Université Paris Diderot — Année 2007/08
L3 Maths Appliquées (31M23030) — Analyse de Hilbert et de Fourier

Corrigé du devoir à la maison 1

Exercice I

Soit $I = [a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction intégrable sur I. Une fonction F définie sur I s'appelle une primitive généralisée *de f sur I si on a*

$$F(v) - F(u) = \int_u^v f(x)\,dx\,,$$

pour tous réels u, v tels que $a \leqslant u < v \leqslant b$.

1) *Expliquer le choix de cette terminologie.* Dans le cas particulier où la fonction f est continue, la fonction F est une primitive de f.

2) *Montrer que la fonction f admet une infinité de primitives généralisées, deux d'entre elles différant d'une constante.*
a) Posons

$$\forall x \in [a, b] \quad g(x) = \int_a^x f(t)\,dt\,.$$

La fonction g est bien définie car

$$\int_a^x |f(t)|\,dt = \int_I \mathbb{1}_{[a,x]}(t)\,|f(t)|\,dt \leqslant \int_I |f(t)|\,dt < +\infty\,,$$

pour tout $x \in [a, b]$, par hypothèse sur f. Par la relation de Chasles, on voit aussitôt que g est une primitive généralisée de f. Pour toute contante c, il est évident que $g + c$ est encore une primitive généralisée de f, ce qui montre que f admet une infinité de primitives généralisées.
b) Soit h la différence entre deux primitives généralisées de f. On a alors $h(v) - h(u) = 0$ pour tous réels u, v tels que $a \leqslant u < v \leqslant b$. On en déduit que $h(v) = h(a)$ pour tout $v \in [a, b]$ et donc que h est une fonction constante.

3) *Montrer qu'une primitive généralisée de f est nécessairement continue sur I.*
Il suffit de le prouver pour la fonction g de la question précédente. Soit $x \in I$ et soit $(x_k)_{k\geqslant 0}$ une suite d'éléments de I convergeant vers x. On a

$$g(x_k) = \int_I \mathbb{1}_{[a,x_k]}(t)\,f(t)\,dt\,.$$

Vérifions les hypothèses du théorème de convergence dominée. On a d'abord

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall t \in I \quad \left|\mathbb{1}_{[a,x_k]}(t) f(t)\right| \leqslant |f(t)|$$

et, par hypothèse, la fonction $|f|$ est intégrable sur I. On a ensuite

$$\lim_{k\to+\infty} \mathbb{1}_{[a,x_k]}(t) = \mathbb{1}_{[a,x]}(t)\,,$$

pour tout $t \neq x$, autrement dit presque partout. Par le théorème de convergence dominée, on conclut que la suite $(g(x_k))_{k\geqslant 0}$ converge vers $g(x)$.

4) *Soient f, g deux fonctions intégrables sur I. Soient F et G des primitives généralisées de f et g respectivement. À l'aide du théorème de Fubini, établir la formule d'* intégration par parties *:*

$$\int_a^b f(x)G(x)\,dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b F(x)g(x)\,dx\,.$$

Considérons la fonction

$$(x,t) \mapsto f(x)g(t)\mathbb{1}_{[a,x]}(t)\,.$$

Elle est intégrable sur $I \times I$ car, par "Fubini positif",

$$\int_{I\times I} \left|f(x)g(t)\mathbb{1}_{[a,x]}(t)\right| dx\,dt \leqslant \int_{I\times I} |f(x)g(t)|\,dx\,dt = \left(\int_I |f(x)|\,dx\right)\left(\int_I |g(x)|\,dx\right) < +\infty\,.$$

En appliquant le théorème de Fubini à notre fonction intégrable, on obtient

$$\int_a^b f(x)\left(\int_a^x g(t)\,dt\right)\,dx = \int_a^b g(t)\left(\int_t^b f(x)\,dx\right)\,dt\,,$$

autrement dit :

$$\int_a^b f(x)(G(x)-G(a))\,dx = \int_a^b g(t)(F(b)-F(t))\,dt\,.$$

En développant, on obtient l'égalité souhaitée.

