Analyse hilbertienne et de Fourier, corrigé de l'examen de rattrapage du 22 juin 2007

— *Exercice I* —

Soit a un nombre réel > 0 fixé ; on considère la fonction f_a sur $\mathbb{R}$ telle que $f_a(x) = \mathrm{e}^{-ax}$ lorsque $x \geq 0$ et $f_a(x) = 0$ si $x < 0$.

1.a. *Représenter sommairement le graphe de f_a. Montrer que f_a est dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.*

Preuve. — Il suffit de calculer,

$$\int_{\mathbb{R}} |f_a(x)| \,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a} < +\infty.$$

1.b. *Calculer la transformée de Fourier de f_a.*

Preuve. — Ici encore le calcul est immédiat : pour tout y réel, on trouve

$$\widehat{f_a}(y) = \int_{\mathbb{R}} f_a(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy} \,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy} \,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(a+\mathrm{i}y)x} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a+\mathrm{i}y}.$$

1.c. *Calculer la transformée de Fourier de la fonction g_1 égale à $g_1(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ sur $[-\pi/2, \pi/2]$ et nulle en dehors, puis celle de la fonction g définie par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \mathbf{1}_{[-\pi/2,\pi/2]}(x)\,\cos x$$

(qui vaut donc $g(x) = \cos x$ sur $[-\pi/2, \pi/2]$ et $g(x) = 0$ en dehors).

Preuve. — Toujours du calcul,

$$\widehat{g_1}(y) = \int_{\mathbb{R}} g_1(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy} \,\mathrm{d}x = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy} \,\mathrm{d}x = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-y)x} \,\mathrm{d}x\,;$$

on va commencer par supposer $y \neq 1$; dans ce cas, on peut écrire

$$\widehat{g_1}(y) = \Big[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-y)x}}{\mathrm{i}(1-y)}\Big]_{x=-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2\mathrm{i}\sin\big((1-y)\pi/2\big)}{\mathrm{i}(1-y)} = \frac{2\sin(\pi/2 - \pi y/2)}{1-y} = \frac{2\cos(\pi y/2)}{1-y}.$$

On sait que la transformée de Fourier $\widehat{g_1}$ est continue, ce qui permet de trouver $\widehat{g_1}(1)$ par continuité, mais il est plus simple de revenir au calcul : quand $y = 1$,

$$\widehat{g_1}(1) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}x = \pi.$$

On note aussi que $\widehat{g_1}(-1) = \cos(\pi/2) = 0$. Si on pose $g_2(x) = g_1(-x)$, on sait que pour $y \neq -1$,

$$\widehat{g_2}(y) = \int_{\mathbb{R}} g_1(-x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy} \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} g_1(u)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}u(-y)} \,\mathrm{d}u = \widehat{g_1}(-y) = \frac{2\cos(\pi y/2)}{1+y},$$

et $\widehat{g_2}(-1) = \pi$, $\widehat{g_2}(1) = 0$. Il en résulte, puisque $g = (g_1 + g_2)/2$, que

$$\widehat{g}(y) = \cos(\pi y/2)\left(\frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y}\right) = \frac{2\cos(\pi y/2)}{1-y^2} \quad \text{pour } |y| \neq 1,$$

et

$$\widehat{g}(1) = \frac{\pi + 0}{2} = \widehat{g}(-1) = \frac{\pi}{2}.$$

2.a. *Vérifier que la fonction* F *définie par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{F}(x) = \mathrm{e}^{ax}\, \frac{a\cos x + \sin x}{1+a^2}$$

est une primitive de $x \to \mathrm{e}^{ax}\cos x$*. Calculer la convolée* $h_a = f_a * g$ *(en calculant* $h_a(x)$*, on pourra distinguer les trois cas* $x < -\pi/2$*,* $-\pi/2 \le x \le \pi/2$ *et* $x > \pi/2$*).*

Preuve. — Le calcul de la dérivée de F ne pose évidemment aucun problème,

$$\mathrm{F}'(x) = a\,\mathrm{e}^{ax}\, \frac{a\cos x + \sin x}{1+a^2} + \mathrm{e}^{ax}\, \frac{-a\sin x + \cos x}{1+a^2} = \mathrm{e}^{ax}\, \frac{(a^2+1)\cos x}{1+a^2} = \mathrm{e}^{ax}\, \cos x.$$

On a pour la convolée h_a, en tout x réel,

$$h_a(x) = \int_{\mathbb{R}} g(t) f_a(x-t)\, \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[-\pi/2,\pi/2]}(t)\, \cos(t)\, \mathbf{1}_{\{x-t\ge 0\}}\, \mathrm{e}^{-a(x-t)}\, \mathrm{d}t$$

$$= \mathrm{e}^{-ax} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{-\pi/2\le t\le \pi/2,\ t\le x\}}\, \cos(t)\, \mathrm{e}^{at}\, \mathrm{d}t.$$

