Analyse hilbertienne et de Fourier, corrigé du partiel du 17 mars 2007

— *Exercice I* —

1.a. *On désigne par* φ *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$\varphi(x) = \frac{\sin x}{x} \quad \text{pour} \quad x \neq 0, \quad \text{et} \quad \varphi(0) = 1.$$

Montrer que la fonction φ *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}$ *et que* $\varphi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.

Preuve. — Quand $x \neq 0$, on voit que $\varphi'(x)$ existe, par les règles usuelles de calcul des dérivées ; on trouve

$$\varphi'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2},$$

et cette fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ est continue pour tout $x \neq 0$; pour calculer $\varphi'(0)$ on étudie

$$\lim_{x \to 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = 0,$$

puisque $\sin x - x \sim -x^3/6$; ainsi $\varphi'(0) = 0$, et de plus

$$\lim_{x \to 0} \varphi'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x(1 - x^2/2) - x + o(x^2)}{x^2} = 0,$$

ce qui montre que φ' existe et est continue sur $\mathbb{R}$.

On a toujours $|\sin x| \leq |x|$, donc $|\varphi(x)| \leq 1$, et on a aussi $|\sin x| \leq 1$; il en résulte que

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)^2 \, \mathrm{d}x = 2\Bigl(\int_0^{+\infty} \varphi(x)^2 \, \mathrm{d}x\Bigr) \leq 2\Bigl(\int_0^1 \mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}\Bigr) = 4 < +\infty.$$

1.b. *On désigne par* f_0 *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$f_0(x) = 1 - |x| \quad \text{pour} \quad |x| \leq 1, \quad \text{et} \quad f_0(x) = 0 \quad \text{si} \quad |x| \geq 1.$$

Tracer le graphe de f_0. *Vérifier que* $f_0 \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, *puis calculer la transformée de Fourier* $\widehat{f_0}$ *de* f_0. *Vérifier que* $\widehat{f_0}$ *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}$.

Preuve. — La fonction f_0 est ≥ 0 bornée par 1, et elle est nulle en dehors de $[-1, 1]$, donc $\int_{\mathbb{R}} |f_0| = \int_{\mathbb{R}} f_0 \leq 2$, par conséquent la fonction f_0 est intégrable sur $\mathbb{R}$. De plus, f_0 est paire, donc pour $y \neq 0$ on a

$$\widehat{f_0}(y) = 2 \int_0^{+\infty} f_0(x) \cos(xy) \, \mathrm{d}x = 2 \int_0^1 (1 - x) \cos(xy) \, \mathrm{d}x$$

$$= 2 \left(\Bigl[(1 - x) \frac{\sin(xy)}{y}\Bigr]_{x=0}^1 + \int_0^1 \frac{\sin(xy)}{y} \, \mathrm{d}x \right) = 2 \left(0 + \Bigl[-\frac{\cos(xy)}{y^2}\Bigr]_{x=0}^1 \right)$$

$$= 2 \left(\frac{1 - \cos(y)}{y^2} \right) = 4 \, \frac{\sin^2(y/2)}{y^2} = \varphi(y/2)^2,$$

et pour $y = 0$,

$$\widehat{f_0}(0) = 2 \int_0^{+\infty} f_0(x) \, \mathrm{d}x = 2 \int_0^1 (1 - x) \, \mathrm{d}x = 1 = \varphi(0)^2.$$

D'après la question **1.a**, la fonction φ est de classe C^1, donc $\widehat{f_0} : y \to \varphi(y/2)^2$ est de classe C^1.

