Analyse hilbertienne et de Fourier, corrigé du partiel du 11 mars 2006

— *Exercice I* —

On considère l'espace de Hilbert $\mathrm{H} = \mathrm{L}^2([0,1])$ *muni du produit scalaire*

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

I.a.— Trouver deux nombres réels a, b *tels que la fonction* $x \in [0,1] \to ax + b$ *soit de norme un dans* H, *et orthogonale à la fonction constante* $\mathbf{1}$.

Solution.— L'orthogonalité avec la fonction $\mathbf{1}$ donne l'équation

$$0 = \int_0^1 (ax+b)\,.\,1\,dx = a\int_0^1 x\,dx + b\int_0^1 dx = \frac{a}{2} + b,$$

donc $a + 2b = 0$, par exemple $f(x) = 2x - 1$; calculons la norme de f,

$$\|f\|^2 = \int_0^1 (2x-1)^2\,dx = \int_0^1 (4x^2 - 4x + 1)\,dx = 4\,\frac{1}{3} - 4\,\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{3},$$

donc $\|f\| = 1/\sqrt{3}$. Alors $\sqrt{3}\,f$ est de norme 1, et orthogonale à $\mathbf{1}$, ce qui donne pour solution

$$a = 2\sqrt{3}, \qquad b = -\sqrt{3}$$

(on peut prendre aussi bien $a = -2\sqrt{3}$, $b = \sqrt{3}$).

I.b.— On fixe un nombre réel $c > 0$ *et pour tout entier* $n \ge 1$, *on pose* $f_n(x) = \sin(c\,nx)$. *Déterminer* $c > 0$ *tel que pour tout* $n \ge 1$, *les fonctions* f_n *et* f_{n+1} *soient orthogonales dans* H *; montrer qu'alors les fonctions* $(f_n)_{n\ge1}$ *sont deux à deux orthogonales dans* H. *Trouver la plus petite valeur* $c > 0$ *vérifiant cette propriété.*

Solution.— Par les formules d'addition en trigonométrie,

$$\langle f_n, f_{n+1} \rangle = \int_0^1 \sin(c\,nx)\sin(c(n+1)x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \cos(cx)\,dx - \frac{1}{2}\int_0^1 \cos(c(2n+1)x)\,dx = \frac{1}{2}\Bigl(\frac{\sin c}{c} - \frac{\sin(2nc+c)}{(2n+1)\,c}\Bigr)$$

qui tend vers $\sin(c)/(2c)$ quand $n \to +\infty$. Si $\langle f_n, f_{n+1} \rangle = 0$ pour tout n, il en résulte que $\sin(c) = 0$ à la limite, donc c est un multiple de π, et la plus petite valeur > 0 possible est $c = \pi$. Dans ce cas, on calcule

$$\langle f_m, f_n \rangle = \int_0^1 \sin(\pi mx)\sin(\pi nx)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\Bigl(\int_0^1 \cos(\pi(n-m)x)\,dx - \int_0^1 \cos(\pi(m+n)x)\,dx\Bigr) = 0$$

quand $1 \le m \ne n$; en effet, pour tout entier $k \ne 0$, on a

$$\int_0^1 \cos(k\pi x)\,dx = \Bigl[\frac{\sin(k\pi x)}{k\pi}\Bigr]_{x=0}^{x=1} = \frac{\sin(k\pi)}{k\pi} = 0.$$

On rappelle que la transformée de Fourier $\mathcal{F}f$ d'une fonction $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ est égale à la limite dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, quand $n \to +\infty$, des transformées de Fourier $\widehat{f_n}$ des fonctions intégrables $f_n = \mathbf{1}_{[-a_n,a_n]} f$, où (a_n) est une suite quelconque de réels tendant vers $+\infty$.

II.a. — On fixe $\lambda > 0$, et à une fonction $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ on associe la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \lambda f(\lambda x)$; vérifier que g est intégrable, comparer les normes $\|f\|_1$ et $\|g\|_1$ de f et g dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Calculer $\widehat{g}(y)$ à partir de $\widehat{f}(y)$, pour tout $y \in \mathbb{R}$.

Solution. — On calcule avec $u = \lambda x$

$$\|g\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |g(x)|\, dx = \int_{\mathbb{R}} \lambda |f(\lambda x)|\, dx = \int_{\mathbb{R}} |f(u)|\, du = \|f\|_1,$$

et d'autre part

$$\widehat{g}(y) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\, dx = \int_{\mathbb{R}} \lambda f(\lambda x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(u)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}uy/\lambda}\, du = \widehat{f}(y/\lambda).$$

II.b. — On suppose maintenant que $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, et on définit la fonction g comme à la question précédente. Décrire $\mathcal{F}g$ à partir de $\mathcal{F}f$.