Exercice II

D'après le cours, la transformation de Fourier est une bijection linéaire de $L^1(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$, sous-espace vectoriel de $C_0(\mathbb{R})$. On se propose de montrer que l'application réciproque

$$\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{F}(L^1(\mathbb{R})) \to L^1(\mathbb{R})$$

n'est pas continue si on munit $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$ et $L^1(\mathbb{R})$ de leurs normes "naturelles", respectivement $\|-\|_\infty$ et $\|-\|_1$.
Pour $n \geqslant 1$, soit f_n la fonction indicatrice de l'intervalle $[-n,n]$.
1) Calculer $\widehat{f_n}$ et $f_n * f_1$ pour $n \geqslant 1$.
Le calcul de $\widehat{f_1}$ a été fait dans l'exercice 2 de la série 2. On a trouvé

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^* \quad \widehat{f_1}(\xi) = 2\frac{\sin\xi}{\xi}\,.$$

En observant que $f_n(x) = f_1(x/n)$ et en utilisant le formulaire de l'exercice 3 de la série 2, on arrive à

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^* \quad \widehat{f_n}(\xi) = 2\frac{\sin n\xi}{\xi}\,.$$

On a

$$(f_n * f_1)(x) = \int_{\mathbb{R}} 1\!\!1_{[-n,+n]}(t) 1\!\!1_{[-1,+1]}(x-t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} 1\!\!1_{[-n,+n]}(t) 1\!\!1_{[x-1,x+1]}(t)\, dt\,.$$

$(f_n * f_1)(x)$ est donc égal à la longueur de l'intervalle $[-n, n] \cap [x-1, x+1]$, ce qui conduit à

$$(f_n * f_1)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |x| \geqslant n+1 \\ n+1-|x| & \text{si} \quad n-1 < |x| < n+1 \\ 2 & \text{si} \quad |x| \leqslant n-1 \end{cases}$$

(Le graphe de $f_n * f_1$ est un trapèze, faites le dessin !)

2) *Montrer que $f_n * f_1 = \widehat{g_n}$ où g_n est la fonction :*

$$g_n(x) = \frac{2}{\pi}\frac{\sin x\, \sin(nx)}{x^2}\,.$$

À l'aide de la première question, il vient

$$\widehat{f_n * f_1}(x) = \widehat{f_n}(x)\widehat{f_1}(x) = 2\pi g_n(x)\,.$$

Notons que la fonction $f_n * f_1$ est intégrable, continue, bornée (voir la question précédente) et que la fonction g_n est intégrable (elle est continue, donc localement intégrable, et à l'infini elle est dominée par la fonction intégrable $x \mapsto (2/\pi)x^{-2}$). On est ainsi dans les conditions d'application de la formule de réciprocité. On obtient

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (f_n * f_1)(x) = \widehat{g_n}(-x)\,,$$

c'est-à-dire la formule souhaitée.

3) *Montrer à l'aide d'un changement de variable et du lemme de Fatou que $\lim_{n\to+\infty} \|g_n\|_1 = +\infty$.*
Par le changement de variable $t = nx$, il vient

$$\|g_n\|_1 = \frac{2}{\pi}\int_{\mathbb{R}} |\sin x\, \sin(nx)|\, \frac{dx}{x^2} = \frac{2}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{n}{|t|}\left|\sin\frac{t}{n}\right|\, \frac{|\sin t|}{|t|}\, dt\,.$$

On sait que

$$\forall t \in \mathbb{R}^* \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{|t|}\left|\sin\frac{t}{n}\right| = 1\,.$$

En appliquant le lemme de Fatou, il vient

$$\liminf \|g_n\|_1 \geqslant \frac{2}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{|\sin t|}{|t|}\, dt\,.$$

En utilisant l'exercice 2 de la série 1 (question e)), on obtient la conclusion souhaitée.

4) *En déduire qu'il n'existe pas de constante c telle que :*

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}) \qquad \|f\|_1 \leqslant c\, \|\widehat{f}\|_\infty.$$

Conclure.
S'il existait une constante c telle que :

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}) \qquad \|f\|_1 \leqslant c\, \|\widehat{f}\|_\infty\,,$$

on aurait en particulier

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \|g_n\|_1 \leqslant c\, \|\widehat{g}_n\|_\infty\,.$$

Or, par les questions 1) et 2), on a $\|\widehat{g}_n\|_\infty = 2$, ce qui contredit le résultat de la question 3).

Si l'application linéaire

$$\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{F}(L^1(\mathbb{R})) \to L^1(\mathbb{R})$$

était continue, il existerait une constante $c > 0$ telle que

$$\forall h \in \mathcal{F}(L^1(\mathbb{R})) \quad \|\mathcal{F}^{-1}(h)\|_1 \leqslant c\|h\|_\infty\,,$$

autrement dit (en posant $f = \widehat{h}$) :

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}) \quad \|f\|_1 \leqslant c\|\widehat{f}\|_\infty\,,$$

ce qui est faux, comme on vient de le voir.