1.c. *À l'aide de ce qui précède, donner la transformée de Fourier de la fonction g_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $g_0(x) = \big(\varphi(x/2)\big)^2$, et calculer $\|g_0\|_1$. Déterminer la transformée de Fourier de la dérivée g_0'.*

Preuve. — On applique l'inversion de Fourier : puisque f_0 est continue, intégrable et que $g_0 = \widehat{f_0}$ est intégrable, on sait que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} g_0(y)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}xy}\, \mathrm{d}y.$$

Comme g_0 est paire, on aura

$$\widehat{g_0}(x) = \int_{\mathbb{R}} g_0(y)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\, \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} g_0(y)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}xy}\, \mathrm{d}y = 2\pi f_0(x).$$

Lorsque $x = 0$ on obtient

$$2\pi = 2\pi f_0(0) = \widehat{g_0}(0) = \int_{\mathbb{R}} g_0(y)\, \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} |g_0(y)|\, \mathrm{d}y = \|g_0\|_1.$$

Montrons que g_0' est intégrable. Comme g_0 est de classe C^1, on sait que la fonction g_0' est bornée sur $[-1, 1]$, donc intégrable sur cet intervalle. Il reste à vérifier l'intégrabilité à l'infini. On calcule

$$g_0'(x) = \varphi(x/2)\, \varphi'(x/2).$$

D'après les calculs de **1.a**, on a pour $|x| \ge 1$

$$|g_0'(x)| \le \frac{2}{|x|} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{|x|} \right) \le \frac{4}{x^2}$$

qui est intégrable à l'infini. On sait alors que

$$\widehat{g_0'}(y) = \mathrm{i}y\, \widehat{g_0}(y) = 2\pi\, \mathrm{i}y\, f_0(y).$$

2.a. *On suppose ici que g est continue, intégrable sur $\mathbb{R}$ et que sa transformée de Fourier $\widehat{g}$ est nulle en dehors de $[-1, 1]$. Montrer que $\widehat{g}$ est intégrable et de carré intégrable ; en déduire que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est égale à*

$$g'(x) = \frac{\mathrm{i}}{2\pi} \int_{-1}^{1} y\, \widehat{g}(y)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}xy}\, \mathrm{d}y.$$

Preuve. — La fonction $\widehat{g}$ est bornée sur $\mathbb{R}$ par $\|g\|_1$, et elle est nulle en dehors de $[-1, 1]$. Il en résulte que $\widehat{g}$ est intégrable et de carré intégrable. D'après Fourier inverse

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{g}(y)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}xy}\, \mathrm{d}y,$$

et on peut dériver sous l'intégrale car $y \to y\,\widehat{g}(y)$ est elle aussi bornée et nulle en dehors de $[-1, 1]$, donc intégrable. On obtient

$$g'(x) = \frac{\mathrm{i}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} y\, \widehat{g}(y)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}xy}\, \mathrm{d}y.$$

Il y a aussi continuité sous l'intégrale, donc g est de classe C^1.

2.b. *Montrer que g et g' sont dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, et que $\|g'\|_2 \le \|g\|_2$.*

Preuve. — On a dit que $\widehat{g}$ est dans L^1 et dans L^2, donc sa transformée de Fourier au sens de L^2 est égale à

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{g}(y)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\, \mathrm{d}y = 2\pi\, g(-x).$$

D'après Parseval, g est dans L^2. Puisque $\widehat{g}$ est nulle en dehors de $[-1,1]$ on a

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad |\widehat{g'}(y)| = |y\,\widehat{g}(y)| \le |\widehat{g}(y)|. \tag{1}$$

Comme $y \to \mathrm{i}y\,\widehat{g}(y)$ est à la fois dans L^2 et dans L^1, sa transformée de Fourier au sens de L^2 est égale à

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{i}y\,\widehat{g}(y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\,\mathrm{d}y = 2\pi g'(-x).$$

D'après Parseval, g' est dans L^2, et l'inégalité (1) implique $\|g'\|_2 \le \|g\|_2$, puisque

$$2\pi \int_{\mathbb{R}} |g'(x)|^2\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{g'}(y)|^2\,\mathrm{d}y \le \int_{\mathbb{R}} |\widehat{g}(y)|^2\,\mathrm{d}y = 2\pi \int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2\,\mathrm{d}x.$$

2.c. *Expliquer pourquoi l'inégalité de* **2.b** *ne peut pas être améliorée (c'est-à-dire que pour tout* $t < 1$*, il existe une fonction* g *vérifiant les hypothèses de* **2.a** *et telle que* $\|g'\|_2 > t\,\|g\|_2$ *; on pourra essayer* $g_t(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\,g_0(x - tx)$ *pour* $0 \le t < 1$*).*

