Analyse hilbertienne et de Fourier, corrigé de l'examen du 5 septembre 2006

— *Exercice I* —

On désigne par Y *la fonction* $\mathbf{1}_{[0,\infty[}$ *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $\mathrm{Y}(x) = 1$ *pour* $x \geq 0$ *et* $\mathrm{Y}(x) = 0$ *si* $x < 0$. *Pour chaque nombre complexe* a *tel que* $\operatorname{Re} a < 0$, *on introduit la fonction* f_a *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f_a(x) = \mathrm{Y}(x)\, \mathrm{e}^{ax}$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que f_a *est intégrable sur* $\mathbb{R}$ *et calculer sa transformée de Fourier* $\widehat{f_a}$.

Solution. — Si on écrit $a = u + \mathrm{i}v$, avec u et v réels et $u < 0$, on a pour $x \geq 0$, en posant $c = -u > 0$

$$|f_a(x)| = |\,\mathrm{e}^{ax}\,| = |\,\mathrm{e}^{ux}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}vx}\,| = \mathrm{e}^{ux} = \mathrm{e}^{-cx}\,;$$

pour $x < 0$, on a $f_a(x) = 0$, par conséquent

$$\int_{\mathbb{R}} |f_a(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-cx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{c} < +\infty,$$

donc f_a est intégrable sur $\mathbb{R}$. Ensuite,

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f_a}(y) = \int_{\mathbb{R}} f_a(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(a-\mathrm{i}y)x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\mathrm{i}y - a}\cdot$$

2. Montrer avec un minimum de calculs que la convolée $f_a * f_b$ *est égale à* $(f_a - f_b)/(a - b)$ *lorsque* $b \neq a$ *et* $\operatorname{Re} b < 0$.

Solution. — Puisque f_a et f_b sont intégrables, on sait d'après le cours que $f_a * f_b \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$; on sait aussi que Fourier est injectif sur $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et transforme convolution en produit ordinaire. Il suffit donc de vérifier que les transformées de Fourier de $(f_a - f_b)/(a - b)$ et $f_a * f_b$ coïncident, pour tout y réel :

$$\frac{1}{a-b}\big(\widehat{f_a}(y) - \widehat{f_b}(y)\big) = \frac{1}{a-b}\Big(\frac{1}{\mathrm{i}y - a} - \frac{1}{\mathrm{i}y - b}\Big) = \frac{1}{a-b}\,\frac{a-b}{(\mathrm{i}y-a)(\mathrm{i}y-b)} = \widehat{f_a}(y)\widehat{f_b}(y),$$

ce qui prouve le résultat.

3. On désigne par c *un nombre réel* > 0. *Calculer la transformée de Fourier de la fonction* $\mathrm{F}_c : x \in \mathbb{R} \to 2\,c\,\mathrm{Y}(x)\,\mathrm{e}^{-cx}\sin(cx)$ *; vérifier que* $\widehat{\mathrm{F}_c}(0) = 1$.

Solution. — On voit que

$$\mathrm{F}_c(x) = 2\,c\,\mathrm{Y}(x)\,\mathrm{e}^{-cx}\Big(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}cx} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}cx}}{2\mathrm{i}}\Big) = \frac{c}{\mathrm{i}}\big(f_{-c+\mathrm{i}c}(x) - f_{-c-\mathrm{i}c}(x)\big),$$

par conséquent

$$\widehat{\mathrm{F}_c}(y) = \frac{c}{\mathrm{i}}\Big(\frac{1}{\mathrm{i}y + c - \mathrm{i}c} - \frac{1}{\mathrm{i}y + c + \mathrm{i}c}\Big) = \frac{2c^2}{(\mathrm{i}y + c)^2 + c^2} = \frac{2c^2}{2c^2 - y^2 + 2\mathrm{i}yc}\cdot$$

En particulier

$$\widehat{\mathrm{F}_c}(0) = \frac{2\,c^2}{2\,c^2} = 1.$$

4. Pour un signal $t \to u(t)$ *intégrable et de carré intégrable sur* $\mathbb{R}$ *et pour* $\xi > 0$, *on introduit la quantité*

$$\mathrm{E}_\xi(u) = \Big(\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{|y|>\xi}\,|\widehat{u}(y)|^2\,\mathrm{d}y\Big)^{1/2}$$

qui mesure l'énergie correspondant aux pulsations $\geq \xi$ contenues dans le signal u. On filtre le signal u en le convolant avec F_c, obtenant ainsi le signal $v = u * \mathrm{F}_c$ défini par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad v(t) = \int_{\mathbb{R}} u(t-x)\mathrm{F}_c(x)\,\mathrm{d}x.$$

Montrer que

$$\mathrm{E}_\xi(v) \leq 2\,c^2(\xi^4 + 4c^4)^{-1/2}\,\mathrm{E}_\xi(u)\,;$$

vérifier en particulier que $\mathrm{E}_{4c}(v) < \frac{1}{8}\,\mathrm{E}_{4c}(u)$.

