Analyse hilbertienne et de Fourier, corrigé de l'examen du 9 juin 2006

— *Exercice I* —

On fixe un nombre réel s tel que $0 < s \le \pi$, et on désigne par f la fonction paire et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = 1 - x/s$ pour $0 \le x \le s$, et $f(x) = 0$ si $s \le x \le \pi$.

a. Tracer le graphe de la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$. Calculer les coefficients de Fourier complexes $c_n(f)$, ainsi que les coefficients de Fourier réels $a_n(f)$ et $b_n(f)$.

Preuve.— Calculons c_n pour $n \ne 0$. On a, en utilisant la périodicité, la possibilité de calculer l'intégrale sur la période $[-\pi, \pi]$ à la place de $[0, 2\pi]$; ensuite, on décompose l'exponentielle complexe en cos et sin, et puisque f est paire, la partie en sinus a une intégrale nulle. Donc :

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, nx} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) \,\mathrm{d}x.$$

Ensuite, en utilisant encore la parité, puis le fait que la fonction f est nulle sur $[s, \pi]$,

$$c_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_0^{s} (1 - x/s) \cos(nx) \,\mathrm{d}x.$$

On continue en intégrant par parties, on observe que le crochet est nul aux deux bornes,

$$\pi\, c_n = \Bigl[(1 - x/s)\frac{\sin(nx)}{n}\Bigr]_{x=0}^{s} + \frac{1}{sn} \int_0^{s} \sin(nx) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{sn^2} \bigl(1 - \cos(ns)\bigr).$$

Finalement,

$$\forall n \ne 0, \quad c_n = \frac{2 \sin^2(ns/2)}{\pi s n^2}.$$

On calcule c_0 à part,

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{s} (1 - x/s) \, dx = \frac{s}{2\pi},$$

soit en terminant le calcul, soit en évaluant la surface du triangle formé par le graphe de f.

Pour les coefficients réels, on a $b_n = 0$ pour tout $n \ge 1$ parce que la fonction f est paire, et

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) \,\mathrm{d}x = 2\, c_n = \frac{4 \sin^2(ns/2)}{\pi s n^2}.$$

b. Démontrer que pour tout x réel, on a

$$f(x) = \frac{s}{2\pi} + \frac{4}{\pi s} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(ns/2)}{n^2} \cos(nx).$$

Expliciter le résultat obtenu lorsque $s = \pi$.

Preuve.— Les coefficients de Fourier de f sont absolument sommables, puisqu'on a vu que $|c_n| \le \mathrm{K}\, n^{-2}$ (série de Riemann convergente). De plus, la fonction f est continue. D'après un théorème du cours, on sait que $f(x)$ est égal en tout point à la somme de la série de Fourier, ce qui donne le résultat.

Lorsque $s = \pi$, on voit que pour tout $x \in [-\pi, \pi]$, on a

$$1 - \frac{|x|}{\pi} = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n\pi/2)}{n^2} \cos(nx) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\cos\bigl((2j+1)x\bigr)}{(2j+1)^2}.$$

1. *Dans cette question* H *désigne un espace de Hilbert complexe,* $\langle v, w\rangle$ *le produit scalaire de deux vecteurs quelconques* $v, w \in \mathrm{H}$, *et* $\|v\| = \langle v, v\rangle^{1/2}$ *la norme de* $v \in \mathrm{H}$.

1.a. Si v *et* w *sont dans* H, *calculer* $\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2$ *en fonction du produit scalaire de* v *et* w. *Exprimer* $\langle v, w\rangle$ *à partir de* $\|v+w\|^2$, $\|v-w\|^2$, $\|v+\mathrm{i}w\|^2$ *et* $\|v-\mathrm{i}w\|^2$.

Preuve.— On a vu en cours que

$$\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + 2\ \mathrm{Re}\,\langle v, w\rangle + \|w\|^2$$

et on a aussi

$$\|v-w\|^2 = \|v\|^2 - 2\ \mathrm{Re}\,\langle v, w\rangle + \|w\|^2$$

par conséquent

$$\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2 = 4\ \mathrm{Re}\,\langle v, w\rangle.$$

En remplaçant w par $\mathrm{i}w$ on obtient

$$\|v+\mathrm{i}w\|^2 - \|v-\mathrm{i}w\|^2 = 4\ \mathrm{Re}\,\langle v, \mathrm{i}w\rangle = 4\ \mathrm{Re}\big(-\mathrm{i}\langle v, w\rangle\big) = 4\ \mathrm{Im}\,\langle v, w\rangle.$$

On a finalement

$$\langle v, w\rangle = \mathrm{Re}\,\langle v, w\rangle + \mathrm{i}\ \mathrm{Im}\,\langle v, w\rangle = \frac{1}{4}\Big(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2 + \mathrm{i}\,\|v+\mathrm{i}w\|^2 - \mathrm{i}\,\|v-\mathrm{i}w\|^2\Big).$$