Preuve. — On montre que la transformée de Fourier de g_t est nulle en dehors de $[2t-1, 1]$, intervalle qui se rapproche du point 1 quand $t \to 1-$. Sur cet intervalle on a $y > 2t-1$, ce qui permet de renverser les inégalités dans les raisonnements de la question précédente. On montre en effet si $0 < t < 1$ que

$$\widehat{g_t}(y) = \int_{\mathbb{R}} g_t(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} g_0(x - tx)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x(y-t)}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{1-t}\int_{\mathbb{R}} g_0(u)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}u(y-t)/(1-t)}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{1-t}\,\widehat{g_0}\Big(\frac{y-t}{1-t}\Big) = \frac{2\pi}{1-t}\,f_0\Big(\frac{y-t}{1-t}\Big).$$

Le résultat est non nul si et seulement si

$$-1 < \frac{y-t}{1-t} < 1$$

c'est-à-dire si $t - 1 < y - t < 1 - t$, ou encore $2t - 1 < y < 1$. Il en résulte que

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad |\widehat{g_t'}(y)| = |y\,\widehat{g_t}(y)| \ge (2t-1)\,|\widehat{g_t}(y)|. \tag{2}$$

En utilisant Parseval comme avant, on obtient

$$\|g_t'\|_2 \ge (2t-1)\,\|g_t\|_2,$$

et $2t-1$ tend vers 1 quand $t \to 1$ (l'indication de l'énoncé n'est pas très bonne, puisqu'elle semble dire qu'avec g_t on obtient l'inégalité $\|g'\|_2 > t\,\|g\|_2$, ce qui n'est pas tout à fait vrai).

3.a. *On pose* $\mathrm{F}(y) = f_0(y-1) - f_0(y+1)$ *pour tout* $y \in \mathbb{R}$*, où* f_0 *est la fonction définie à la question* **1.b**. *Calculer* $\mathrm{F}(y)$ *lorsque* $|y| \le 1$ *; déterminer la fonction intégrable* G *telle que* $\mathrm{F} = \widehat{\mathrm{G}}$ *; vérifier que* $\|\mathrm{G}\|_1 \le 2$.

Preuve. — Supposons $0 \le y \le 1$; alors $\mathrm{F}(y) = f_0(y-1) - f_0(y+1)$, avec $-1 \le y-1 \le 0$, donc

$$f_0(y-1) = 1 - |y-1| = 1 - (1-y) = y$$

et $y+1 \ge 1$ donc $f_0(y+1) = 0$; finalement $\mathrm{F}(y) = y$. On trouve aussi $\mathrm{F}(y) = y$ quand $-1 \le y \le 0$.

On a vu que f_0 est la transformée de Fourier de $\frac{1}{2\pi}\,g_0$; pour trouver les fonctions translatées $y \to f_0(y-1)$ et $y \to f_0(y+1)$, il faut prendre les transformées de $\mathrm{G}_1(x) = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\,g_0(x)$ et $\mathrm{G}_2(x) = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\,g_0(x)$, qui ont la même norme dans L^1 que $\frac{1}{2\pi}\,g_0$, à savoir 1 ; on trouve donc

$$\mathrm{G}(x) = \mathrm{G}_1(x) - \mathrm{G}_2(x) = \frac{1}{2\pi}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\big)g_0(x) = \mathrm{i}\,\frac{\sin x}{\pi}\,\varphi(x/2)^2,$$

et $\|G\|_1 \le \|G_1\|_1 + \|G_2\|_1 = 1 + 1 = 2$.

