Analyse hilbertienne et de Fourier, examen de rattrapage du 22 juin 2007

Les documents sont interdits *durée 3h*

— *Exercice I* —

Soit a un nombre réel > 0 fixé ; on considère la fonction f_a sur $\mathbb{R}$ telle que $f_a(x) = \mathrm{e}^{-ax}$ lorsque $x \geq 0$ et $f_a(x) = 0$ si $x < 0$.

1.a. Représenter sommairement le graphe de f_a. Montrer que f_a est dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.

1.b. Calculer la transformée de Fourier de f_a.

1.c. Calculer la transformée de Fourier de la fonction g_1 égale à $g_1(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ sur $[-\pi/2, \pi/2]$ et nulle en dehors, puis celle de la fonction g définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \mathbf{1}_{[-\pi/2,\pi/2]}(x) \cos x$$

(qui vaut donc $g(x) = \cos x$ sur $[-\pi/2, \pi/2]$ et $g(x) = 0$ en dehors).

2.a. Vérifier que la fonction F définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{F}(x) = \mathrm{e}^{ax} \, \frac{a \cos x + \sin x}{1 + a^2}$$

est une primitive de $x \to \mathrm{e}^{ax} \cos x$. Calculer la convolée $h_a = f_a * g$ (en calculant $h_a(x)$, on pourra distinguer les trois cas $x < -\pi/2$, $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ et $x > \pi/2$).

2.b. Montrer que la seule fonction y de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle

$$y' + ay = g$$

et telle que y et y' soient dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, est la fonction h_a.

— *Exercice II* —

1.a. On désigne par r un nombre réel fixé, tel que $0 < r < 1$, et on désigne par f_r la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ qui vérifie

$$\forall x \in [0, 2\pi[, \quad f_r(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}rx}\,.$$

Vérifier que f_r est de carré intégrable sur $[0, 2\pi]$. La fonction f_r est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Est-il possible que les coefficients de Fourier $(c_n(f_r))_{n\in\mathbb{Z}}$ soient absolument sommables ?

1.b. Calculer les coefficients de Fourier $(c_n(f_r))_{n\in\mathbb{Z}}$.

1.c. On désigne par g la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ qui vérifie

$$\forall x \in [0, 2\pi], \quad g(x) = \sin(x/2).$$

Déduire de **1.b.** les coefficients de Fourier $(c_n(g))_{n\in\mathbb{Z}}$.

2. Montrer qu'il existe des coefficients réels $(a_n)_{n\geq 1}$ tels que pour tout $x \in [0, 2\pi]$ on ait

$$\sin(x/2) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx).$$

Que vaut la somme de la série précédente lorsque $-2\pi < x < 0$?

Rappels.

Si A est un sous-ensemble d'un ensemble X, on désigne par $\mathbf{1}_{\mathrm{A}}$ la *fonction indicatrice de* A, égale à 1 sur l'ensemble A et à 0 en dehors de A.

Transformation de Fourier

L'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$; la norme de l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ est définie par

$$\forall f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}), \quad \|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

L'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{R}$; la norme de l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ est définie par

$$\forall f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}), \quad \|f\|_2 = \Big(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2}.$$

La transformation de Fourier est définie sur l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ en associant à toute fonction g intégrable sur $\mathbb{R}$ la fonction $\widehat{g}$ définie par

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \widehat{g}(y) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\,\mathrm{d}x.$$

Quand $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, la fonction $\widehat{g}$ est continue, et elle est bornée par $\|g\|_1$. Quand g est continue sur $\mathbb{R}$ et que g et $\widehat{g}$ sont intégrables, on a la formule *d'inversion de Fourier*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{g}(y)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xy}\,\mathrm{d}y.$$

La transformation de Fourier est injective sur $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Lorsque g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et que g et g' sont intégrables, la dérivée g' admet pour transformée de Fourier la fonction

$$y \in \mathbb{R} \to \mathrm{i}y\widehat{g}(y).$$

Lorsque $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, la transformée de Fourier $\mathcal{F}f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ est dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Si f est à la fois dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, on a $\mathcal{F}f = \widehat{f}$ presque partout. La relation de Parseval affirme que

$$\forall f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}), \quad \|\mathcal{F}f\|_2 = \sqrt{2\pi}\,\|f\|_2.$$

Séries de Fourier

Si f est une fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, intégrable sur $[-\pi,\pi]$, on définit ses *coefficients de Fourier* en posant pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$c_n(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\frac{\mathrm{d}t}{2\pi}.$$

Les fonctions $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définies par $e_n(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$ forment une base hilbertienne de l'espace de Hilbert $\mathrm{L}^2([-\pi,\pi], \mathrm{d}x/(2\pi))$. Lorsque f est de carré sommable sur $[-\pi,\pi]$, on a l'égalité de Bessel-Parseval

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,\frac{\mathrm{d}t}{2\pi} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2.$$

Si la fonction f est continue et si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| < +\infty$, la série de Fourier $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ converge pour tout x, et sa somme est égale à $f(x)$. Si $x \in \mathbb{R}$ est tel que l'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi}\Big|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\Big|\,\mathrm{d}t$ soit finie, la série de Fourier $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ converge et sa somme est égale à $f(x)$.