Analyse hilbertienne et de Fourier, partiel du 11 mars 2006 **durée 3h**

— *Exercice I* —

On considère l'espace de Hilbert $\mathrm{H} = \mathrm{L}^2([0,1])$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

I.a. — Trouver deux nombres réels a, b tels que la fonction $x \in [0,1] \to ax + b$ soit de norme un dans H, et orthogonale à la fonction constante $\mathbf{1}$.

I.b. — On fixe un nombre réel $c > 0$ et pour tout entier $n \ge 1$, on pose $f_n(x) = \sin(c\,nx)$. Déterminer $c > 0$ tel que pour tout $n \ge 1$, les fonctions f_n et f_{n+1} soient orthogonales dans H ; montrer qu'alors les fonctions $(f_n)_{n\ge 1}$ sont deux à deux orthogonales dans H. Trouver la plus petite valeur $c > 0$ vérifiant cette propriété.

— *Exercice II* —

On rappelle que la transformée de Fourier $\mathcal{F}f$ d'une fonction $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ est égale à la limite dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, quand $n \to +\infty$, des transformées de Fourier $\widehat{f_n}$ des fonctions intégrables $f_n = \mathbf{1}_{[-a_n,a_n]}f$, où (a_n) est une suite quelconque de réels tendant vers $+\infty$.

II.a. — On fixe $\lambda > 0$, et à une fonction $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ on associe la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \lambda f(\lambda x)$; vérifier que g est intégrable, comparer les normes $\|f\|_1$ et $\|g\|_1$ de f et g dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Calculer $\widehat{g}(y)$ à partir de $\widehat{f}(y)$, pour tout $y \in \mathbb{R}$.

II.b. — On suppose maintenant que $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, et on définit la fonction g comme à la question précédente. Décrire $\mathcal{F}g$ à partir de $\mathcal{F}f$.

On pose pour tout $y \ge 0$

$$\mathrm{S}(y) = \int_0^y \frac{\sin t}{t}\,dt.$$

On rappelle que $\lim_{y\to+\infty} \mathrm{S}(y) = \pi/2$, et on admettra que $0 \le \mathrm{S}(y) \le \pi$ pour tout $y \ge 0$.

II.c. — On pose $h_1(x) = \mathrm{i}/x$ quand $|x| \ge 1$ et $h_1(x) = 0$ si $|x| < 1$. Montrer que pour presque tout $y \in \mathbb{R}$ on a

$$(\mathcal{F}h_1)(y) = \operatorname{sign}(y)\,\big(\pi - 2\,\mathrm{S}(|y|)\big),$$

où $\operatorname{sign}(t)$ vaut 1 quand $t \ge 0$ et $\operatorname{sign}(t) = -1$ si $t < 0$.

II.d. — Pour tout $\varepsilon > 0$ on pose $h_\varepsilon(x) = \mathrm{i}/x$ quand $|x| \ge \varepsilon$ et $h_\varepsilon(x) = 0$ si $|x| < \varepsilon$. Calculer la transformée de Fourier $\mathcal{F}h_\varepsilon$ (on pourra utiliser les questions *II.b* et *II.c*).

II.e. — On rappelle que si $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et $h \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, la convolée $f * h$ est dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}(f * h)$ est le produit des deux transformées de Fourier. Montrer que pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ et tout $\varepsilon > 0$,

$$\|f * h_\varepsilon\|_2 \le \pi\,\|f\|_2.$$

II.f. — On suppose encore que $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$; montrer que $f * h_\varepsilon$ tend vers une fonction $\mathrm{H}f$ dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ quand $\varepsilon \to 0$; calculer la norme $\|\mathrm{H}f\|_2$ à partir de $\|f\|_2$.