1.b. Si U *est une application linéaire isométrique de* H *dans* H, *c'est-à-dire que* $\|\mathrm{U}v\| = \|v\|$ *pour tout* $v \in \mathrm{H}$, *montrer que* U *conserve le produit scalaire : on a* $\langle \mathrm{U}v, \mathrm{U}w\rangle = \langle v, w\rangle$ *pour tous* $v, w \in \mathrm{H}$. *En déduire que la transformation de Fourier* $\mathcal{F}$ *sur* $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ *vérifie*

$$\forall f, g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}), \quad \big\langle c\,\mathcal{F}f, c\,\mathcal{F}g\big\rangle = \langle f, g\rangle$$

pour une constante $c > 0$ *qu'on déterminera.*

Preuve.— On a en utilisant la question précédente (deux fois : au début et à la fin) et la linéarité de U (sur le corps des complexes)

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{U}v, \mathrm{U}w\rangle &= \frac{1}{4}\Big(\|\mathrm{U}v+\mathrm{U}w\|^2 - \|\mathrm{U}v-\mathrm{U}w\|^2 + \mathrm{i}\,\|\mathrm{U}v+\mathrm{i}\,\mathrm{U}w\|^2 - \mathrm{i}\,\|\mathrm{U}v-\mathrm{i}\,\mathrm{U}w\|^2\Big)\\ &= \frac{1}{4}\Big(\|\mathrm{U}(v+w)\|^2 - \|\mathrm{U}(v-w)\|^2 + \mathrm{i}\,\|\mathrm{U}(v+\mathrm{i}w)\|^2 - \mathrm{i}\,\|\mathrm{U}(v-\mathrm{i}w)\|^2\Big)\\ &= \frac{1}{4}\Big(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2 + \mathrm{i}\,\|v+\mathrm{i}w\|^2 - \mathrm{i}\,\|v-\mathrm{i}w\|^2\Big) = \langle v, w\rangle.\end{aligned}$$

D'après la relation de Parseval, pour tout $c > 0$ et toute fonction $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, on a

$$\|c\,\mathcal{F}f\|_2 = c\,\|\mathcal{F}f\|_2 = c\,\sqrt{2\pi}\,\|f\|_2.$$

Si on choisit $c = (2\pi)^{-1/2}$, on a $c\,\sqrt{2\pi} = 1$, donc

$$\forall f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}), \quad \|(2\pi)^{-1/2}\mathcal{F}f\|_2 = \|f\|_2.$$

Puisque $(2\pi)^{-1/2}\mathcal{F}$ est une isométrie, on en déduit que

$$\langle (2\pi)^{-1/2}\mathcal{F}f, (2\pi)^{-1/2}\mathcal{F}g\rangle = \langle f, g\rangle$$

pour toutes les fonctions $f, g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. En particulier, si deux fonctions f et g sont orthogonales dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, leurs images de Fourier sont encore orthogonales.

2. *On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 - 2|x|$ pour $0 \le |x| \le 1/2$ et $g(x) = 0$ si $|x| \ge 1/2$.*

2.a. Calculer la transformée de Fourier $\widehat{g}$ de g.

Preuve.— On va retrouver les mêmes calculs que dans le premier exercice ; pour $y \ne 0$, on a

$$\widehat{g}(y) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} g(x)\cos(xy)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{1/2}(1-2x)\cos(xy)\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\Bigl(\Bigl[(1-2x)\frac{\sin(xy)}{y}\Bigr]_{x=0}^{1/2} + \frac{2}{y}\int_0^{1/2}\sin(xy)\,\mathrm{d}x\Bigr) = \frac{4}{y^2}\bigl(1-\cos(y/2)\bigr) = \frac{8\sin^2(y/4)}{y^2}.$$

Pour $y = 0$, on peut calculer directement, ou passer à la limite quand $y \to 0$ (ou faire les deux pour vérifier qu'on ne s'est pas trompé !) ; on trouve

$$\widehat{g}(0) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

2.b. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on définit la fonction g_n sur $\mathbb{R}$ en posant $g_n(x) = g(x-n)$ pour tout réel x. Vérifier que pour tous $m \ne n$, on a $\int_{\mathbb{R}} g_m(x)g_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Montrer que les transformées de Fourier $(\widehat{g_n})$ sont deux à deux orthogonales dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.