Solution. — La transformée de Fourier $\widehat{v}$ est égale au produit $\widehat{u}\,\widehat{\mathrm{F}_c}$, donc

$$\mathrm{E}_\xi(v)^2 = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{|y|>\xi}\,|\widehat{u}(y)|^2|\widehat{\mathrm{F}_c}(y)|^2\,dy\,;$$

calculons le carré du module de $\widehat{\mathrm{F}_c}(y)$; on a

$$|\widehat{\mathrm{F}_c}(y)|^2 = \frac{4c^4}{|2c^2 - y^2 + 2\mathrm{i}\,yc|^2} = \frac{4c^4}{(2c^2-y^2)^2 + 4y^2c^2} = \frac{4c^4}{4c^4+y^4}.$$

Lorsque $|y| > \xi$,

$$|\widehat{\mathrm{F}_c}(y)|^2 = \frac{4c^4}{4c^4+y^4} \leq \frac{4c^4}{4c^4+\xi^4}.$$

Il en résulte que

$$\mathrm{E}_\xi(v)^2 \leq \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{|y|>\xi}\,|\widehat{u}(y)|^2 \frac{4c^4}{4c^4+\xi^4}\,dy = \frac{4c^4}{4c^4+\xi^4}\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{|y|>\xi}\,|\widehat{u}(y)|^2\,dy = \frac{4c^4}{4c^4+\xi^4}\,\mathrm{E}_\xi(u)^2.$$

On a donc bien

$$\mathrm{E}_\xi(v) \leq \frac{2c^2}{\sqrt{4c^4+\xi^4}}\,\mathrm{E}_\xi(u).$$

En oubliant le $4c^4$ du dénominateur on obtient aussi $\mathrm{E}_\xi(v)/\mathrm{E}_\xi(u) \leq 2c^2/\sqrt{\xi^4} = 2c^2/\xi^2$. Lorsque $\xi = 4c$, on a

$$\frac{\mathrm{E}_{4c}(v)}{\mathrm{E}_{4c}(u)} \leq \frac{2c^2}{(4c)^2} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}.$$

— *Exercice II* —

On désigne par H l'espace de Hilbert des fonctions complexes de carré intégrable sur $[0, 2\pi]$, muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)\,\overline{g(x)}\,\frac{\mathrm{d}x}{2\pi}.$$

1. On donne une suite $(a_k)_{k\geq 0}$ de nombres complexes telle que $\sum_{k\geq 0}|a_k| < +\infty$, et pour chaque entier $k \geq 0$ on considère la fonction u_k définie sur $\mathbb{R}$ par $u_k(x) = a_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}$. Montrer que la série de fonctions $\sum u_k$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, et que sa somme définit une fonction g continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$. Déterminer les coefficients de Fourier complexes $(c_n(g))_{n\in\mathbb{Z}}$ de la fonction g.

Solution. — Pour tout x réel on a

$$|u_k(x)| = |a_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}\,| = |a_k|.$$

La norme uniforme $\|u_k\|_{u,\mathbb{R}}$ de la fonction u_k sur $\mathbb{R}$ est donc égale à $|a_k|$, donc $\sum \|u_k\|_{u,\mathbb{R}} < +\infty$: il y a convergence normale. Comme chacune des fonctions u_k est continue, la somme g de la série est continue. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$g(x+2\pi) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k(x+2\pi)} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx} = g(x).$$

Comme la série de fonctions converge normalement, on peut intervertir série et intégrale sur un intervalle borné ; pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a

$$c_n(g) = \int_0^{2\pi} g(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,\frac{\mathrm{d}x}{2\pi} = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} a_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,\frac{\mathrm{d}x}{2\pi}\,;$$

mais pour chaque $k \geq 0$

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,\frac{\mathrm{d}x}{2\pi} = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-n)x}\,\frac{\mathrm{d}x}{2\pi}$$

est égal à 0 quand $k - n \neq 0$ et à 1 si $k - n = 0$ (c'est-à-dire si $k = n$, ce qui ne peut pas se produire quand $n < 0$) ; dans la série précédente, tous les termes sont donc nuls sauf pour $k = n$, et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} a_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,\frac{\mathrm{d}x}{2\pi} = \int_0^{2\pi} a_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,\frac{\mathrm{d}x}{2\pi} = a_n$$

lorsque $n \geq 0$ et $c_n(g) = 0$ si $n < 0$.

2. Dans cette question on désigne par s un paramètre réel et on considère la fonction 2π-périodique $g_s(x) = \exp\big(s\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\big)$. Déterminer les coefficients de Fourier complexes de la fonction g_s. Montrer que le produit scalaire $\langle g_s, g_t\rangle$ dans l'espace H *est égal à*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{s^k t^k}{(k!)^2}.$$

Solution. — En développant l'exponentielle

$$\exp\big(s\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\big) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{s^k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{k!}$$

on voit que g_s se présente comme la somme d'une série $g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ avec $a_k = s^k/(k!)$ pour tout $k \geq 0$, donc d'après la question précédente

$$c_n(g_s) = \frac{s^n}{n!}$$

pour $n \geq 0$ et $c_n(g_s) = 0$ si $n < 0$. De même g_t se développe dans la base hilbertienne de H formée des exponentielles complexes, et on sait que le produit scalaire est alors égal à

$$\langle g_s, g_t\rangle = \sum_{n\in\mathrm{Z}} c_n(g_s)\,\overline{c_n(g_t)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{s^k}{k!}\,\frac{t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{s^k t^k}{(k!)^2}.$$

3. Montrer que la fonction φ définie par

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad \varphi(s) = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{s\cos x}\,\frac{\mathrm{d}x}{2\pi}$$

est développable en série entière $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k s^k$ et déterminer les coefficients $(b_k)_{k\geq 0}$.

Solution. — On a pour tout s réel

$$\varphi(s) = \int_0^{2\pi} \exp\Big(s\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}\Big)\,\frac{\mathrm{d}x}{2\pi} = \int_0^{2\pi} \exp\Big(\frac{s}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\Big)\exp\Big(\frac{s}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\Big)\,\frac{\mathrm{d}x}{2\pi}$$

$$= \int_0^{2\pi} g_{s/2}(x)\,\overline{g_{s/2}(x)}\,\frac{\mathrm{d}x}{2\pi} = \langle g_{s/2}, g_{s/2}\rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(s/2)^k}{k!}\,\frac{(s/2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{s^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}.$$