Solution. — Choisissons deux représentants mesurables pour les classes $\mathcal{F}g$ et $\mathcal{F}f$, et désignons les par G et F respectivement. Posons $f_n = \mathbf{1}_{[-\lambda n,\lambda n]} f$ et aussi

$$g_n(x) = \lambda f_n(\lambda x) = \mathbf{1}_{[-\lambda n,\lambda n]}(\lambda x) \lambda f(\lambda x) = \mathbf{1}_{[-n,n]}(x) g(x)\,;$$

on sait que $\widehat{f_n}$ et $\widehat{g}_n$ tendent dans L^2 vers $\mathcal{F}f$ et $\mathcal{F}g$; on peut donc trouver une sous-suite n_k et un ensemble négligeable N tels que $\widehat{f}_{n_k}(y/\lambda)$ et $\widehat{g}_{n_k}(y)$ tendent respectivement vers $\mathrm{F}(y/\lambda)$ et $\mathrm{G}(y)$ pour tout $y \notin \mathrm{N}$. Alors, pour $y \notin \mathrm{N}$,

$$\mathrm{G}(y) = \lim_k \widehat{g}_{n_k}(y) = \lim_k \widehat{f}_{n_k}(y/\lambda) = \mathrm{F}(y/\lambda).$$

Par conséquent, pour presque tout $y \in \mathbb{R}$, on a

$$(\mathcal{F}g)(y) = (\mathcal{F}f)(y/\lambda).$$

On pose pour tout $y \geq 0$

$$\mathrm{S}(y) = \int_0^y \frac{\sin t}{t}\, dt.$$

On rappelle que $\lim_{y\to+\infty} \mathrm{S}(y) = \pi/2$, et on admettra que $0 \leq \mathrm{S}(y) \leq \pi$ pour tout $y \geq 0$.

II.c. — On pose $h_1(x) = \mathrm{i}/x$ quand $|x| \geq 1$ et $h_1(x) = 0$ si $|x| < 1$. Montrer que pour presque tout $y \in \mathbb{R}$ on a

$$(\mathcal{F}h_1)(y) = \mathrm{sign}(y)\,\big(\pi - 2\,\mathrm{S}(|y|)\big),$$

où $\mathrm{sign}(t)$ vaut 1 quand $t \geq 0$ et $\mathrm{sign}(t) = -1$ si $t < 0$.

Solution. — On vérifie facilement que h_1 est de carré intégrable,

$$\int_{\mathbb{R}} |h_1(x)|^2\,dx = 2\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 2.$$

Si les intégrales $\int_{-n}^{n} h_1(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\,dx$ tendent vers une limite $\mathrm{L}(y)$ quand $n \to +\infty$, pour tout $y \in \mathbb{R}$, on sait que la limite $\mathrm{L}(y)$ est égale presque partout à la transformée de Fourier de h_1 au sens de L^2. On développe l'exponentielle complexe,

$$\int_{-n}^{n} h_1(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\,dx = \int_{-n}^{n} h_1(x)\big(\cos(xy) - \mathrm{i}\sin(xy)\big)\,dx.$$

Comme h_1 est impaire, l'intégrale avec le cosinus est nulle et il reste

$$-\mathrm{i}\int_{-n}^{n} h_1(x)\sin(xy)\,dx = -2\mathrm{i}\int_0^{n} h_1(x)\sin(xy)\,dx = 2\int_1^{n} \frac{\sin(xy)}{x}\,dx,$$

qui converge quand $n \to +\infty$, pour tout y ; on obtient donc pour presque tout $y \in \mathbb{R}$

$$(*) \qquad (\mathcal{F}h_1)(y) = 2\int_1^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{x}\,dx.$$

Pour $y > 0$, le changement de variable $u = xy$ donne

$$(\mathcal{F}h_1)(y) = 2\int_y^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\,du = 2\Big(\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\,du - \int_0^{y} \frac{\sin(u)}{u}\,du\Big) = 2\Big(\frac{\pi}{2} - \mathrm{S}(y)\Big).$$

Pour $y < 0$ on obtient le résultat opposé : c'est clair sur la formule $(*)$; on a donc pour $y < 0$

$$(\mathcal{F}h_1)(y) = -(\mathcal{F}h_1)(-y) = \mathrm{sign}(y)(\mathcal{F}h_1)(|y|) = \mathrm{sign}(y)\big(\pi - 2\,\mathrm{S}(|y|)\big).$$

II.d. — Pour tout $\varepsilon > 0$ on pose $h_\varepsilon(x) = \mathrm{i}/x$ quand $|x| \ge \varepsilon$ et $h_\varepsilon(x) = 0$ si $|x| < \varepsilon$. Calculer la transformée de Fourier $\mathcal{F}h_\varepsilon$ (on pourra utiliser les questions II.b et II.c).