Preuve.— On voit que g est nulle en dehors de l'intervalle ouvert $(-1/2, 1/2)$; par translation, la fonction g_n est nulle en dehors de l'intervalle ouvert $\mathrm{I}_n = (n-1/2, n+1/2)$; lorsque $m \ne n$, on voit que les deux intervalles ouverts I_m et I_n n'ont aucun point commun, donc $g_m(x)g_n(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$: en effet, si $g_m(x) = g(x-m) \ne 0$, on a $|x-m| < 1/2$, et dans ce cas $|x-n| \ge |n-m| - |x-m| \ge 1 - |x-m| > 1/2$ donc $g_n(x) = 0$. Il en résulte évidemment que

$$\int_{\mathbb{R}} g_m(x)g_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} g_m(x)\overline{g_n(x)}\,\mathrm{d}x = \langle g_m, g_n\rangle = 0\,;$$

d'après la question précédente, les transformées de Fourier $\widehat{g_n} = \mathcal{F}g_n$ sont deux à deux orthogonales, puisque

$$c^2\langle\widehat{g_m}, \widehat{g_n}\rangle = \langle g_m, g_n\rangle = 0.$$

3. *On reprend la fonction g et les fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de la question* **2**.

3.a. Calculer $\widehat{g_n}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, et montrer que $\int_{\mathbb{R}} |\widehat{g}(y)|^2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ny}\,\mathrm{d}y = 0$ quand $n \ne 0$.

Preuve.— On a par le changement de variable $u = x - n$

$$\widehat{g_n}(y) = \int_{\mathbb{R}} g(x-n)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} g(u)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(u+n)y}\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ny}\,\widehat{g}(y).$$

Écrivons l'orthogonalité de $\widehat{g_n}$ et de $\widehat{g_0} = \widehat{g}$, quand $n \ne 0$

$$0 = \langle\widehat{g_n}, \widehat{g}\rangle = \int_{\mathbb{R}} \widehat{g_n}(y)\,\overline{\widehat{g}(y)}\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ny}\,\widehat{g}(y)\,\overline{\widehat{g}(y)}\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{g}(y)|^2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ny}\,\mathrm{d}y.$$

3.b. Montrer que la formule

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{G}(y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{g}(y + 2k\pi)|^2$$

définit une fonction 2π-périodique G *sur* $\mathbb{R}$*, continue sur* $[0, 2\pi]$*. Démontrer que*

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{G}(y)\,\varphi(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{g}(y)|^2 \varphi(y)\,\mathrm{d}y$$

pour toute fonction φ continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\int_0^{2\pi} \mathrm{G}(y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ny}\,\mathrm{d}y = 0$ pour tout n entier relatif $\neq 0$. En déduire que la fonction G *est constante.*

Preuve. — On remarque tout d'abord que la série numérique

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{g}(y + 2k\pi)|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{8 \sin^2(y/4 + k\pi/2)}{(y + 2k\pi)^2}$$

converge pour tout y (comparaison avec la série de Riemann $\sum k^{-2}$). Pour tout $k \geq 0$, considérons la fonction u_k sur $[0, 2\pi]$ définie par

$$u_k(y) = |\widehat{g}(y + 2k\pi)|^2 = \frac{8 \sin^2(y/4 + k\pi/2)}{(y + 2k\pi)^2}.$$

Puisque $y \in [0, 2\pi]$, on a $y \geq 0$ et pour $k \geq 1$,

$$0 \leq u_k(y) \leq \frac{8}{(2k\pi)^2} = \frac{2}{\pi^2 k^2}.$$

La série de fonctions $\sum_{k \geq 1} u_k$ admet sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ une série numérique majorante convergente, à savoir $\sum_{k \geq 1} 2\pi^{-2} k^{-2}$. Il y a donc convergence normale de la série de fonctions sur $[0, 2\pi]$, et il en résulte que la fonction somme de la série, $y \to \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(y)$, est continue sur $[0, 2\pi]$. On procède de même avec les indices négatifs, en posant pour $k > 0$

$$v_k(y) = |\widehat{g}(y - 2k\pi)|^2 = \frac{8 \sin^2(y/4 - k\pi/2)}{(y - 2k\pi)^2}.$$

On montre de même que $y \to \sum_{k=1}^{+\infty} v_k(y)$ est continue sur $[0, 2\pi]$, et pour finir

$$y \to \mathrm{G}(y) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(y) + \sum_{k=1}^{+\infty} v_k(y)$$

est continue sur $[0, 2\pi]$. De plus il est clair par changement d'indice que $\mathrm{G}(y + 2\pi) = \mathrm{G}(y)$: en posant $\ell = k + 1$, qui décrit $\mathbb{Z}$ quand k décrit $\mathbb{Z}$,

$$\mathrm{G}(y + 2\pi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{g}(y + 2\pi + 2k\pi)|^2 = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} |\widehat{g}(y + 2\ell\pi)|^2 = \mathrm{G}(y)\,;$$

la fonction G est donc 2π-périodique.

