**Analyse hilbertienne et de Fourier, examen final du 10 mai 2007**

*Les documents sont interdits* *durée 3h*

— *Exercice I* —

Soit $t$ un nombre réel $> 0$ fixé ; on considère la fonction $2\pi$-périodique $f_t$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f_t(x) = \mathrm{e}^{tx}$ lorsque $-\pi < x \le \pi$.

**1.a.** Représenter sommairement le graphe de $f_t$ sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$.

**1.b.** Calculer les coefficients de Fourier $(c_n(f_t))_{n\in\mathbb{Z}}$ de la fonction $f_t$. Calculer la norme $\mathrm{L}^2$ de la fonction $f_t$ et montrer que

$$\pi\,\frac{\mathrm{e}^{2\pi t} - \mathrm{e}^{-2\pi t}}{t} = \left(\mathrm{e}^{t\pi} - \mathrm{e}^{-t\pi}\right)^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|t - \mathrm{i}n|^2}.$$

En déduire que

$$\pi\,\frac{\mathrm{ch}(\pi t)}{\mathrm{sh}(\pi t)} = \frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2t}{t^2 + n^2}.$$

**2.** Montrer que

$$f_t(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f_t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$$

pour tout $x \in \,]-\pi, \pi[$. En déduire une expression simple de la somme de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^2}{t^2 + n^2}.$$

— *Exercice II* —

**1.a.** On définit la fonction $\varphi$ sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = 2\left(\mathbf{1}_{[-\pi/2,\pi/2]}(x)\right) - \mathbf{1}_{[-\pi,\pi]}(x).$$

Vérifier que $\varphi(x) = 1$ pour $|x| \le \pi/2$ et $\varphi(x) = -1$ pour $\pi/2 < |x| \le \pi$. Tracer le graphe de $\varphi$. Calculer $\widehat{\varphi}(0)$ ; montrer que

$$\widehat{\varphi}(y) = \frac{4\sin(\pi y/2) - 2\sin(\pi y)}{y}$$

pour tout $y \ne 0$. Expliciter $\widehat{\varphi}(n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ non nul.

**1.b.** On considère la fonction $f$ qui est $2\pi$-périodique sur $\mathbb{R}$ et égale à $\varphi$ sur $[-\pi, \pi]$. Déterminer les coefficients de Fourier $c_n(f)$, $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\widehat{\varphi}(k)}{\pi}\,\cos(kt)\right|^2 \frac{\mathrm{d}t}{2\pi} = 0.$$

**1.c.** En déduire que pour $x \in [0, \pi]$ on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{1}_{[0,x]}(t)\,f(t)\,\frac{\mathrm{d}t}{2\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\widehat{\varphi}(n)}{2\pi^2 n}\,\sin(nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{1}_{[-x,0]}(t)\,f(t)\,\frac{\mathrm{d}t}{2\pi}.$$

**TOURNEZ S.V.P.**

**2.a.** Pour tout $x$ réel on pose

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Calculer $\mathrm{F}(x)$ pour tout $x$ ; vérifier que $\mathrm{F}(x) = x$ si $|x| \leq \pi/2$ et $\mathrm{F}(x) = 0$ si $|x| \geq \pi$ ; tracer le graphe de la fonction F.

**2.b.** Déduire de **1.c** que pour tout $x \in [-\pi, \pi]$ on a

$$\mathrm{F}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \,\frac{4}{\pi(2k+1)^2}\, \sin\big((2k+1)x\big).$$

**2.c.** Expliciter l'égalité précédente dans le cas $x = \pi/2$.

**3.a.** Soit $g$ une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ ; pour chaque entier $n > 0$, calculer la transformée de Fourier de la fonction $g_n$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_n(x) = \frac{g(x+n) - g(x-n)}{2}.$$

Vérifier que $\|g_n\|_1 \leq \|g\|_1$.

**3.b.** On suppose de plus que la transformée de Fourier $\widehat{g}$ de $g$ est nulle en dehors de $[-\pi/2, \pi/2]$, et que $g$ est de classe $\mathrm{C}^1$, avec $g'$ intégrable. Montrer que la fonction dérivée $g'$ est égale à la somme de la série de fonctions

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \,\frac{4}{\pi(2k+1)^2}\, g_{2k+1}.$$

En déduire que

$$\|g'\|_1 \leq \frac{\pi}{2}\, \|g\|_1$$

(on utilisera le résultat de la question **2.c**).

**Rappels.**

Si A est un sous-ensemble d'un ensemble X, on désigne par $\mathbf{1}_{\mathrm{A}}$ la *fonction indicatrice de* A, égale à 1 sur l'ensemble A et à 0 en dehors de A. On rappelle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

*Transformation de Fourier*

L'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$ ; la norme de l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ est définie par

$$\forall f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}), \quad \|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \,\mathrm{d}x.$$

L'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{R}$ ; la norme de l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ est définie par

$$\forall f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}), \quad \|f\|_2 = \Big(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x\Big)^{1/2}.$$

La transformation de Fourier est définie sur l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ en associant à toute fonction $g$ intégrable sur $\mathbb{R}$ la fonction $\widehat{g}$ définie par

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \widehat{g}(y) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy} \,\mathrm{d}x.$$

Quand $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, la fonction $\widehat{g}$ est continue, et elle est bornée par $\|g\|_1$. Quand $g$ est continue sur $\mathbb{R}$ et que $g$ et $\widehat{g}$ sont intégrables, on a la formule *d'inversion de Fourier*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{g}(y)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xy} \,\mathrm{d}y.$$

La transformation de Fourier est injective sur $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Lorsque $g$ est de classe $\mathrm{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et que $g$ et $g'$ sont intégrables, la dérivée $g'$ admet pour transformée de Fourier la fonction

$$y \in \mathbb{R} \to \mathrm{i}y\widehat{g}(y).$$

Lorsque $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, la transformée de Fourier $\mathcal{F}f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ est dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Si $f$ est à la fois dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, on a $\mathcal{F}f = \widehat{f}$ presque partout. La relation de Parseval affirme que

$$\forall f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}), \quad \|\mathcal{F}f\|_2 = \sqrt{2\pi}\,\|f\|_2.$$

*Séries de Fourier*

Si $f$ est une fonction $2\pi$-périodique sur $\mathbb{R}$, intégrable sur $[-\pi, \pi]$, on définit ses *coefficients de Fourier* en posant pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$c_n(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} \,\frac{\mathrm{d}t}{2\pi}.$$

Les fonctions $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définies par $e_n(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$ forment une base hilbertienne de l'espace de Hilbert $\mathrm{L}^2([-\pi, \pi], \mathrm{d}x/(2\pi))$. Lorsque $f$ est de carré sommable sur $[-\pi, \pi]$, on a l'égalité de Bessel-Parseval

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \,\frac{\mathrm{d}t}{2\pi} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2.$$

Si $x \in \mathbb{R}$ est tel que l'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi} \Big|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\Big| \,\mathrm{d}t$ soit finie, la série de Fourier $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ converge et sa somme est égale à $f(x)$.