après l'instant t). Ce filtre n'est donc pas réalisable par un dispositif physique (du moins agissant sur un signal temporel).

5) Que se passe-t-il si on réinjecte le premier signal de sortie $g(t)$ comme entrée d'un deuxième filtre identique au premier ?