Base hilbertienne des exponentielles complexes

On désigne par H l'espace de Hilbert $\mathrm{L}^2([0,2\pi], \mathrm{d}x/(2\pi))$; pour chaque $n \in \mathbb{Z}$, on désigne par e_n la fonction de H définie par

$$e_n(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nx}\,.$$

On va prouver le théorème suivant, qui se trouve dans le poly (théorème 2.2.1 dans le poly 2007-2008), mais on emploiera une méthode différente de celle du poly : on va exploiter ici le fait que nous avons déjà établi au premier chapitre les résultats sur la transformation de Fourier dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, notamment l'égalité de Parseval.

Théorème 2.2.1. *Les fonctions* $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *forment une base hilbertienne de l'espace de Hilbert* $\mathrm{H} = \mathrm{L}^2([0,2\pi], \mathrm{d}x/(2\pi))$.

Démonstration. On a vu (exemple 2.1.7) que les vecteurs $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ forment une famille orthonormée dans H,

$$\langle e_m, e_n\rangle_{\mathrm{H}} = \int_0^{2\pi} e_m(x)\overline{e_n(x)}\,\frac{\mathrm{d}x}{2\pi} = \delta_{m,n}.$$

Pour chaque entier $\mathrm{N} \ge 0$ désignons par $\mathcal{P}_{\mathrm{N}}$ le sous-espace vectoriel de H engendré par les $2\mathrm{N}+1$ vecteurs $e_{-\mathrm{N}}, e_{-\mathrm{N}+1}, \ldots, e_{\mathrm{N}}$. L'espace $\mathcal{P}_{\mathrm{N}}$ est l'espace des *polynômes trigonométriques* de degré $\le \mathrm{N}$. Pour toute fonction $f \in \mathrm{H}$ et tout entier $\mathrm{N} \ge 0$, posons

$$\mathrm{D}_{\mathrm{N}}(f) = \mathrm{dist}(f, \mathcal{P}_{\mathrm{N}}),$$

c'est-à-dire la *distance* de f au sous-espace vectoriel $\mathcal{P}_{\mathrm{N}}$, calculée avec la norme de H ; on sait (lemme 2.1.4) que la plus courte distance de f à $\mathcal{P}_{\mathrm{N}}$ est donnée par la distance de f à sa projection orthogonale $\mathrm{S}_{\mathrm{N}} f$ sur $\mathcal{P}_{\mathrm{N}}$, donc

$$\mathrm{D}_{\mathrm{N}}(f) = \|f - \mathrm{S}_{\mathrm{N}} f\|_{\mathrm{H}},$$

où la projection orthogonale $\mathrm{S}_{\mathrm{N}} f$ de la fonction f sur $\mathcal{P}_{\mathrm{N}}$ se calcule par la formule

$$\mathrm{S}_{\mathrm{N}} f = \sum_{k=-\mathrm{N}}^{\mathrm{N}} c_k(f) e_k, \quad \text{avec} \quad c_k(f) = \langle f, e_k\rangle_{\mathrm{H}} = \int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\frac{\mathrm{d}x}{2\pi}.$$

Puisque f est la somme des deux vecteurs orthogonaux $\mathrm{S}_{\mathrm{N}} f \in \mathcal{P}_{\mathrm{N}}$ et $f - \mathrm{S}_{\mathrm{N}} f \perp \mathcal{P}_{\mathrm{N}}$, on sait par la relation de Pythagore que

$$\mathrm{D}_{\mathrm{N}}(f)^2 = \|f - \mathrm{S}_{\mathrm{N}} f\|^2 = \|f\|^2 - \|\mathrm{S}_{\mathrm{N}} f\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=-\mathrm{N}}^{\mathrm{N}} |c_k(f)|^2.$$

Comme l'espace $\mathcal{P}_{\mathrm{N}}$ est croissant avec N, la distance $\mathrm{D}_{\mathrm{N}}(f)$ est décroissante ; pour terminer la preuve du théorème, nous devons montrer que cette distance tend vers 0 pour toute fonction $f \in \mathrm{H}$, c'est-à-dire que toute fonction $f \in \mathrm{H}$ peut être approchée arbitrairement bien par des polynômes trigonométriques. Posons maintenant

$$\mathrm{D}(f) = \lim_{\mathrm{N}} \mathrm{D}_{\mathrm{N}}(f) = \lim_{\mathrm{N}} \|f - \mathrm{S}_{\mathrm{N}} f\|.$$

On a aussi

$$\mathrm{D}(f)^2 = \lim_{\mathrm{N}} \Big(\|f\|^2 - \sum_{k=-\mathrm{N}}^{\mathrm{N}} |c_k(f)|^2 \Big) = \|f\|^2 - \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(f)|^2.$$