3.b. *Si g est comme dans la question* **2.a**, *montrer que $g' = \mathrm{i}g * G$, et en déduire la majoration $\|g'\|_1 \le 2\,\|g\|_1$. Peut-on dire que g est de classe C^∞ et majorer la norme L^1 de ses dérivées successives ?*

Preuve. — On a vu que $2\pi g'(-x)$ est la transformée de Fourier au sens de L^2 de $\mathrm{i}y\widehat{g}(y)$; par ailleurs la transformée de Fourier de $\mathrm{i}g*G$ est égale à $\mathrm{i}\widehat{g}(y)\widehat{G}(y) = \mathrm{i}\widehat{g}(y)F(y)$. Comme $\widehat{g}$ est nulle en dehors de $[-1,1]$ et que $F(y) = y$ dans $[-1,1]$, on déduit que la transformée de Fourier de $\mathrm{i}g*G$ est égale à $\mathrm{i}y\widehat{g}(y)$. Par l'inversion de Fourier dans L^2, on sait que $2\pi\mathrm{i}(g*G)(-x)$ est la transformée de $\mathrm{i}y\widehat{g}(y)$, donc

$$2\pi g'(-x) = 2\pi\mathrm{i}(g*G)(-x)$$

pour presque tout x. On a donc bien $g' = \mathrm{i}g*G$ presque partout, donc g' est intégrable et

$$\|g'\|_1 = \|g*G\|_1 \le \|g\|_1\,\|G\|_1 \le 2\,\|g\|_1.$$

Maintenant on voit que g' est continue, intégrable, avec une transformée de Fourier nulle en dehors de $[-1,1]$: on peut donc lui appliquer ce qu'on a fait avec g : on en déduit que g' est de classe C^1, et g'' intégrable, et on peut continuer indéfiniment. En itérant, on obtient que

$$\|g^{(k)}\|_1 \le 2^k\,\|g\|_1$$

pour tout entier $k \ge 1$.

— *Exercice II* —

On désigne par H l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions réelles f mesurables sur $[1,+\infty[$ et telles que

$$\int_1^{+\infty} f(x)^2\,\frac{\mathrm{d}x}{x^6} < +\infty\,;$$

l'espace H est un espace de Hilbert réel quand on le munit du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_1^{+\infty} f(x)\,g(x)\,\frac{\mathrm{d}x}{x^6}\cdot$$

1. *Soit E l'ensemble des fonctions polynomiales réelles de degré ≤ 2 sur l'intervalle $[1,+\infty[$; montrer que $E \subset H$. Posons $f_k(x) = x^k$, pour $k = 0,1,2$; calculer $\langle f_k, f_\ell\rangle$ pour $0 \le k \le \ell \le 2$.*

Preuve. — Si $f(x) = ax^2 + bx + c$ on voit que $|bx| \le b^2 + x^2$, donc $|f(x)| \le Ax^2 + B$ avec $A = |a| + 1$ et $B = |c| + b^2$, et il en résulte que

$$\int_1^{+\infty} f(x)^2\,\frac{\mathrm{d}x}{x^6} \le A^2 \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} + 2AB \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4} + B^2 \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^6} < +\infty.$$

On a

$$\langle f_k, f_\ell\rangle = \int_1^{+\infty} x^k x^\ell\,\frac{\mathrm{d}x}{x^6} = \int_1^{+\infty} x^{k+\ell-6}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5-k-\ell}\cdot$$

2. *Déterminer a et b réels pour que les fonctions polynomiales $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = 4x + a$ et $P_2(x) = 3x^2 + bx + 10$ soient deux à deux orthogonales dans H.*

Preuve. — On veut que

$$0 = \langle 1, 4x + a\rangle = 4\langle f_0, f_1\rangle + a\langle f_0, f_0\rangle = \frac{4}{4} + \frac{a}{5},$$

d'où $a = -5$. On doit avoir

$$0 = \langle 1, P_2\rangle = 3\langle f_0, f_2\rangle + b\langle f_0, f_1\rangle + 10\langle f_0, f_0\rangle = \frac{3}{3} + \frac{b}{4} + \frac{10}{5} = 3 + \frac{b}{4},$$

d'où $b = -12$. Il faut encore vérifier qu'avec ce choix de b, le polynôme P_2 est orthogonal à P_1 ; comme $\mathrm{P}_1 = 4f_1 - 5f_0 = 4f_1 - 5\mathrm{P}_0$ et que P_2 est orthogonal à P_0, il suffit de vérifier que P_2 est orthogonal à f_1 :

$$\langle f_1, \mathrm{P}_2\rangle = 3\langle f_1, f_2\rangle - 12\langle f_1, f_1\rangle + 10\langle f_1, f_0\rangle = \frac{3}{2} - \frac{12}{3} + \frac{10}{4} = \frac{18-48+30}{12} = 0.$$