Si φ est une fonction 2π-périodique continue, elle est bornée par un nombre M ; la fonction $y \to \mathrm{G}(y)\varphi(y)$ est la somme de deux séries normalement convergentes de fonctions, $\sum u_k(y)\varphi(y)$, pour laquelle

$$|u_k(y)| \leq \mathrm{M}\,\frac{2}{\pi^2 k^2},$$

et $\sum v_k(y)\varphi(y)$ qui est aussi normalement convergente. Il en résulte qu'on peut intervertir série et intégrale,

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{G}(y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} |\widehat{g}(y+2k\pi)|^2\varphi(y)\,\mathrm{d}y = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} |\widehat{g}(z)|^2\varphi(z-2k\pi)\,\mathrm{d}z\,;$$

Comme φ est 2π-périodique,

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{G}(y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} |\widehat{g}(z)|^2\varphi(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{\mathrm{N}} \sum_{k=-\mathrm{N}}^{\mathrm{N}-1} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} |\widehat{g}(z)|^2\varphi(z)\,\mathrm{d}z.$$

Pour chaque entier $\mathrm{N} > 0$,

$$\sum_{k=-\mathrm{N}}^{\mathrm{N}-1} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} |\widehat{g}(z)|^2\varphi(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-2\mathrm{N}\pi}^{2\mathrm{N}\pi} |\widehat{g}(z)|^2\varphi(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[-2\mathrm{N}\pi,2\mathrm{N}\pi]}(z)\,|\widehat{g}(z)|^2\varphi(z)\,\mathrm{d}z.$$

La suite des fonctions (f_N) définies par $f_\mathrm{N}(z) = \mathbf{1}_{[-2\mathrm{N}\pi,2\mathrm{N}\pi]}(z)\,|\widehat{g}(z)|^2\varphi(z)$ converge simplement vers la fonction $z \to |\widehat{g}(z)|^2\varphi(z)$, en étant dominée par la fonction intégrable fixe $z \to \mathrm{M}\,|\widehat{g}(z)|^2$; d'après le théorème de convergence dominée,

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{G}(y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y = \lim_{\mathrm{N}} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[-2\mathrm{N}\pi,2\mathrm{N}\pi]}(z)|\widehat{g}(z)|^2\varphi(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{g}(z)|^2\varphi(z)\,\mathrm{d}z.$$

Si on choisit la fonction 2π-périodique $\varphi(y) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ny}$, on obtient que

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{G}(y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ny}\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{g}(y)|^2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ny}\,\mathrm{d}y$$

qui est nul pour tout n entier $\neq 0$ d'après la question précédente.

On voit que les coefficients de Fourier $(c_n(\mathrm{G}))_{n\in\mathbb{Z}}$ sont absolument sommables, puisqu'ils sont tous nuls sauf $c_0(\mathrm{G})$; comme G est continue, on en déduit qu'elle est égale en tout point à la somme de sa série de Fourier,

$$\forall y \in [0, 2\pi], \quad \mathrm{G}(y) = c_0(\mathrm{G}).$$

La fonction G est bien constante.

3.c. Montrer que la valeur constante de la fonction G *est* $\mathrm{C} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |\widehat{g}(y)|^2\,\mathrm{d}y$ *; en déduire que* $\mathrm{C} = 1/3$*. Vérifier que* $1/3 = |\widehat{g}(0)|^2 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} |\widehat{g}(2k\pi)|^2$ *et montrer que*

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(2j+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

Preuve.— On a vu que la valeur constante de la fonction G est

$$\mathrm{C} = c_0(\mathrm{G}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{G}(y)\,\mathrm{d}y\,;$$

en appliquant la question précédente avec $\varphi = 1$, puis Parseval, on obtient

$$\mathrm{C} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{G}(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |\widehat{g}(y)|^2\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2\,\mathrm{d}x$$

et

$$\mathrm{C} = \int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{1/2} (1-2x)^2\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{1/2} (2u)^2\,\mathrm{d}u = 8\int_0^{1/2} u^2\,\mathrm{d}u = 1/3.$$

En écrivant la valeur de G au point $y = 0$ on obtient

$$\mathrm{C} = \mathrm{G}(0) = \sum_{k \in \mathrm{Z}} |\widehat{g}(2k\pi)|^2.$$

Comme $\widehat{g}(\xi) = \widehat{g}(-\xi)$, il en résulte bien que

$$\mathrm{C} = |\widehat{g}(0)|^2 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} |\widehat{g}(2k\pi)|^2.$$

En remplaçant par les valeurs,

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \Big(\frac{8 \sin^2(k\pi/2)}{(2k\pi)^2}\Big)^2 = \frac{1}{4} + 8 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin^4(k\pi/2)}{(k\pi)^4},$$

et

$$\frac{1}{12} = 8 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin^4(k\pi/2)}{\pi^4 k^4} = 8 \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{\pi^4 (2j+1)^4}$$

d'où finalement

$$\frac{\pi^4}{96} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(2j+1)^4}.$$