Corrigé du devoir à la maison 2

Exercice I : Les polynômes d'Hermite.

Notations :

- *$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par $\varphi(x) = e^{-x^2/2}$.*
- *μ est la mesure borélienne sur $\mathbb{R}$ de densité φ par rapport à la mesure de Lebesgue*
- *H est l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}, \mu)$. On note $\langle -, - \rangle$ le produit scalaire de H et $\| - \|$ la norme associée à ce produit scalaire.*
- *Pour $z \in \mathbb{C}$, la fonction $\psi_z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est définie par $\psi_z(x) = e^{zx}$.*
- *On note E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sa base algébrique naturelle, donnée par $u_n(x) = x^n$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

1) *Rappeler l'expression de $\langle f, g\rangle$ et de $\|f\|$, pour tous f, g appartenant à H. Montrer que E est inclus dans H. Montrer que $\psi_z \in H$, pour tout $z \in \mathbb{C}$, et calculer $\|\psi_z\|$.*

On a

$$\forall (f,g) \in H^2 \quad \langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\varphi(x)\, dx \quad \text{et} \quad \|f\| = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \varphi(x)\, dx\right)^{1/2} .$$

Si f est un polynôme, on sait que la fonction $x \mapsto f(x)^2 e^{-x^2/4}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et qu'elle tend vers 0 à l'infini. Il existe donc $c > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x)|^2 e^{-x^2/4} \leqslant c\,.$$

On obtient $|f(x)|^2\varphi(x) \leqslant ce^{-x^2/4}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui entraîne l'intégrabilité de $x \mapsto f(x)^2\varphi(x)$.

Posons $\alpha = \Re(z)$. On a

$$\frac{x^2}{2} - 2\alpha x = \frac{1}{2}(x - 2\alpha)^2 - 2\alpha^2$$

et donc $|\psi_z(x)|^2\varphi(x) = e^{2\alpha^2}\varphi(x - 2\alpha)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. L'intégrabilité de $x \mapsto \psi_z(x)^2\varphi(x)$ en découle aussitôt, ainsi que l'égalité $\|\psi_z\|^2 = e^{2\Re(z)^2}\sqrt{2\pi}$.

2) *Montrer, par récurrence sur n, l'existence d'une suite de polynômes $(P_n)_{n\geqslant 0}$ telle que*

$$\varphi^{(n)}(x) = (-1)^n \varphi(x) P_n(x)\,,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que P_n est un polynôme de degré n, dont le terme de plus haut degré est x^n.

La propriété à prouver est vérifiée pour $n = 0, 1$: il suffit de prendre $P_0 = 1$ et $P_1(x) = x$. En partant de l'hypothèse de récurrence

$$\varphi^{(n)}(x) = (-1)^n \varphi(x) P_n(x) \quad \text{et} \quad P_n(x) = x^n + R_n(x) \quad (\deg R_n < n)$$

et en dérivant, il vient

$$\varphi^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1}\varphi(x)(xP_n(x) - P_n'(x))\,,$$

ce qui donne la formule attendue, avec

$$P_{n+1}(x) = xP_n(x) - P_n'(x) = x^{n+1} + xR_n(x) - P_n'(x)\,,$$

où $xR_n(x) - P_n'(x)$ est un polynôme de degré au plus n.

3) *Montrer que* $\langle P_n, u_m\rangle = 0$ *pour* $0 \leqslant m < n$. *En déduire que, dans l'espace de Hilbert* H*, la suite* $(P_n)_{n\geqslant 0}$ *est la suite orthogonale obtenue, par le procédé de Gram-Schmidt, à partir de la suite* $(u_n)_{n\geqslant 0}$. *Montrer que* $\|P_n\| = (2\pi)^{1/4}\sqrt{n!}$.