Supposons que $x < -\pi/2$; alors les conditions $t \le x$ et $-\pi/2 \le t$ sont incompatibles, ce qui implique

$$\mathbf{1}_{\{-\pi/2\le t\le \pi/2,\ t\le x\}} = 0,$$

donc $h_a(x) = 0$ dans ce cas. Si $x > \pi/2$, la condition $t \le x$ est automatique pour tous les $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, donc dans ce cas

$$\mathbf{1}_{\{-\pi/2\le t\le \pi/2,\ t\le x\}} = \mathbf{1}_{\{-\pi/2\le t\le \pi/2\}}$$

et

$$h_a(x) = \mathrm{e}^{-ax} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t)\, \mathrm{e}^{at}\, \mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-ax}\big(\mathrm{F}(\pi/2) - \mathrm{F}(-\pi/2)\big).$$

De plus,

$$\mathrm{F}(\pi/2) = \frac{\mathrm{e}^{a\pi/2}}{1+a^2}, \quad \mathrm{F}(-\pi/2) = -\frac{\mathrm{e}^{-a\pi/2}}{1+a^2},$$

et finalement, pour $x > \pi/2$ on a

$$h_a(x) = \mathrm{e}^{-ax}\, \frac{2\,\mathrm{ch}(a\pi/2)}{1+a^2}.$$

Pour finir, dans le cas $-\pi/2 \le x < \pi/2$, on obtient

$$h_a(x) = \mathrm{e}^{-ax} \int_{-\pi/2}^{x} \cos(t)\, \mathrm{e}^{at}\, \mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-ax}\big(\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(-\pi/2)\big) = \frac{a\cos x + \sin x}{1+a^2} - \mathrm{e}^{-ax}\, \mathrm{F}(-\pi/2)$$

$$= \frac{a\cos x + \sin x}{1+a^2} - \mathrm{e}^{-ax}\, \mathrm{F}(-\pi/2) = \frac{a\cos x + \sin x + \mathrm{e}^{-a(x+\pi/2)}}{1+a^2}.$$

2.b. *Montrer que la seule fonction* y *de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}$*, solution de l'équation différentielle*

$$y' + ay = g$$

et telle que y *et* y' *soient dans* $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$*, est la fonction* h_a*.*

Preuve. — Si les fonctions y et y' sont intégrables, on peut leur appliquer la transformation de Fourier,

$$\widehat{y'} + a\widehat{y} = \widehat{g}.$$

D'après les rappels on sait que $\widehat{y'}(t) = \mathrm{i}t\widehat{y}(t)$. On a donc pour tout t

$$(\mathrm{i}t + a)\widehat{y}(t) = \widehat{g}(t)$$

et par conséquent

$$\widehat{y}(t) = \frac{\widehat{g}(t)}{a + \mathrm{i}t} = \widehat{g}(t)\,\widehat{f}_a(t) = \widehat{g * f_a}(t).$$

D'après l'injectivité de la transformation de Fourier, on voit que si la fonction y vérifie les conditions de la question **2.b.**, alors $y = g * f_a = h_a$.

Il reste à prouver que h_a a bien les propriétés annoncées. Quand $x < -\pi/2$, la fonction h_a est nulle, donc $h'_a + ah_a = 0$ et on a aussi $g = 0$ sur cet intervalle. Quand $-\pi/2 < x < \pi/2$,

$$h'_a(x) = \frac{-a \sin x + \cos x - a\,\mathrm{e}^{-a(x+\pi/2)}}{1 + a^2},$$

de sorte que

$$h'_a(x) + ah_a(x) = \frac{\cos x + a^2 \cos x}{1 + a^2} = \cos x = g(x).$$

Pour $x > \pi/2$ la fonction h_a est de la forme $\mathrm{C}\,\mathrm{e}^{-ax}$ donc elle vérifie $h'_a + ah_a = 0$ sur ce dernier intervalle, sur lequel on a aussi $g = 0$ donc $h'_a + ah_a = g$. Pour finir, la fonction h_a est continue et intégrable d'après sa formule, ou d'après les théorèmes sur la convolution ; on voit que h_a est de classe C^1 : en effet $h'_a(x) = g(x) - ah_a(x)$ pour $|x| \neq \pi/2$, et puisque $g - ah_a$ est continue sur $\mathbb{R}$, la dérivée $h'_a(x)$ existe aussi pour $|x| = \pi/2$ par la règle de l'Hospital, donc $h'_a = g - ah_a$ est continue sur $\mathbb{R}$. Enfin, h'_a est intégrable sur $\mathbb{R}$, parce que g est intégrable et $h'_a = g - ah_a$.

