Université Paris Diderot
L3 Maths Appliquées (31M23030)

Année 2007/08
Analyse de Hilbert et de Fourier

Devoir à la maison 1

1) Soit $I = [a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$.

a) Soit f une fonction intégrable sur I. Une fonction F définie sur I s'appelle une *primitive généralisée* de f sur I si on a

$$F(v) - F(u) = \int_u^v f(x)\,dx\,,$$

pour tous réels u, v tels que $a \leqslant u < v \leqslant b$.

- Expliquer le choix de cette terminologie.
- Montrer que la fonction f admet une infinité de primitives généralisées, deux d'entre elles différant d'une constante.
- Montrer qu'une primitive généralisée de f est nécessairement continue sur I.

b) Soient f, g deux fonctions intégrables sur I. Soient F et G des primitives généralisées de f et g respectivement. À l'aide du théorème de Fubini, établir la formule d'*intégration par parties* :

$$\int_a^b f(x)G(x)\,dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b F(x)g(x)\,dx\,.$$

2) D'après le cours, la transformation de Fourier est une bijection linéaire de $L^1(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$, sous-espace vectoriel de $C_0(\mathbb{R})$. On se propose de montrer que l'application réciproque

$$\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{F}(L^1(\mathbb{R})) \to L^1(\mathbb{R})$$

n'est pas continue si on munit $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$ et $L^1(\mathbb{R})$ de leurs normes “naturelles”, respectivement $\| - \|_\infty$ et $\| - \|_1$.

Pour $n \geqslant 1$, soit f_n la fonction indicatrice de l'intervalle $[-n, n]$.

a) Calculer $\widehat{f_n}$ et $f_n \star f_1$ pour $n \geqslant 1$.

b) Montrer que $f_n * f_1 = \widehat{g_n}$ où g_n est la fonction :

$$g_n(x) = \frac{2}{\pi}\frac{\sin x\,\sin(nx)}{x^2}\,.$$

.

c) Montrer à l'aide d'un changement de variable et du lemme de Fatou que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|g_n\|_1 = +\infty$.

d) En déduire qu'il n'existe pas de constante c telle que :

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}) \qquad \|f\|_1 \leqslant c\,\|\widehat{f}\|_\infty.$$

Conclure.