Pour $n \geqslant m \geqslant 1$, on a

$$\langle P_n, u_m\rangle = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{(n)}(x)x^m dx = -(-1)^n m \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{(n-1)}(x)x^{m-1}dx\,.$$

En poursuivant les intégrations par parties, on obtient

$$\langle P_n, u_m\rangle = (-1)^{n-m} m! \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{(n-m)}(x)dx\,,$$

intégrale qui vaut 0 si $m < n$. Par linéarité, on a aussi $\langle P_n, P_m\rangle = 0$ pour tout $m < n$. Puisque $P_n - u_n$ est une combinaison linéaire des u_m pour $m < n$, on conclut que la suite $(P_n)_{n\geqslant 0}$ est la suite orthogonale obtenue, par le procédé de Gram-Schmidt, à partir de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$. On a

$$\|P_n\|^2 = \langle P_n, P_n\rangle = \langle P_n, u_n\rangle = n! \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx = \sqrt{2\pi}\, n!\,.$$

4) *Soit* $z \in \mathbb{C}$. *Calculer* $\langle \psi_z, P_n\rangle$*, pour tout* n. *En déduire que*

$$\|\psi_z\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|P_n\|^{-2} |\langle \psi_z, P_n\rangle|^2$$

et que $\psi_z \in \overline{E}$.

Posons $z = \alpha + i\beta$ avec α et β réels. Des IPP successives nous donnent

$$\langle \psi_z, P_n\rangle = (-1)^n \int_{\mathbb{R}} e^{zx}\varphi^{(n)}(x)\, dx = z^n \int_{\mathbb{R}} e^{zx}\varphi(x)\, dx\,.$$

Sachant que $\widehat{\varphi}(x) = \sqrt{2\pi}\varphi(x)$ (voir l'exercice 4 de la série 2), on en déduit que

$$\langle \psi_z, P_n\rangle = z^n e^{\alpha^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{i\beta x}\varphi(x-\alpha)\, dx = z^n e^{\alpha^2/2} e^{i\beta\alpha}\widehat{\varphi}(-\beta) = \sqrt{2\pi} z^n e^{z^2/2}\,.$$

Il vient alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|P_n\|^{-2} |\langle \psi_z, P_n\rangle|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\sqrt{2\pi}}\, 2\pi \left| z^n e^{z^2/2}\right|^2 = e^{\alpha^2-\beta^2}\sqrt{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^{2n}}{n!} =$$

$$= \sqrt{2\pi}\, e^{\alpha^2-\beta^2} e^{|z|^2} = \sqrt{2\pi}\, e^{2\alpha^2} = \|\psi_z\|^2\,.$$

D'après le cours, la suite $\left(\|P_n\|^{-1}P_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $\overline{E}$, et la fonction

$$f_z = \sum_{n=0}^{\infty} \|P_n\|^{-2} \langle \psi_z, P_n\rangle\, P_n$$

est la projection orthogonale de ψ_z sur $\overline{E}$. Comme $\psi_z - f_z$ est orthogonal à f_z, le théorème de Pythagore nous dit que

$$\|\psi_z - f_z\|^2 = \|\psi_z\|^2 - \|f_z\|^2 = \|\psi_z\|^2 - \sum_{n=0}^{\infty} \|P_n\|^{-2} |\langle \psi_z, P_n\rangle|^2 = 0\,.$$

On conclut que $f_z = \psi_z$ et que $\psi_z \in \overline{E}$.

5) *Soit* f *un élément de* H *orthogonal à* $\overline{E}$. *Montrer que* $f = 0$.

Par l'inégalité de Hölder, on a

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, \varphi(x)\, dx \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\, \varphi(x)\, dx\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx\right)^{1/2} < +\infty\,.$$

La fonction $f\varphi$ est donc intégrable sur $\mathbb{R}$ et

$$\widehat{f\varphi}(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} f(x)\varphi(x)\, dx = \langle f, \psi_{iy} \rangle$$

quel que soit y. Par l'hypothèse sur f et par l'injectivité de la transformation de Fourier, on en déduit que $f\varphi = 0$ p.p. et donc que $f = 0$ p.p. (car φ ne s'annule pas).

6) *Conclure que E est dense dans H et que la suite $\left(\|P_n\|^{-1} P_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H.*

Puisque $\overline{E}$ est un sous-espace fermé de H, on a $\overline{E} = ((\overline{E})^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = H$, ce qui donne la conclusion souhaitée.

Exercice II : La base de Haar sur $\mathbb{R}$.

