Analyse hilbertienne et de Fourier, examen du 5 septembre 2006

Les documents sont interdits *durée 3h*

— *Exercice I* —

On désigne par Y la fonction $\mathbf{1}_{[0,\infty[}$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{Y}(x) = 1$ pour $x \geq 0$ et $\mathrm{Y}(x) = 0$ si $x < 0$. Pour chaque nombre complexe a tel que $\operatorname{Re} a < 0$, on introduit la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}$ par $f_a(x) = \mathrm{Y}(x)\, \mathrm{e}^{ax}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que f_a est intégrable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa transformée de Fourier $\widehat{f_a}$.

2. Montrer avec un minimum de calculs que la convolée $f_a * f_b$ est égale à $(f_a - f_b)/(a - b)$ lorsque $b \neq a$ et $\operatorname{Re} b < 0$.

3. On désigne par c un nombre réel > 0. Calculer la transformée de Fourier de la fonction $\mathrm{F}_c : x \in \mathbb{R} \to 2\,c\,\mathrm{Y}(x)\,\mathrm{e}^{-cx} \sin(cx)$; vérifier que $\widehat{\mathrm{F}_c}(0) = 1$.

4. Pour un signal $t \to u(t)$ intégrable et de carré intégrable sur $\mathbb{R}$ et pour $\xi > 0$, on introduit la quantité

$$\mathrm{E}_\xi(u) = \Bigl(\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{|y|>\xi}\, |\widehat{u}(y)|^2 \,\mathrm{d}y \Bigr)^{1/2}$$

qui mesure l'énergie correspondant aux pulsations $\geq \xi$ contenues dans le signal u. On filtre le signal u en le convolant avec F_c, obtenant ainsi le signal $v = u * \mathrm{F}_c$ défini par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad v(t) = \int_{\mathbb{R}} u(t-x)\mathrm{F}_c(x)\,\mathrm{d}x.$$

Montrer que

$$\mathrm{E}_\xi(v) \leq 2\,c^2 (\xi^4 + 4c^4)^{-1/2}\, \mathrm{E}_\xi(u)\,;$$

vérifier en particulier que $\mathrm{E}_{4c}(v) < \frac{1}{8}\,\mathrm{E}_{4c}(u)$.

— *Exercice II* —

On désigne par H l'espace de Hilbert des fonctions complexes de carré intégrable sur $[0, 2\pi]$, muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)\,\overline{g(x)}\,\frac{\mathrm{d}x}{2\pi}.$$

1. On donne une suite $(a_k)_{k\geq 0}$ de nombres complexes telle que $\sum_{k\geq 0} |a_k| < +\infty$, et pour chaque entier $k \geq 0$ on considère la fonction u_k définie sur $\mathbb{R}$ par $u_k(x) = a_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$. Montrer que la série de fonctions $\sum u_k$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, et que sa somme définit une fonction g continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$. Déterminer les coefficients de Fourier complexes $(c_n(g))_{n\in\mathbb{Z}}$ de la fonction g.

2. Dans cette question on désigne par s un paramètre réel et on considère la fonction 2π-périodique $g_s(x) = \exp\bigl(s\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\bigr)$. Déterminer les coefficients de Fourier complexes de la fonction g_s. Montrer que le produit scalaire $\langle g_s, g_t \rangle$ dans l'espace H est égal à

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{s^k t^k}{(k!)^2}.$$

3. Montrer que la fonction φ définie par

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad \varphi(s) = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{s\cos x}\,\frac{\mathrm{d}x}{2\pi}$$

est développable en série entière $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k s^k$ et déterminer les coefficients $(b_k)_{k\geq 0}$.

Rappels.

Transformation de Fourier

L'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des fonctions complexes f de carré intégrable sur $\mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x < +\infty.$$

Le produit scalaire sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ est défini par

$$\forall f, g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}), \quad \langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x\,;$$

la norme de l'espace de Hilbert $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ est définie par

$$\forall f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}), \quad \|f\|_2 = \Bigl(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x\Bigr)^{1/2} = \sqrt{\langle f, f\rangle}.$$

La transformation de Fourier est définie sur l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ en associant à toute fonction g intégrable sur $\mathbb{R}$ la fonction $\widehat{g}$ définie par

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \widehat{g}(y) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\,\mathrm{d}x.$$

Lorsque $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, la transformée de Fourier $\mathcal{F}f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ est la limite dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ de la suite $(\widehat{f_n})$ des transformées de Fourier des fonctions intégrables $f_n = \mathbf{1}_{[-n,n]}\,f$. Si f est à la fois dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, on a $\mathcal{F}f = \widehat{f}$ presque partout. La relation de Parseval affirme que

$$\forall f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}), \quad \|\mathcal{F}f\|_2 = \sqrt{2\pi}\,\|f\|_2.$$

Séries de Fourier

Si f est une fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, intégrable sur chaque période, les coefficients de Fourier complexes de la fonction f sont définis pour tout $n \in \mathbb{Z}$ par

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x\,;$$

les coefficients de Fourier réels de f sont définis en posant d'une part

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x$$

pour tout entier $n \geq 0$, et d'autre part en posant

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x$$

pour tout entier $n \geq 1$. Les sommes de Fourier de f sont données pour tout $n \geq 0$ par les expressions

$$(\mathrm{S}_n f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \bigl(a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin(kx)\bigr).$$