Université Paris Diderot — Année 2007/08

L3 Maths Appliquées (31M23030) — Analyse de Hilbert et de Fourier

Devoir à la maison n° 3

On considère une suite $(\omega_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ayant les propriétés suivantes :
- $\omega_{-n} = -\omega_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$,
- la suite $(\omega_n)_{n\geqslant 1}$ est positive, décroissante, tendant vers 0,
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\omega_n}{n} = +\infty$.

On se propose de montrer qu'il n'existe pas de fonction $f \in L^1_{2\pi}$ telle que $c_n(f) = \omega_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ (Ce résultat est à comparer avec celui de l'exercice 6 de la série n° 2). On précisera ce résultat en établissant que la suite de fonctions définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad S_n(x) = \sum_{j=-n}^{n} \omega_j e^{ijx}$$

converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction périodique qui n'est pas localement intégrable.

Rappel et notation. On rappelle que la fonction : $y \mapsto \varphi(y) = \displaystyle\int_0^y \frac{\sin u}{u}\, du$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et admet une limite finie en $+\infty$. On pose

$$F_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}\,.$$

1) Établir les formules trigonométriques :

$$\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2} \quad , \quad \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\,\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\,,$$

pour tout $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$. *Indication :* on commencera par calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}$.

2) Montrer que la fonction $h :]0,\pi] \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(t) = \frac{1}{\sin(\frac{t}{2})} - \frac{2}{t}$$

se prolonge par continuité en 0.

3) À l'aide des questions précédentes montrer que, pour tout $x \in [0, \pi]$,

a) la suite $(F_n(x))_{n \geqslant 1}$ est convergente,

b) $|F_n(x)| \leqslant \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi} |h(t)|\, dt + \|\varphi\|_\infty$.

4) Soit $f \in L^1_{2\pi}$. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(c_k(f) - c_{-k}(f)\right) = \frac{1}{i\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) F_n(x) dx\,;$$

en déduire que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}\left(c_n(f) - c_{-n}(f)\right)$ est convergente.

5) Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f \in L^1_{2\pi}$ telle que $c_n(f) = \omega_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

6) À l'aide d'une transformation d'Abel[1], montrer que, pour tout $x \in]0, \pi]$ et tous entiers $n > m \geqslant 0$, on a

$$|S_n(x) - S_m(x)| \leqslant \frac{4\omega_{m+1}}{\sin(x/2)}\,.$$

En déduire que la suite de fonctions $(S_n)_{n \geqslant 0}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$; on désignera par g sa limite.

7) Montrer que g est une fonction 2π-périodique *n'appartenant pas* à $L^1_{2\pi}$. *Indication* : Montrer que, pour $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} S_n(x)(e^{-ikx} - 1) dx = \omega_k\,.$$

En déduire que, si g appartenait à $L^1_{2\pi}$, on aurait $c_k(g) = \omega_k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

---

[1] Il s'agit de la formule suivante

$$\sum_{k=N}^{M} a_k(b_k - b_{k-1}) = a_M b_M - a_N b_{N-1} + \sum_{k=N}^{M-1} b_k(a_k - a_{k+1})\,,$$

valable pour toutes suites numériques finies $(a_k)_{N \leqslant k \leqslant M}$ et $(b_k)_{N-1 \leqslant k \leqslant M}$. Cette formule, qu'on vous conseille de démontrer, est l'analogue discret de l'intégration par parties : le rôle de la dérivation est tenu par l'opération de *différence*, celui de l'intégration par l'opération de *sommation finie*.