Notations :

- *On se place dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ ($\mathbb{R}$ étant muni de la mesure de Lebesgue), dont on note $\langle -, - \rangle$ le produit scalaire et $\| - \|$ la norme associée.*
- *On pose $h = 1\!\!1_{]0,1/2[} - 1\!\!1_{]1/2,1[}$. Pour tout $(j,k) \in \mathbb{Z}^2$, on considère la fonction $h_{j,k}(x) = 2^{-j/2} h(2^{-j}x - k)$ et l'intervalle $I(j,k) =]k2^j, (k+1)2^j[$.*

1) *Dessiner le graphe de $h_{j,k}$. Montrer que $h_{j,k} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} h_{j,k}(x)\, dx$ et $\|h_{j,k}\|$.*

La fonction $h_{j,k}$ est bornée et nulle en dehors de l'intervalle $I_{j,k}$, elle appartient donc à $L^p(\mathbb{R})$ quel que soit $p \in [1, +\infty]$. En regardant le graphe de $h_{j,k}$ on voit aussitôt que $\int_{\mathbb{R}} h_{j,k}(x)\, dx = 0$ (On peut aussi remarquer, par un changement de variable, que

$$\int_{\mathbb{R}} h_{j,k}(x)\, dx = 2^{j/2} \int_{\mathbb{R}} h(x)\, dx = 0\,).$$

Puisque $|h_{j,k}|^2 = 2^{-j} 1\!\!1_{I_{j,k}}$ p.p. et que $I_{j,k}$ est de longueur 2^j, on a $\|h_{j,k}\| = 1$.

On désignera désormais par V le sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{R})$ engendré par les fonctions $h_{j,k}$, $(j,k) \in \mathbb{Z}^2$.

2) *Soient j, j', k, k' des entiers tels que $j' < j$. Montrer qu'on a l'alternative suivante : soit les intervalles $I(j',k')$ et $I(j,k)$ sont disjoints, soit $I(j',k')$ est contenu dans l'une des deux moitiés, droite ou gauche, de $I(j,k)$. En déduire que $h_{j,k}\, h_{j',k'} = c\; h_{j',k'}$ p.p., où $c \in \{0, -1, 1\}$.*

La moitié gauche de $I(j,k)$ est l'intervalle

$$]k2^j, k2^j + 2^{j-1}[=](2k)2^{j-1}, (2k+1)2^{j-1}[=\; I(j-1, 2k)\,.$$

De la même façon, la moitié droite de $I(j,k)$ est $I(j-1, 2k+1)$.

Si les intervalles $I(j',k')$ et $I(j,k)$ ne sont pas disjoints, c'est que

$$k2^{j-j'} \leqslant k' < (k+1)2^{j-j'}\,.$$

Sous cette condition, on a

- soit $k2^{j-j'} \leqslant k' < k2^{j-j'} + 2^{j-j'-1}$ et donc $I(j',k') \subset I(j-1, 2k)$,
- soit $k2^{j-j'} + 2^{j-j'-1} \leqslant k < (k+1)2^{j-j'}$ et donc $I(j',k') \subset I(j-1, 2k+1)$.

On en déduit que $h_{j,k}\, h_{j',k'} = c\, h_{j',k'}$ p.p., avec $c = 0$ si $I(j',k') \cap I(j,k) = \emptyset$, $c = 1$ si $I(j',k') \subset I(j-1, 2k)$, $c = -1$ si $I(j',k') \subset I(j-1, 2k+1)$.

3) *Montrer que la famille $(h_{j,k})_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}$ est orthonormée.*

On sait déjà que les fonctions $h_{j,k}$ sont de norme 1. Il reste à prouver que, si $(j,k) \neq (j',k')$, alors

$$(\star) \quad \langle h_{j,k}, h_{j',k'} \rangle = 0\,,$$

ce qu'on voit par la discussion suivante :

– Si $j = j'$, c'est que $k \neq k'$. Il est alors clair que $I(j',k') \cap I(j,k) = \emptyset$ et donc $h_{j,k}h_{j',k'} = 0$, ce qui implique à plus forte raison $(\star)$.
– Si $j' < j$ et si $I(j',k') \cap I(j,k) = \emptyset$, on a $(\star)$ comme ci-dessus.
– Si $j' < j$ et si $I(j',k') \cap I(j,k) \neq \emptyset$, on a

$$\langle h_{j,k}, h_{j',k'} \rangle = \int_{\mathbb{R}} h_{j,k}(x)\, h_{j',k'}(x)\, dx = c \int_{\mathbb{R}} h_{j',k'}(x)\, dx = 0\,.$$

– Si $j' > j$, on échange les rôles.