3. *On définit f par $f(x) = 1/x$; vérifier que la fonction f appartient à* H. *Déterminer la meilleure approximation (au sens de la norme de l'espace* H*) de la fonction f par une fonction polynomiale de degré ≤ 2.*

Preuve. — La fonction f est bornée sur $[1, +\infty[$, donc de carré intégrable par rapport à la mesure finie $x^{-6}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(x)\,\mathrm{d}x$. On cherche la projection Q de f sous la forme

$$\mathrm{Q} = c_0\mathrm{P}_0 + c_1\mathrm{P}_1 + c_2\mathrm{P}_2$$

avec

$$\langle f, \mathrm{P}_j\rangle = \langle \mathrm{Q}, \mathrm{P}_j\rangle$$

pour $j = 0, 1, 2$. Le calcul de $\langle f, f_\ell\rangle$ est le même que le calcul de $\langle f_k, f_\ell\rangle$ avec $k = -1$, et donne $1/(6-\ell)$. On a donc

$$\frac{1}{6} = \langle f, f_0\rangle = \langle f, \mathrm{P}_0\rangle = \langle \mathrm{Q}, \mathrm{P}_0\rangle = c_0\langle \mathrm{P}_0, \mathrm{P}_0\rangle = c_0\frac{1}{5},$$

donc $c_0 = 5/6$;

$$\langle f, \mathrm{P}_1\rangle = \langle f, 4f_1 - 5f_0\rangle = \frac{4}{5} - \frac{5}{6} = -\frac{1}{30}$$

donc

$$-\frac{1}{30} = \langle f, \mathrm{P}_1\rangle = \langle \mathrm{Q}, \mathrm{P}_1\rangle = c_1\langle \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_1\rangle = c_1\bigl(16\langle f_1, f_1\rangle - 40\langle f_1, f_0\rangle + 25\langle f_0, f_0\rangle\bigr)$$

$$= c_1\Bigl(\frac{16}{3} - \frac{40}{4} + \frac{25}{5}\Bigr) = c_1\Bigl(\frac{16}{3} - 5\Bigr) = \frac{c_1}{3}$$

donc $c_1 = -1/10$, et pour finir

$$\langle f, \mathrm{P}_2\rangle = \langle f, 3f_2 - 12f_1 + 10f_0\rangle = \frac{3}{4} - \frac{12}{5} + \frac{10}{6} = \frac{45-144+100}{60} = \frac{1}{60}$$

donc

$$\frac{1}{60} = \langle f, \mathrm{P}_2\rangle = \langle \mathrm{Q}, \mathrm{P}_2\rangle = c_2\,\langle \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_2\rangle$$

$$= c_2\,\bigl(9\langle f_2, f_2\rangle + 144\langle f_1, f_1\rangle + 100\langle f_0, f_0\rangle - 72\langle f_2, f_1\rangle - 240\langle f_1, f_0\rangle + 60\langle f_2, f_0\rangle\bigr)$$

$$= c_2\,\bigl(9 + \frac{144}{3} + \frac{100}{5} - \frac{72}{2} - \frac{240}{4} + \frac{60}{3}\bigr) = c_2\,\bigl(9 + 48 + 20 - 36 - 60 + 20\bigr) = c_2,$$

donc $c_2 = 1/60$. Finalement

$$\mathrm{Q} = \frac{5}{6} - \frac{1}{10}\,(4x-5) + \frac{1}{60}\,(3x^2 - 12x + 10) = \frac{3}{2} - \frac{3}{5}\,x + \frac{1}{20}\,x^2.$$