Université Paris Diderot — Année 2007/08

L3 Maths Appliquées (31M23030) — Analyse de Hilbert et de Fourier

Devoir à la maison 2

Exercice I : Les polynômes d'Hermite.

Notations :

- $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par $\varphi(x) = e^{-x^2/2}$. On rappelle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = \sqrt{2\pi}$.
- μ est la mesure borélienne sur $\mathbb{R}$ de densité φ par rapport à la mesure de Lebesgue — i.e.

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \mu(A) = \int_A \varphi(x)\, dx\,.$$

- H est l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}, \mu)$. On note $\langle -, - \rangle$ le produit scalaire de H et $\| - \|$ la norme associée à ce produit scalaire.
- Pour $z \in \mathbb{C}$, la fonction $\psi_z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est définie par $\psi_z(x) = e^{zx}$.
- On note E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sa base algébrique naturelle, donnée par $u_n(x) = x^n$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1) Rappeler l'expression de $\langle f, g\rangle$ et de $\|f\|$, pour tous f, g appartenant à H. Montrer que E est inclus dans H. Montrer que $\psi_z \in H$, pour tout $z \in \mathbb{C}$, et calculer $\|\psi_z\|$.
On notera désormais $\overline{E}$ l'adhérence (ou fermeture) de E dans H.

2) Montrer, par récurrence sur n, l'existence d'une suite de polynômes $(P_n)_{n\geqslant 0}$ telle que

$$\varphi^{(n)}(x) = (-1)^n \varphi(x) P_n(x)\,,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que P_n est un polynôme de degré n, dont le terme de plus haut degré est x^n.
Les polynômes P_n ont été introduits par Charles Hermite, mathématicien français, 1822-1901.

3) Montrer que $\langle P_n, u_m\rangle = 0$ pour $0 \leqslant m < n$. En déduire que, dans l'espace de Hilbert H, la suite $(P_n)_{n\geqslant 0}$ est la suite orthogonale obtenue, par le procédé de Gram-Schmidt, à partir de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$. Montrer que $\|P_n\| = (2\pi)^{1/4}\sqrt{n!}$.

4) Soit $z \in \mathbb{C}$. Calculer $\langle \psi_z, P_n\rangle$, pour tout n (on pourra utiliser l'exercice 4 de la série n° 2). En déduire que

$$\|\psi_z\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|P_n\|^{-2} |\langle \psi_z, P_n\rangle|^2$$

et que $\psi_z \in \overline{E}$.

5) Soit f un élément de H orthogonal à $\overline{E}$. En utilisant l'injectivité de la transformation de Fourier, montrer que $f = 0$.

6) Conclure que la suite $\left(\|P_n\|^{-1} P_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H.

Exercice II : La base de Haar sur $\mathbb{R}$.

Notations :

– On se place dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ ($\mathbb{R}$ étant muni de la mesure de Lebesgue), dont on note $\langle -, - \rangle$ le produit scalaire et $\| - \|$ la norme associée.

– On pose $h = \mathbb{1}_{]0,1/2[} - \mathbb{1}_{]1/2,1[}$. Pour tout $(j,k) \in \mathbb{Z}^2$, on considère la fonction $h_{j,k}(x) = 2^{-j/2} h(2^{-j}x - k)$ et l'intervalle $I(j,k) =]k2^j, (k+1)2^j[$.

1) Dessiner le graphe de $h_{j,k}$. Montrer que $h_{j,k} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} h_{j,k}(x)\, dx$ et $\|h_{j,k}\|$.

On désignera désormais par V le sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{R})$ engendré par les fonctions $h_{j,k}$, $(j,k) \in \mathbb{Z}^2$.

2) Soient j, j', k, k' des entiers tels que $j' < j$. Montrer qu'on a l'alternative suivante : soit les intervalles $I(j',k')$ et $I(j,k)$ sont disjoints, soit $I(j',k')$ est contenu dans l'une des deux moitiés, droite ou gauche, de $I(j,k)$. En déduire l'existence d'un réel $c \in \{0, -1, 1\}$ tel que $h_{j,k}\, h_{j',k'} = c\, h_{j',k'}$.

3) Montrer que la famille $(h_{j,k})_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}$ est orthonormée.

4) Soit $(j_0, k_0) \in \mathbb{Z}^2$ et $g = \mathbb{1}_{I(j_0,k_0)}$. Montrer que :

   1. pour tout $(j,k) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $j \le j_0$ on a $\langle g, h_{j,k} \rangle = 0$,
   2. pour tout $j > j_0$, $\langle g, h_{j,k} \rangle$ est non nul pour une seule valeur $k(j)$ de k, pour laquelle on a $|\langle g, h_{j,k(j)} \rangle| = 2^{j_0 - (j/2)}$.

   En déduire que $\displaystyle\|g\|^2 = \sum_{j=j_0+1}^{+\infty} |\langle g, h_{j,k(j)} \rangle|^2$ et que $g \in V$.

5) Soit maintenant $g = \mathbb{1}_{[a,b]}$ où a et b sont des réels tels que $a < b$. Montrer que, pour tout $j \in \mathbb{Z}$ tel que $2^j < b - a$, il existe $k, k' \in \mathbb{Z}$ tels que $k \le k'$ et

$$(k-1)2^j \le a < k2^j \qquad \text{et} \qquad k'2^j \le b < (k'+1)2^j$$

   et donc tels que $\displaystyle\|g - \sum_{l=k}^{k'-1} \mathbb{1}_{I(j,l)}\|^2 \le 2^{j+1}$. En déduire que $g \in V$.

6) Montrer que la famille $(h_{j,k})_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.

La base en question a été inventée par Alfred Haar, mathématicien hongrois, 1885-1933. C'est le prototype des bases d'ondelettes, *développées dans les années 1980, notamment par Yves Meyer, mathématicien français né en 1939.*