4) *Soit $(j_0, k_0) \in \mathbb{Z}^2$ et $g = 1\!\!1_{I(j_0,k_0)}$. Montrer que :*
   1. *pour tout $(j,k) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $j \leq j_0$ on a $\langle g, h_{j,k} \rangle = 0$,*
   2. *pour tout $j > j_0$, $\langle g, h_{j,k} \rangle$ est non nul pour une seule valeur $k(j)$ de k, pour laquelle on a $|\langle g, h_{j,k(j)} \rangle| = 2^{j_0-(j/2)}$.*

   En déduire que $\|g\|^2 = \sum_{j=j_0+1}^{+\infty} |\langle g, h_{j,k(j)} \rangle|^2$ et que $g \in V$.

   Si $j \leqslant j_0$, on a soit $I(j,k) \subset I(j_0,k_0)$, soit $I(j,k) \cap I(j_0,k_0) = \emptyset$, et donc $gh_{j,k} = ch_{j,k}$, avec $c \in \{0,1\}$, ce qui donne $\langle g, h_{j,k} \rangle = 0$.

   Si $j > j_0$, posons $k(j) = \left[2^{j_0-j}k_0\right]$. Puisque $2^{j-j_0} \in \mathbb{Z}$, on a $k_0 \leqslant 2^{j-j_0}(k(j)+1) - 1$ et donc $I(j_0,k_0) \subset I(j,k(j))$. Puisqu'alors $I(j_0,k_0)$ est inclus dans l'une des deux moitiés de $I(j,k(j))$, on a $gh_{j,k(j)} = \pm 2^{-j/2} g$ et donc $|\langle g, h_{j,k(j)} \rangle| = 2^{j_0-(j/2)}$. Puisque, à j fixé, les intervalles $I(j,k)$ sont deux à deux disjoints, on $I(j,k) \cap I(j_0,k_0) = \emptyset$, et donc $\langle g, h_{j,k} \rangle = 0$, pour tout $k \neq k(j)$.

   On a alors
$$\sum_{j=j_0+1}^{+\infty} |\langle g, h_{j,k(j)} \rangle|^2 = 4^{j_0} \sum_{j=j_0+1}^{+\infty} 2^{-j} = 2^{j_0} = \|g\|^2\,.$$

   En raisonnant comme dans la question 4) de l'exercice I, on en déduit que

$$g = \sum_{j=j_0+1}^{+\infty} \langle g, h_{j,k(j)} \rangle\, h_{j,k(j)}\,,$$

   d'où $g \in V$.

5) *Soit maintenant $g = 1\!\!1_{[a,b]}$ où a et b sont des réels tels que $a < b$. Montrer que, pour tout $j \in \mathbb{Z}$ tel que $2^j < b - a$, il existe $k, k' \in \mathbb{Z}$ tels que $k \leq k'$ et*

$$(k-1)2^j \leq a < k2^j \qquad \text{et} \qquad k'2^j \leq b < (k'+1)2^j$$

   et donc tels que $\|g - \sum_{l=k}^{k'-1} 1\!\!1_{I(j,l)}\|^2 \leq 2^{j+1}$. En déduire que $g \in V$.

   Par hypothèse sur a, b et j, on a $[2^{-j}a] \leqslant [2^{-j}b] - 1$. En posant $k = [2^{-j}a] + 1$ et $k' = [2^{-j}b]$, on obtient des entiers ayant les propriétés voulues. Posons alors

$$g_j = \sum_{l=k}^{k'-1} 1\!\!1_{I(j,l)}\,.$$

   Un simple dessin montre que
$$|g - g_j|^2 \leqslant 1\!\!1_{I(j,k)} + 1\!\!1_{I(j,k')}$$
   et donc $\|g - g_j\|^2 \leq 2^{j+1}$. On a ainsi $\lim_{j \to -\infty} g_j = g$ dans $L^2(\mathbb{R})$. D'après la question précédente, on a $g_j \in V$. Puisque V est fermé on peut conclure que $g \in V$.

6) *Montrer que la famille $(h_{j,k})_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.*

   D'après la question précédente, toute fonction en escalier appartient à V. Puisque l'ensemble des fonctions en escalier est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ (et que V est fermé !), on conclut que $V = L^2(\mathbb{R})$, CQFD.