Solution. — Si on suit l'indication de l'énoncé, on remarque que $h_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1}h_1(\varepsilon^{-1}x)$, ce qui conduit à

$$(\mathcal{F}h_\varepsilon)(y) = (\mathcal{F}h_1)(\varepsilon y) = \mathrm{sign}(y)\,\big(\pi - 2\,\mathrm{S}\big(\varepsilon|y|\big)\big).$$

Sinon, on refait les calculs de la question précédente, mais avec la borne ε en bas de l'intégrale, au lieu de la borne 1.

II.e. — On rappelle que si $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et $h \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, la convolée $f * h$ est dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}(f * h)$ est le produit des deux transformées de Fourier. Montrer que pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ et tout $\varepsilon > 0$,

$$\|f * h_\varepsilon\|_2 \le \pi\,\|f\|_2.$$

Solution. — D'après l'indication de l'énoncé, on a $0 \le \mathrm{S}(|y|) \le \pi$ donc

$$-\pi = \pi - 2\pi \le \pi - 2\mathrm{S}(|y|) \le \pi\,;$$

il en résulte que $|(\mathcal{F}h_\varepsilon)(y)| \le \pi$ pour presque tout $y \in \mathbb{R}$. On utilise Plancherel :

$$2\pi \,\|f * h_\varepsilon\|_2^2 = \|\widehat{f} \,.\, \mathcal{F}h_\varepsilon\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(y)\,(\mathcal{F}h_\varepsilon)(y)|^2\,dy$$

et comme $|\mathcal{F}h_\varepsilon| \le \pi$,

$$2\pi \,\|f * h_\varepsilon\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(y)|^2 |\mathcal{F}h_\varepsilon)(y)|^2\,dy \le \pi^2 \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(y)|^2\,dy = 2\pi \,.\, \pi^2 \|f\|_2^2.$$

II.f.— On suppose encore que $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ *; montrer que* $f * h_\varepsilon$ *tend vers une fonction* $\mathrm{H}f$ *dans* $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ *quand* $\varepsilon \to 0$ *; calculer la norme* $\|\mathrm{H}f\|_2$ *à partir de* $\|f\|_2$*.*

Solution.— Par Plancherel il suffit encore de montrer que les transformées de Fourier convergent en norme L^2 vers une fonction g, lorsque $\varepsilon \to 0$. Ces transformées de Fourier sont les produits

$$\widehat{f}(y)\,(\mathcal{F}h_\varepsilon)(y) = \widehat{f}(y)\ \mathrm{sign}(y)\big(\pi - 2\,\mathrm{S}(\varepsilon|y|)\big)$$

qui tendent simplement vers $g(y) = \pi\ \mathrm{sign}(y)\,\widehat{f}(y)$ (parce que $\lim_{t\to 0} \mathrm{S}(t) = \mathrm{S}(0) = 0$), en restant dominées par $\pi\,|\widehat{f}(y)|$. Alors

$$\big|g(y) - \widehat{f}(y)\,(\mathcal{F}h_\varepsilon)(y)\big|^2$$

tend simplement vers 0 presque partout, quand $\varepsilon \to 0$, en restant dominé par la fonction intégrable fixe $y \to 4\pi^2 |\widehat{f}(y)|^2$. Par Lebesgue dominé, il en résulte que

$$\int_{\mathbb{R}} \big|g(y) - \widehat{f}(y)\,(\mathcal{F}h_\varepsilon)(y)\big|^2\,dy \to 0$$

quand $\varepsilon \to 0$, ce qui signifie que les transformées de Fourier g_ε des $f * h_\varepsilon$ tendent vers la limite g, et $f * h_\varepsilon = \mathcal{F}^{-1} g_\varepsilon$ converge dans L_2 vers $\mathrm{H}f = \mathcal{F}^{-1} g$.

En appliquant Parseval comme à la question précédente, on trouve que

$$2\pi \,\|\mathrm{H}f\|_2^2 = \|g\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |g(y)|^2\,dy = \int_{\mathbb{R}} |\pi\,\mathrm{sign}(y)\widehat{f}(y)|^2\,dy$$

et comme $|g(y)| = \pi |\widehat{f}(y)|$ presque partout,

$$2\pi \,\|\mathrm{H}f\|_2^2 = \pi^2 \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(y)|^2\,dy = 2\pi \,.\, \pi^2 \|f\|_2^2,$$

donc

$$\|\mathrm{H}f\|_2 = \pi\,\|f\|_2.$$