Il s'agira donc de montrer que $\mathrm{D}(f) = 0$ pour toute fonction $f \in \mathrm{H}$, c'est-à-dire qu'au sens de la norme de H, on a

$$f = \lim_{\mathrm{N}} \mathrm{S_N} f.$$

Ce résultat sera atteint si on arrive à prouver que

$$\|f\|^2 - \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(f)|^2 = 0.$$

Continuons de préparer le terrain. Soient $f_1, f_2 \in \mathrm{H}$; comme $\mathrm{S_N} f_2$ est un point de $\mathcal{P}_{\mathrm{N}}$, on a $\mathrm{D_N}(f_1) \le \|f_1 - \mathrm{S_N} f_2\|$; par l'inégalité triangulaire, on en déduit que

$$\mathrm{D_N}(f_1) \le \|f_1 - \mathrm{S_N} f_2\| \le \|f_2 - \mathrm{S_N} f_2\| + \|f_2 - f_1\| = \mathrm{D_N}(f_2) + \|f_2 - f_1\| \,;$$

on peut inverser les rôles, et on obtient que

$$|\mathrm{D_N}(f_2) - \mathrm{D_N}(f_1)| \le \|f_2 - f_1\|.$$

En passant à la limite, on a aussi

$$|\mathrm{D}(f_2) - \mathrm{D}(f_1)| \le \|f_2 - f_1\|. \tag{1}$$

Considérons une fonction $f \in \mathrm{H}$. On posera pour $x \in [0, 2\pi]$ et $\alpha \in [0, 1]$

$$f_\alpha(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha x} f(x).$$

On montre facilement (convergence dominée par exemple) que la fonction $\alpha \to f_\alpha$ est continue de $[0, 1]$ dans H, c'est-à-dire que pour tout α fixé, on a

$$\lim_{\beta \to \alpha} \|f_\beta - f_\alpha\|_{\mathrm{H}}^2 = \lim_{\beta \to \alpha} \int_0^{2\pi} \Big| \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta x} f(x) - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha x} f(x) \Big|^2 \frac{\mathrm{d}x}{2\pi} = 0.$$

Il résulte alors de la relation (1) que la fonction numérique $\alpha \to \mathrm{D}(f_\alpha)$ est continue sur $[0, 1]$. Comme cette fonction continue est ≥ 0, on va pouvoir montrer qu'elle est nulle en prouvant que son intégrale sur $[0, 1]$ est nulle. On obtiendra en particulier la nullité au point $\alpha = 0$,

$$0 = \mathrm{D}(f_0) = \mathrm{D}(f)$$

qui est notre objectif.

On définit une fonction g sur $\mathbb{R}$ en posant $g(x) = f(x)$ si $0 \le x < 2\pi$ et $g(x) = 0$ sinon. On voit que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$c_n(f_\alpha) = \int_0^{2\pi} f_\alpha(x) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx} \frac{\mathrm{d}x}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} g(x) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n+\alpha)x} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \widehat{g}(n + \alpha).$$

On a donc

$$\int_0^1 |c_n(f_\alpha)|^2 \,\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^1 |\widehat{g}(n+\alpha)|^2 \,\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{4\pi^2} \int_n^{n+1} |\widehat{g}(y)|^2 \,\mathrm{d}y,$$

ce qui donne par interversion série-intégrale, valable pour les séries de fonctions mesurables positives (théorème A.1 de l'annexe)

$$\int_0^1 \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f_\alpha)|^2 \Big) \,\mathrm{d}\alpha = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^1 |c_n(f_\alpha)|^2 \,\mathrm{d}\alpha =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_n^{n+1} |\widehat{g}(y)|^2 \,\mathrm{d}y = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{g}(y)|^2 \,\mathrm{d}y$$

puis en utilisant Parseval pour la transformation de Fourier (théorème 1.3.5)

$$\int_0^1 \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f_\alpha)|^2 \Big) \,\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{g}(y)|^2 \,\mathrm{d}y = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \,\frac{\mathrm{d}x}{2\pi}\,;$$

Comme $|f_\alpha(x)| = |f(x)|$, on voit que $\|f_\alpha\|_{\mathrm{H}} = \|f\|_{\mathrm{H}}$ pour tout α, et

$$\int_0^1 \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f_\alpha)|^2 \Big) \,\mathrm{d}\alpha = \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \,\frac{\mathrm{d}x}{2\pi} = \|f\|^2 = \int_0^1 \|f_\alpha\|^2 \,\mathrm{d}\alpha.$$

Autrement dit,

$$\int_0^1 \mathrm{D}(f_\alpha)^2 \,\mathrm{d}\alpha = \int_0^1 \Big(\|f_\alpha\|^2 - \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f_\alpha)|^2 \Big) \,\mathrm{d}\alpha = 0.$$

Comme la fonction $\alpha \to \mathrm{D}(f_\alpha)$ est continue sur $[0,1]$, il en résulte que $\mathrm{D}(f_\alpha) = 0$ pour tout α, en particulier pour $\alpha = 0$,

$$\mathrm{D}(f)^2 = \|f\|^2 - \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = 0.$$

On a vu que cela implique que dans l'espace H, on a

$$f = \lim_{\mathrm{N}} \Big(\sum_{k=-\mathrm{N}}^{\mathrm{N}} c_k(f)\, e_k \Big) = \lim_{\mathrm{N}} \mathrm{S}_{\mathrm{N}} f.$$