— *Exercice II* —

1.a. *On désigne par r un nombre réel fixé, tel que $0 < r < 1$, et on désigne par f_r la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ qui vérifie*

$$\forall x \in [0, 2\pi[, \quad f_r(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}rx}.$$

Vérifier que f_r est de carré intégrable sur $[0, 2\pi]$. La fonction f_r est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Est-il possible que les coefficients de Fourier $(c_n(f_r))_{n\in\mathbb{Z}}$ soient absolument sommables ?

Preuve. — Le module de la fonction f_r est égal à 1, donc

$$\int_0^{2\pi} |f_r(t)|^2 \,\frac{\mathrm{d}t}{2\pi} = 1 < +\infty.$$

Quand x tend vers 2π par valeurs inférieures, on obtient

$$f_r(2\pi - 0) := \lim_{x\to 2\pi,\ x<2\pi} f_r(x) = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}r},$$

mais d'un autre côté, $f_r(2\pi) = f_r(0) = 1$. Comme r n'est pas un entier, on sait que $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi r} \neq 1$, donc f_r n'est pas continue.

Si les coefficients de Fourier de f_r étaient absolument sommables, la fonction f_r serait égale presque partout à la fonction continue

$$\varphi(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f_r)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}.$$

Comme $f_r - \varphi$ est continue sur l'ouvert $(0, 2\pi)$ et qu'elle est nulle presque partout, on déduit que $\varphi(x) = f_r(x)$ pour tout x tel que $0 < x < 2\pi$. Il en résulte que la limite à droite et à gauche en 2π de la fonction φ sont égales à celles de f_r. Mais ceci est impossible : les limites à droite et à gauche devraient être les mêmes puisque φ est continue, ce qui n'est pas le cas pour f_r, comme on l'a vu ci-dessus.

1.b. *Calculer les coefficients de Fourier* $(c_n(f_r))_{n\in\mathbb{Z}}$.

Preuve. — On a

$$c_n(f_r) = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}rx}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,\frac{\mathrm{d}x}{2\pi} = \Big[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(r-n)x}}{2\mathrm{i}\pi(r-n)}\Big]_{x=0}^{2\pi} = \frac{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}r}-1}{2\mathrm{i}\pi(r-n)}.$$

1.c. *On désigne par g la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ qui vérifie*

$$\forall x \in [0, 2\pi], \quad g(x) = \sin(x/2).$$

Déduire de **1.b.** *les coefficients de Fourier* $(c_n(g))_{n\in\mathbb{Z}}$.

Preuve. — Dans le cas $r = 1/2$ on trouve

$$c_n(f_r) = \frac{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}r}-1}{2\mathrm{i}\pi(r-n)} = \frac{-2}{2\mathrm{i}\pi(r-n)} = \frac{\mathrm{i}}{\pi(\frac{1}{2}-n)}.$$

Pour $x \to \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x/2}$ on est dans le cas $r = -1/2$, et par conséquent par le calcul de $c_n(f_r)$, qui est en fait valable pour tout r non entier, on a

$$c_n(f_{-1/2}) = \frac{\mathrm{i}}{\pi(-\frac{1}{2}-n)}$$

et

$$c_n(g) = \frac{c_n(f_{1/2}) - c_n(f_{-1/2})}{2\mathrm{i}} = \frac{1}{2\pi(\frac{1}{4}-n^2)}.$$

On a en particulier

$$c_0(g) = \frac{2}{\pi}.$$

2. *Montrer qu'il existe des coefficients réels $(a_n)_{n\geq 1}$ tels que pour tout $x \in [0, 2\pi]$ on ait*

$$\sin(x/2) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx).$$

Que vaut la somme de la série précédente lorsque $-2\pi < x < 0$?

Preuve. — On a trouvé des coefficients $c_n(g)$ qui sont $\mathrm{O}(n^{-2})$ quand $|n| \to +\infty$. Il en résulte que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(g)| < +\infty$$

et comme g est continue, on sait d'après le cours que pour tout x, on a

$$g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(g)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} = \lim_{n\to+\infty} (\mathrm{S}_n g)(x).$$

On voit que $c_n(g) = c_{-n}(g)$; en regroupant n et $-n$ pour $n > 0$ on trouve

$$c_n(g)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}) = 2c_n(g)\cos(nx) = \frac{1}{\pi(\frac{1}{4}-n^2)}\cos(nx).$$

Il en résulte que

$$(\mathrm{S}_n f)(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\pi(\frac{1}{4}-k^2)}\cos(kx).$$

On a donc $a_k = -1/(\pi k^2 - \pi/4)$ pour $k \geq 1$. On déduit que pour tout $x \in [0, 2\pi]$,

$$\sin(x/2) = g(x) = \frac{2}{\pi} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi(4n^2-1)}\cos(nx).$$

Pour $-2\pi < x < 0$ on obtient par périodicité

$$\frac{2}{\pi} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi(4n^2-1)}\cos(nx) = g(x) = g(x+2\pi) = \sin((x+2\pi)/2) = -\sin(x/2) = |\sin(x/2)|.$$