Université Paris 7 - Denis Diderot
L3 Maths Appliquées
Analyse de Hilbert et de Fourier
Année 05/06

Feuille d'exercices 6

1. Montrer par récurrence, sans calculs, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, les $n+1$ premiers polynômes de Legendre $P_0, \dots P_n$ se déduisent des polynômes $1, x, \dots, x^n$ par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt dans $L^2([-1,1])$.

2. On considère un espace mesuré $(E, \mathcal{A}, \mu)$ où μ est une mesure de probabilité, c'est-à-dire une mesure positive telle que $\mu(E) = 1$.

a) Montrer que la fonction constante 1 est élément de $L^2(E, \mathcal{A}, \mu)$ et donner sa norme.

b) Soit $f \in L^2(E, \mathcal{A}, \mu)$ non p.p. constante.

Montrer que les fonctions 1 et f sont linéairement indépendantes dans $L^2(E, \mathcal{A}, \mu)$ et déterminer la famille orthonormée qui s'en déduit par le procédé d'othonormalisation de Gram-Schmidt.

c) Pour $h \in L^2(E, \mathcal{A}, \mu)$, on note $\mu(h)$ l'intégrale: $\mu(h) = \displaystyle\int_E h \, d\mu$.

(Noter que, μ étant une mesure bornée, toute fonction de carré intégrable est intégrable.)

Montrer que pour $g \in L^2(E, \mathcal{A}, \mu)$, la projection de g sur F =Vect $(1, f)$ est donnée par:

$$P_F(g)(x) = \mu(g) + \frac{\int (g - \mu(g))\overline{(f - \mu(f))} \, d\mu}{\int |f - \mu(f)|^2 \, d\mu}(f(x) - \mu(f)).$$

d) Dans $L^2([0,1])$, quelle est la meilleure approximation de la fonction $x \mapsto x^n$ $(n \geq 2)$ par une fonction affine?

3. On rappelle que toute fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ est la somme d'une fonction paire f_p et d'une fonction impaire f_i, données par:

$$f_p(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \quad \text{et} \quad f_i(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)).$$

a) Montrer que si $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, les deux fonctions f_p et f_i sont aussi dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

Montrer de plus que, pour $f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$: $f = g$ p.p. $\Longrightarrow f_p = g_p$ p.p. et $f_i = g_i$ p.p.,
si bien que la décomposition précédente induit une décomposition des éléments de $L^2(\mathbb{R})$.

b) Montrer que l'ensemble F des éléments de $L^2(\mathbb{R})$ ayant un représentant pair (noter que cela équivaut à: $f(x) = f(-x)$ p.p. pour tout représentant) constitue un s.e.v. fermé de $L^2(\mathbb{R})$.

c) Déterminer le s.e.v. $F^\perp$ orthogonal de F dans $L^2(\mathbb{R})$.

d) Quelle est la meilleure approximation dans $L^2(\mathbb{R})$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin(x-a)}{x-a}$ $(a \in \mathbb{R})$ par une fonction paire? et de $\dfrac{e^{ix} - 1}{x}$?

4. Soit P le projecteur orthogonal sur un s.e.v. fermé d'un espace de Hilbert H.

Montrer que $\forall x, y \in H$ on a: $\quad \langle P(x), y \rangle = \langle x, P(y) \rangle = \langle P(x), P(y) \rangle$.

5. Soit H un espace de Hilbert et $P : H \mapsto H$ une application linéaire.

a) On suppose que $P^2 = P$.

Montrer que la restriction de P à $\text{Im}P$ coïncide avec l'identité et que:

$$H = \text{Ker}P \oplus \text{Im}P.$$

b) On suppose que P vérifie les deux conditions:

$$P^2 = P \qquad \text{et} \qquad \forall x \in H \quad \|P(x)\| \leq \|x\|.$$

(i) Montrer que $\text{Ker}P$ est un s.e.v. fermé de H et que $\text{Ker}P^\perp \subset \text{Im}P$.

(*Indication:* par l'absurde, on considérera un élément x de $\text{Ker}P^\perp \backslash \text{Im}P$ *(faire un "dessin")*.)

(ii) Montrer que $\text{Im}P = \text{Ker}P^\perp$.

6. On note E l'ensemble des suites de nombres complexes qui sont nulles à partir d'un certain rang et on munit E du produit scalaire (montrer que cela en est bien un):

$$\langle (x_n), (y_n) \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \overline{y_n}.$$

a) Montrer que l'application $f : (x_n) \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{n+1}$ est une forme linéaire continue sur E.

b) Soit $F = \text{Ker}f$. Montrer que F est un s.e.v. fermé de E, strictement contenu dans E.

c) On suppose que $x \in E$ est un vecteur non nul orthogonal à F.

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_n = 0$ pour $n > n_0$.

(i) Montrer que $(x_0, \dots, x_{n_0}) = \left(\dfrac{1}{n+1}\right)_{0 \leq n \leq n_0}$.

(ii) Trouver alors un élément y de F tel que x ne soit pas orthogonal à y.

Que peut-on en conclure?

d) E est-il un espace de Hilbert?

7. Calculer les coefficients de Fourier de la fonction 2π-périodique donnée par: $f(x) = \pi - x$ sur l'intervalle $[0, 2\pi[$.

Retrouver ainsi l'égalité: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

8. Calculer les coefficients de Fourier de la fonction 2π-périodique donnée par: $f(x) = \text{sign}x$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi[$.

En déduire l'égalité: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

9. Soit f une fonction 2π-périodique de carré intégrable sur $[0, 2\pi[$.

p étant un entier fixé ($p \geq 2$) on définit $g(x) = f(px)$ ($x \in \mathbb{R}$).

a) Montrer que g est 2π-périodique de carré intégrable sur $[0, 2\pi[$ et que ses coefficients de Fourier sont donnés par:

$\forall k \in \mathbb{Z} \quad c_{kp}(g) = c_k(f), \quad$ et $\; c_n(g) = 0$ pour n non multiple de p.

(On pourra remarquer que cette propriété est immédiate lorsque $f(x) = e^{inx}$.)

b) En déduire, avec l'exercice 8, les coefficients de Fourier de la fonction π-périodique donnée par: $f(x) = \text{sign}x$ sur l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$.