Analyse hilbertienne et de Fourier, examen du 9 juin 2006

Documents interdits *durée 3h*

— *Exercice I* —

On fixe un nombre réel s tel que $0 < s \leq \pi$, et on désigne par f la fonction paire et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = 1 - x/s$ pour $0 \leq x \leq s$, et $f(x) = 0$ si $s \leq x \leq \pi$.

a. Tracer le graphe de la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$. Calculer les coefficients de Fourier complexes $c_n(f)$, ainsi que les coefficients de Fourier réels $a_n(f)$ et $b_n(f)$.

b. Démontrer que pour tout x réel, on a

$$f(x) = \frac{s}{2\pi} + \frac{4}{\pi s} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(ns/2)}{n^2} \cos(nx).$$

Expliciter le résultat obtenu lorsque $s = \pi$.

— *Exercice II* —

1. Dans cette question H désigne un espace de Hilbert complexe, $\langle v, w\rangle$ le produit scalaire de deux vecteurs quelconques $v, w \in \mathrm{H}$, et $\|v\| = \langle v, v\rangle^{1/2}$ la norme de $v \in \mathrm{H}$.

1.a. Si v et w sont dans H, calculer $\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2$ en fonction du produit scalaire de v et w. Exprimer $\langle v, w\rangle$ à partir de $\|v + w\|^2$, $\|v - w\|^2$, $\|v + \mathrm{i}w\|^2$ et $\|v - \mathrm{i}w\|^2$.

1.b. Si U est une application linéaire isométrique de H dans H, c'est-à-dire que $\|\mathrm{U}v\| = \|v\|$ pour tout $v \in \mathrm{H}$, montrer que U conserve le produit scalaire : on a $\langle \mathrm{U}v, \mathrm{U}w\rangle = \langle v, w\rangle$ pour tous $v, w \in \mathrm{H}$. En déduire que la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ vérifie

$$\forall f, g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}), \quad \big\langle c\mathcal{F}f, c\mathcal{F}g\big\rangle = \langle f, g\rangle$$

pour une constante $c > 0$ qu'on déterminera.

2. On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 - 2\,|x|$ pour $0 \leq |x| \leq 1/2$ et $g(x) = 0$ si $|x| \geq 1/2$.

2.a. Calculer la transformée de Fourier $\widehat{g}$ de g.

2.b. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on définit la fonction g_n sur $\mathbb{R}$ en posant $g_n(x) = g(x - n)$ pour tout réel x. Vérifier que pour tous $m \neq n$, on a $\int_{\mathbb{R}} g_m(x) g_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Montrer que les transformées de Fourier $(\widehat{g_n})$ sont deux à deux orthogonales dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.

3. On reprend la fonction g et les fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de la question **2**.

3.a. Calculer $\widehat{g_n}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, et montrer que $\int_{\mathbb{R}} |\widehat{g}(y)|^2\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ny}\,\mathrm{d}y = 0$ quand $n \neq 0$.

3.b. Montrer que la formule

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{G}(y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{g}(y + 2k\pi)|^2$$

définit une fonction G sur $\mathbb{R}$, intégrable sur $[0, 2\pi]$. Démontrer que

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{G}(y)\,\varphi(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{g}(y)|^2 \varphi(y)\,\mathrm{d}y$$

pour toute fonction φ continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\int_0^{2\pi} \mathrm{G}(y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ny}\,\mathrm{d}y = 0$ pour tout n entier relatif $\neq 0$. En déduire que la fonction G est constante.

3.c. Montrer que la valeur constante de la fonction G est $\mathrm{C} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{g}(y)|^2\,\mathrm{d}y$; en déduire que $\mathrm{C} = 1/3$. Vérifier que $1/3 = |\widehat{g}(0)|^2 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} |\widehat{g}(2k\pi)|^2$ et montrer que

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(2j+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

Rappels.

Transformation de Fourier

Le produit scalaire sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ est défini par

$$\forall f, g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}), \quad \langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x\,;$$

la norme de l'espace de Hilbert $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ est définie par

$$\forall f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}), \quad \|f\|_2 = \Big(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2} = \sqrt{\langle f, f\rangle}.$$

La transformation de Fourier est définie sur l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ en associant à toute fonction g intégrable sur $\mathbb{R}$ la fonction $\widehat{g}$ définie par

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \widehat{g}(y) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\,\mathrm{d}x.$$

Lorsque $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, la transformée de Fourier $\mathcal{F}f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ est la limite dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ de la suite $(\widehat{f_n})$ des transformées de Fourier des fonctions intégrables $f_n = \mathbf{1}_{[-n,n]}\,f$. Si f est à la fois dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, on a $\mathcal{F}f = \widehat{f}$ presque partout. La relation de Parseval affirme que

$$\forall f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}), \quad \|\mathcal{F}f\|_2 = \sqrt{2\pi}\,\|f\|_2.$$

Séries de Fourier

Si f est une fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, intégrable sur chaque période, les coefficients de Fourier complexes de la fonction f sont définis pour tout $n \in \mathbb{Z}$ par

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x\,;$$

les coefficients de Fourier réels de f sont définis en posant d'une part

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x$$

pour tout entier $n \geq 0$, et d'autre part en posant

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x$$

pour tout entier $n \geq 1$. Les sommes de Fourier de f sont données pour tout $n \geq 0$ par les expressions

$$(\mathrm{S}_n f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\big(a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin(kx)\big).$$