Université Paris 7 - Denis Diderot
L3 Maths Appliquées
Analyse de Hilbert et de Fourier
Année 05/06

Feuille d'exercices 5

1. *Polynômes de Legendre*

L'espace de Hilbert $L^2([-1,1])$ est noté H et $\langle\ \rangle$ désigne son produit scalaire.

On définit les polynômes suivants, pour $n \in \mathbb{N}$: $Q_n(x) = \dfrac{d^n}{dx^n}\Big((x^2-1)^n\Big)$.

a) Montrer par une succession d'intégrations par parties que:

$$\langle Q_n, Q_p\rangle = \begin{cases} (2^n n!)^2 (n+\frac{1}{2})^{-1} & \text{si} \quad p = n \\ 0 & \text{si} \quad p \neq n \end{cases}$$

En déduire que les polynômes: $P_n = \dfrac{1}{2^n n!}\sqrt{n+1/2}\, Q_n$ forment une famille orthonormée de H.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de l'e.v. $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

c) Donner la meilleure approximation dans $L^2([-1,1])$ de la fonction $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ par une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 3. Tracer son graphe.

d) On rappelle que l'ensemble $C([-1,1])$ des fonctions continues sur $[-1,1]$ est dense dans $L^2([-1,1])$. Montrer à l'aide de a), b) et du théorème de Stone-Weierstrass que $(P_n, n \in \mathbb{N})$ est une base hilbertienne de $L^2([-1,1])$.

2. *Polynômes de Laguerre*

On note μ la mesure positive sur $[0,+\infty[$ de densité e^{-x} par rapport à la mesure de Lebesgue, et H l'espace de Hilbert $L^2([0,+\infty[, \mathcal{B}([0,+\infty[), \mu)$.

On définit, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n).$$

a) Montrer que, pour tout n, L_n est une fonction polynôme de degré n.

b) Montrer que H contient les fonctions polynômes. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\, dx$ pour $n \in \mathbb{N}$.

c) Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on note X^k la fonction: $x \mapsto x^k$.

Par une succession d'intégrations par parties, montrer que: $\langle X^k, L_n\rangle = \begin{cases} (-1)^n n! & \text{si} \quad k = n \\ 0 & \text{si} \quad k \leq n \end{cases}$

(On remarquera que, pour $0 \leq p < n$, $\dfrac{d^p}{dx^p}(e^{-x}x^n)$ vaut 0 en $x = 0$.)

d) En déduire que $\{L_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une famille orthonormée de H.

e) Pour $\alpha \geq 0$, on pose $f_\alpha(x) = e^{-\alpha x}$.

Calculer $\langle f_\alpha, L_n\rangle$ par intégrations par parties successives, pour $\alpha \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \langle f_\alpha, L_n\rangle^2 = \frac{1}{2\alpha+1}.$$

En déduire que les fonctions f_α ($\alpha \geq 0$) appartiennent au s.e.v. fermé engendré par $\{L_n, n \in \mathbb{N}\}$.

f) Soit E l'e.v. des fonctions continues sur $[0,1]$ nulles en 0, muni de la norme $\| \|_\infty$.
Montrer que les fonctions X^k, $k \geq 1$, restreintes à $[0,1]$ engendrent un s.e.v. dense dans $(E, \| \|_\infty)$.

g) On rappelle que E est un s.e.v. dense de $L^2([0,1])$.
Montrer que les fonctions X^k, $k \geq 1$, restreintes à $[0,1]$ engendrent un s.e.v. dense dans $L^2([0,1])$.

h) En déduire que les fonctions f_k, $k \geq 1$ engendrent un s.e.v. dense dans $L^2(\mu)$.
(On définira une isométrie entre les deux espaces de Hilbert $L^2(\mu)$ et $L^2([0,1])$.)

i) Déduire des questions précédentes que $\{L_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une base hilbertienne de H.

3. *Base de Haar*

Pour $j, k \in \mathbb{Z}$, on définit la fonction $h_{j,k}$ par:

$$h_{j,k}(x) = 2^{-j/2}\left(1\!\!1_{]k.2^j,(k+\frac{1}{2}).2^j[} - 1\!\!1_{](k+\frac{1}{2}).2^j,(k+1).2^j[}\right)$$

et l'intervalle $I(j,k)$ par: $I(j,k) =]k.2^j, (k+1).2^j[$.

a) Représenter le graphe de $h_{j,k}$ ($j, k \in \mathbb{Z}$). Montrer que $h_{j,k} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.
Calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} h_{j,k}(x)\, dx$ et $\|h_{j,k}\|_2$.

b) Montrer que si $j' < j$ ($j, j' \in \mathbb{Z}$), alors, pour tous $k, k' \in \mathbb{Z}$, l'intervalle $I(j', k')$ est soit disjoint de $I(j,k)$ soit contenu dans l'une des deux moitiés, droite ou gauche, de $I(j,k)$.

c) Montrer que pour tous $j, j', k, k' \in \mathbb{Z}$:
(i) si $k \neq k'$ alors $h_{j,k} \times h_{j,k'} = 0$,
(ii) si $j' < j$ alors $h_{j,k} \times h_{j',k'} = c \,.\, h_{j',k'}$ où $c \in \{0, -1, 1\}$.

d) Montrer que la famille $(h_{j,k}, (j,k) \in \mathbb{Z}^2)$ est orthonormée.

e) j_0 et k_0 étant fixés dans $\mathbb{Z}$, on pose $g = 1\!\!1_{I(j_0,k_0)}$. Montrer que:
(i) pour tout $(j,k) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $j \leq j_0$ on a $\langle g, h_{j,k} \rangle = 0$,
(ii) si $j > j_0$, alors $\langle g, h_{j,k} \rangle$ est non nul pour une seule valeur $k(j)$ de k, pour laquelle on a: $|\langle g, h_{j,k(j)} \rangle| = 2^{j_0 - j/2}$.

Montrer que $\displaystyle\|g\|^2 = \sum_{j=j_0+1}^{+\infty} |\langle g, h_{j,k(j)} \rangle|^2$.

En déduire que g appartient au s.e.v. fermé de $L^2(\mathbb{R})$ engendré par $(h_{j,k}, (j,k) \in \mathbb{Z}^2)$.

f) Soit maintenant $g = 1\!\!1_{[a,b]}$ où $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$.
Pour tout $j \in \mathbb{Z}$ tel que $2^j < b - a$ il existe $k, k' \in \mathbb{Z}$ tels que $k \leq k'$ et:

$$(k-1).2^j \leq a < k.2^j \qquad \text{et} \qquad k'.2^j \leq b < (k'+1).2^j.$$

Montrer que $\displaystyle\|g - \sum_{l=k}^{k'-1} 1\!\!1_{I(j,l)}\|_2^2 \leq 2^{j+1}$.

En déduire que g est élément du s.e.v. fermé de $L^2(\mathbb{R})$ engendré par $(h_{j,k}, (j,k) \in \mathbb{Z}^2)$.

g) Montrer que la famille $(h_{j,k}, (j,k) \in \mathbb{Z}^2)$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.